Equaz. diff. in forma normale

$$y' = f(t, y)$$

$y = y(t)$ definita in $\mathcal{U}(t_0)$ è soluzione

se $\quad y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in \mathcal{U}(t_0)$

<u>Esempio</u>: $\quad y' = \sqrt{1 - y^2}$

$y = \operatorname{sen} t$ è soluzione su $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

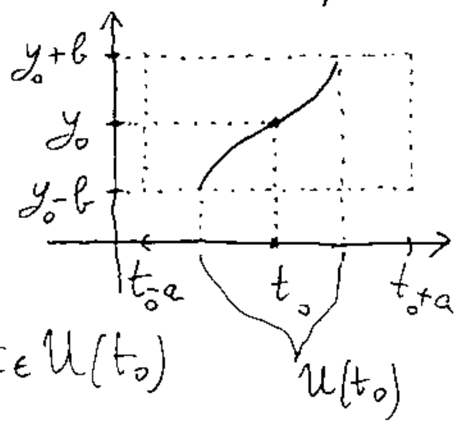
Infatti: $\quad \cos t = \sqrt{1 - (\operatorname{sen} t)^2}$ per $\uparrow$

<u>Teorema</u>

<u>se</u> $f(t, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ continue per

$\forall t \in (t_0 - a, t_0 + a)$

$\forall y \in (y_0 - b, y_0 + b)$



allora $\exists! \, y(t) : \mathcal{U}(t_0) \to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in \mathcal{U}(t_0) \\ y(t_0) = y_0 & \end{cases} \quad \text{(Problema di Cauchy)}$$

Equaz. diff. a variabili separabili

$$y' = a(t) \cdot b(y)$$

$a(t)$ continua su $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$

$b(y)$ " " $(y_0 - \beta, y_0 + \beta)$

<u>Condizione iniziale</u> $y(t_0) = \bar{y}$: $b(\bar{y}) = 0$

allora $y(t) = \bar{y} \quad \forall t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ soluz.

<u>Condizione iniziale</u> $y(t_0) = y_0$: $b(y_0) \neq 0$

Se $y(t)$ soluz. su $\mathcal{U}(t_0)$, allora:

$\forall t \in \mathcal{U}(t_0) \quad y'(t) = a(t) \cdot b(y(t))$

$b(y(t_0)) = b(y_0) \neq 0 \Rightarrow b(y(t)) \neq 0 \quad \forall t \in \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$

(per continuità)

$$\frac{y'(t)}{b(y(t))} = a(t)$$

$$\int \frac{y'(t)}{b(y(t))} dt = \int a(t) dt + C$$

per sostituzione:

$y = y(t)$

$dy = y'(t) dt$

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(t) dt + C$$

.....

Equadiff. lineari del 1° ordine.

(1) $y' + a(t)\cdot y = f(t)$ $\quad a, f \in \mathcal{C}(\mathcal{U}(t_0))$

(2) $z' + a(t) z = 0$ omogenea associata

<u>se</u> $y(t)$ soluz. generica e $\bar{y}(t)$ particol. di (1):

$$y'(t) + a(t)\cdot y(t) = f(t) \qquad \forall t \in \mathcal{U}(t_0)$$
$$\bar{y}'(t) + a(t)\cdot \bar{y}(t) = f(t)$$

sottraendo: $(y(t) - \bar{y}(t))' + a(t)(y(t) - \bar{y}(t)) = 0$

<u>allora</u> $y(t) - \bar{y}(t)$ soddisfa (2)

Quindi $\underbrace{y(t)}_{\text{soluzione generale della (1)}} = \underbrace{z(t)}_{\text{soluzione generale della (2)}} + \underbrace{\bar{y}(t)}_{\text{soluzione particolare della (1)}}$

↳ (variab. separab.)

(2): $z' = -a(t)\cdot z$ $\quad$ ($z = 0$ è soluz.)

per $z \neq 0$: $\displaystyle\int \frac{dz}{z} = -\int a(t)\, dt + c$

$\log|z| = -\int a(t) dt + c$ $\quad c \in \mathbb{R}$

$|z| = e^{-\int a(t)} \cdot e^{c}$

$z(t, \tilde{c}) = \tilde{c}\, e^{-\int a(t) dt}$ $\quad \tilde{c} \gtreqless 0$

Soluzione particolare $\bar{y}(t)$ della (1):

cercare nella forma $\bar{y}(t) = K(t)\cdot e^{-\int a(t) dt}$

$$\bar{y}'(t) = K'(t)\, e^{-\int a(t) dt} - a(t)\cdot K(t)\, e^{-\int a(t) dt}$$

sostituendo nella (1): $y' + a(t)\cdot y = f(t)$

$$K' e^{-\int a} \cancel{- a\cdot K \cdot e^{-\int a}} \cancel{+ a\cdot K \cdot e^{-\int a}} = f$$

$$K'(t) = f(t)\cdot e^{+\int a(t) dt}$$

$$K(t) = \int f(t)\cdot e^{\int a(t) dt}\, dt$$

$$\bar{y}(t) = e^{-\int a(t) dt} \cdot \int f(t)\, e^{\int a(t) dt}\, dt$$

$$y(t, C) = z(t, C) + \bar{y}(t) =$$

$$= e^{-\int a(t) dt} \cdot \left[C + \int f(t)\cdot e^{\int a(t) dt}\, dt \right]$$