

Complementi di Matematiche per le L.S. chimiche
Esercizi a.a. 2003/2004

Esercizio 1)

Studiando l'andamento delle curve di livello, trovare i massimi e minimi assoluti del campo scalare $f(x, y) = (x - y)^2$ sull'insieme:

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Esercizio 2)

Studiando l'andamento delle curve di livello, determinare i punti di massimo e minimo assoluto della funzione:

$$f(x, y) = xy + 1$$

sull'insieme:

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Esercizio 3)

Studiare la famiglia delle curve di livello della funzione

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

Verificare che la curva di livello passante per il punto $(1, 1)$ è perpendicolare al gradiente ∇f nello stesso punto.

Questo è un caso o un fatto generale ?

Esercizio 4)

Verificare l'esistenza, e calcolare il valore della derivata direzionale del campo scalare

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

nel punto $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Esercizio 5)

Calcolare, nel punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, il gradiente, e la derivata nella direzione del vettore formante un angolo di $\frac{\pi}{3}$ col semiasse positivo delle ascisse, del campo scalare:

$$y = x \ln(x + y)$$

Esercizio 6)

Calcolare la derivata seconda mista della funzione composta:

$$z = f(x, y) \quad x = u^2 + v^2 \quad y = \frac{u}{v}$$

Esercizio 7)

Il cambio di variabili $x = u + v$ $y = uv^2$ trasforma $f(x, y)$ in $g(u, v)$. Calcolare

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1, 1)$$

sapendo che, per $x = 2$ $y = 1$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$$

Esercizio 8)

Sia $z = f(u, v)$ definita e differenziabile in un intorno di $(1, 0)$ e sia

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) = 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = \frac{1}{2}$$

Posto:

$$u = e^{x^2+y^2} \qquad v = xe^y$$

calcolare il vettore gradiente di $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ nel punto $(0, 0)$.

Esercizio 9)

Data $f \in C^2(\mathbf{R}^2)$, posto:

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

esprimere $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ in funzione delle derivate parziali di f .

Esercizio 10)

Supponiamo che $f \in C^2(\mathbf{R}^2)$ soddisfi l'equazione alle derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Introduciamo il cambiamento di variabili lineare:

$$x = Au + Bv \qquad y = Cu + Dv$$

(A, B, C, D costanti), e sia

$$g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)).$$

Determinare valori interi non nulli di A, B, C, D in modo che g soddisfi l'equazione

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0.$$

Risolvere quest'ultima e quindi determinare f .

Esercizio 11)

Sia $\phi(x, y)$ il potenziale, nullo nell'origine, definito dal campo vettoriale

$$\mathbf{f}(x, y) = (x - 1)\mathbf{i} + (y + 1)\mathbf{j}.$$

Verificare che l'equazione $\phi(x, y) = 0$ definisce implicitamente, a partire da $(0, 0)$, una funzione implicita $y = y(x)$ e calcolare $y'(0)$ (facoltativamente anche $y''(0)$).

Esercizio 12)

Determinare se il seguente campo vettoriale è conservativo:

$$\mathbf{f}(x, y) = \left[\arctan(x + y) + \frac{x}{1 + (x + y)^2} \right] \cdot \mathbf{i} + \frac{x}{1 + (x + y)^2} \cdot \mathbf{j}.$$

Calcolarne poi l'integrale lungo una linea dal punto $(1, -1)$ al punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Esercizio 13)

Dopo aver verificato la conservatività del campo vettoriale

$$\mathbf{f}(x, y) = 2xy \cdot \mathbf{i} + (x^2 + 1) \cdot \mathbf{j},$$

calcolarne l'integrale lungo una semicirconferenza dal punto $(1, 1)$ al punto $(-1, -1)$.

Esercizio 14)

Se γ è il quarto di circonferenza di centro nell'origine e raggio 1, che va dal punto $A = (1, 0)$ al punto $B = (0, -1)$, calcolare:

$$\int_{\gamma} \frac{-y}{(x - y)^2} dx + \frac{x}{(x - y)^2} dy$$

Esercizio 15)

Verificare che $g(x) = \exp(xy)$ è un fattore integrante per l'equazione differenziale:

$$(1 + xy)dx + x^2 dy = 0.$$

Calcolare quindi la soluzione soddisfacente la condizione $y(1) = 0$.

Esercizio 16)

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\frac{y - x^2}{x^2} \cdot dx - \frac{1}{x} \cdot dy = 0 \quad y(1) = 1$$

Esercizio 17)

Trovare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\left(y - \frac{1}{x}\right) dx + \left(x - \frac{1}{y}\right) dy = 0 \quad y(1) = 2$$

Esercizio 18)

Esprimere in forma implicita la soluzione del problema di Cauchy:

$$y' = \frac{e^{-x} - ye^{x+y}}{(y+1)e^{x+y}} \quad y(0) = 0$$

Esercizio 19)

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\frac{1}{y} dx - \frac{x - y^3}{y^2} dy = 0 \quad y(2) = 1$$

Con la condizione $y(1) = 1$ il problema sarebbe ben posto?

Esercizio 20)

Trovare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

Calcolare poi la formula di Taylor arrestata al secondo ordine per la soluzione soddisfacente la condizione iniziale $y(1) = 1$.

Esercizio 21)

Stabilire se la seguente forma differenziale è esatta nella regione $(x + 1) > 0$

$$\frac{x^2 y + 2xy + y^2}{(x + 1)^2} dx + \frac{x^2 + 2xy}{x + 1} dy$$

e, in caso affermativo, calcolarne il potenziale.

Esercizio 22)

Stabilire se il seguente campo di forze è conservativo:

$$F = (f_x, f_y) \quad f_x = 2x \cos(1 + x^2) \cos y \quad f_y = -\sin y \sin(1 + x^2)$$

Calcolare poi $\int_{\Gamma} F d\Gamma$ essendo Γ la linea di equazioni parametriche

$$\alpha_1(t) = \sin t^2 \quad \alpha_2(t) = t \cos t^2 \quad 0 \leq t \leq \sqrt{\pi}$$

Esercizio 23)

Stabilire se la seguente forma differenziale è esatta

$$\{2xy \cos x^2 - y(x^2 + y)\}dx + \{\sin x^2\}dy.$$

Calcolarne poi l'integrale di linea lungo la circonferenza di centro nell'origine e raggio $\sqrt{2}$.

Esercizio 24)

Dimostrare che l'equazione

$$(x + y)e^{xy} + xy - 1 = 0$$

definisce una e una sola funzione implicita $y = y(x)$, in un intorno di $x_0 = 1$, tale che $y(1) = 0$.

Disegnare poi il grafico approssimato di tale funzione in un intorno di $x_0 = 1$ servendosi della formula di Taylor del secondo ordine.

Esercizio 25)

Dimostrare che l'equazione

$$x^2y + e^{x+y} - 1 = 0$$

definisce una e una sola funzione implicita $y = y(x)$ il cui grafico passa per il punto $(0, 0)$.

Disegnare poi una approssimazione del grafico di tale funzione mediante la formula di Taylor del secondo ordine.

Esercizio 26)

Data l'equazione:

$$\frac{e^y}{1+x^2} + 3x^2y^3 - 1 = 0$$

determinare un punto (x_0, y_0) per il quale passi, con tangente orizzontale, il grafico di una e una sola funzione implicita $y = y(x)$. Stabilire poi se si tratti di un punto estremante o di un flesso. (Attenzione a economizzare i calcoli necessari per la derivata seconda)