

Complementi di Matematiche

Alberto Alesina

a.a. 2008/2009

4.5 L'equazione della corda vibrante

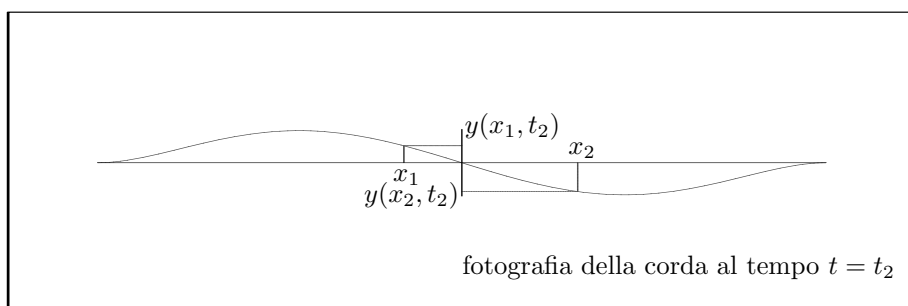
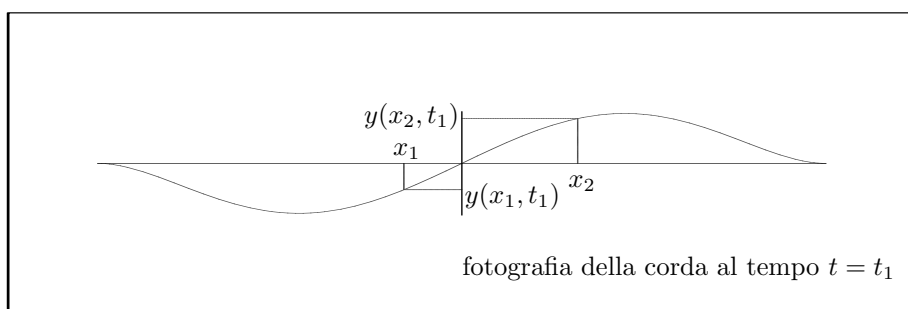
Riprendiamo in considerazione più dettagliatamente l'equazione della corda vibrante:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (4.20)$$

In un precedente capitolo ne abbiamo già ricavato l'integrale generale per dare un esempio di applicazione del metodo di cambiamento di variabili indipendenti (D'Alembert). Per comodità riportiamo tale calcolo nella pagina seguente.

Nel seguito, considereremo il problema delle condizioni iniziali e delle condizioni ai limiti e questo ci darà l'occasione di vedere nuovamente all'opera i metodi risolutivi della separazione delle variabili e di Fourier.

Per meglio comprendere i risultati che otterremo è bene ricordare che la corda è pensata illimitata da entrambe i lati e adagiata sull'asse x , che la vibrazione si pensa avvenire nel piano x,y , e che la funzione incognita $y = y(x,t)$ dell'equazione in questione rappresenta come lo spostamento in verticale y di un punto della corda dipende dalla sua ascissa x e dall'istante di tempo t . Quindi $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$ rappresenta la velocità in verticale del punto di ascissa x all'istante t . Per la dimostrazione che la funzione $y(x,t)$ soddisfa l'equazione (4.20) e per altri approfondimenti si veda per esempio ¹⁵



¹⁵Smirnov V.I., Corso di matematica superiore, vol. II, Editori Riuniti, cap. VII

4.5.1 Vibrazioni di una corda: integrale generale

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (4.21)$$

$$u = x + at, \quad v = x - at \quad y(x, t) = Y(x + at, x - at)$$

Derivando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial u}(x + at, x - at) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial v}(x + at, x - at) \frac{\partial v}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial Y}{\partial u}(x + at, x - at)a + \frac{\partial Y}{\partial v}(x + at, x - at)(-a) \end{aligned}$$

Derivando ulteriormente occorre fare attenzione al fatto che la funzione più esterna della composizione non è più Y , bensì $\frac{\partial Y}{\partial u}$ o $\frac{\partial Y}{\partial v}$. Avremo quindi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \left[\frac{\partial(\frac{\partial Y}{\partial u})}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{\partial Y}{\partial u})}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right] a + \left[\frac{\partial(\frac{\partial Y}{\partial v})}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{\partial Y}{\partial v})}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right] (-a) = \\ &= \frac{\partial^2 Y}{\partial u^2} a^2 + \frac{\partial^2 Y}{\partial v \partial u} (-a^2) + \frac{\partial^2 Y}{\partial u \partial v} (-a^2) + \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} a^2 \end{aligned}$$

Per un noto teorema le due derivate seconde miste (se continue) sono uguali:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{\partial^2 Y}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 Y}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} \right]$$

Per $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ i fattori $\frac{\partial u}{\partial t} = a$ e $\frac{\partial v}{\partial t} = -a$ saranno sostituiti da $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ e $\frac{\partial v}{\partial x} = 1$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 Y}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 Y}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} \right]$$

Sostituendo nell'equazione (4.21) e semplificando:

$$4a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial v \partial u} = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{\partial(\frac{\partial Y}{\partial u})}{\partial v} = 0$$

Integrando rispetto a v (aggiungendo una qualsiasi $f(u)$ costante rispetto a v):

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = f(u)$$

e integrando rispetto a u (aggiungendo una $G(v)$ costante rispetto a u):

$$Y(u, v) = \int f(u) du + G(v) = F(u) + G(v)$$

e tornando alle vecchie variabili:

$$y(x, t) = Y(x + at, x - at) = F(x + at) + G(x - at)$$

Con F e G funzioni arbitrarie di una sola variabile (con qualche regolarità, per esempio con derivate seconde continue).

4.5.2 Vibrazioni di una corda: condizioni iniziali

Abbiamo visto che l'integrale generale dell'equazione della corda vibrante è :

$$y(x, t) = F(x + at) + G(x - at) \quad (4.22)$$

con F e G funzioni arbitrarie (di classe \mathcal{C}^2 su \mathbb{R}) di una sola variabile. Pensiamo di imporre condizioni iniziali del tipo

$$y(x, 0) = \varphi(x) \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad (4.23)$$

Sostituendole nell'integrale generale e nella sua derivata parziale rispetto a t :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = a F'(x + at) - a G'(x - at)$$

cioè ponendo in essi $t = 0$, otteniamo rispettivamente:

$$F(x) + G(x) = \varphi(x) \quad a F'(x) - a G'(x) = \psi(x) \quad (4.24)$$

che, derivando la prima delle due moltiplicata per a , ci forniscono un sistema (algebrico, non differenziale) di due equazioni nelle due incognite $F'(x)$ e $G'(x)$:

$$\begin{cases} a F'(x) + a G'(x) = a \varphi'(x) \\ a F'(x) - a G'(x) = \psi(x) \end{cases}$$

Sommando (o sottraendo) e dividendo per $2a$ ricaviamo le soluzioni:

$$F'(x) = \frac{1}{2} \varphi'(x) + \frac{1}{2a} \psi(x) \quad G'(x) = \frac{1}{2} \varphi'(x) - \frac{1}{2a} \psi(x)$$

Integrando fra 0 e u la prima e fra 0 e v la seconda:

$$F(u) = F(0) + \frac{1}{2} (\varphi(u) - \varphi(0)) + \frac{1}{2a} \int_0^u \psi(x) dx$$

$$G(v) = G(0) + \frac{1}{2} (\varphi(v) - \varphi(0)) - \frac{1}{2a} \int_0^v \psi(x) dx$$

Sommando e tenendo conto che: $F(0) + G(0) = \varphi(0)$ per la prima delle (4.24)

$$F(u) + G(v) = \frac{1}{2} (\varphi(u) + \varphi(v)) + \frac{1}{2a} \int_v^u \psi(x) dx$$

Ponendo: $u = x + at$ e $v = x - at$, si ha la soluzione del problema (4.20), (4.23):

$$y(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x + at) - \varphi(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(x) dx \quad (4.25)$$

4.5.3 Vibrazioni di una corda: condizioni ai limiti

Se pensiamo a una corda non infinita, ma di lunghezza finita, e inoltre fissata agli estremi, per esempio i punti di ascissa 0 e π sull'asse x , questo si traduce nelle cosiddette condizioni ai limiti per la soluzione:

$$\forall t > 0 \quad y(0, t) = y(\pi, t) = 0 \quad (4.26)$$

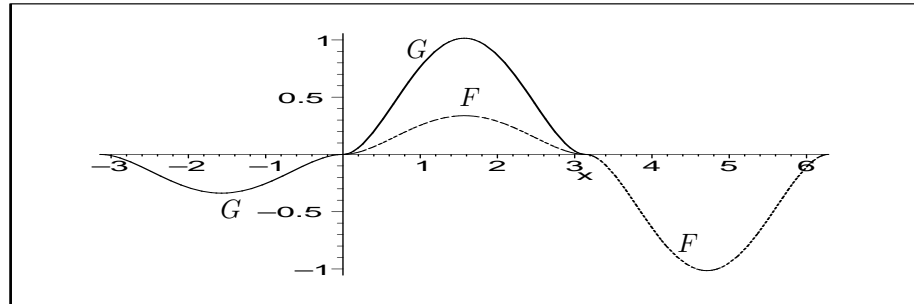
Queste, sostituite nell'integrale generale (4.22), danno:

$$F(at) + G(-at) = 0 \quad F(\pi + at) + G(\pi - at) = 0$$

Chiamando s l'espressione at , (che può assumere un valore qualsiasi), otteniamo:

$$\begin{cases} G(-s) = -F(s) \\ F(\pi + s) = -G(\pi - s) \end{cases} \quad (4.27)$$

Se le funzioni F e G sono definite sull'intervallo $[0, \pi]$, queste relazioni assegnano automaticamente la G su $[-\pi, 0]$ e la F su $[\pi, 2\pi]$. Inoltre le (4.27) implicano che



F e G siano funzioni periodiche di periodo 2π :

$$F(s + 2\pi) = F(\pi + (s + \pi)) = -G(\pi - (s + \pi)) = -G(-s) = F(s)$$

$$G(s + 2\pi) = -F(-s - 2\pi) = -F(-s) = G(s)$$

Allora le (4.24) implicano che anche φ e ψ siano periodiche di periodo 2π , dove φ e ψ sono le funzioni che esprimono le condizioni iniziali tramite le (4.23).

Ancora le (4.24) e le (4.27) implicano che φ e ψ siano funzioni dispari:

$$\varphi(-x) = F(-x) + G(-x) = -[G(x) + F(x)] = -\varphi(x)$$

$$\psi(-x) = a[F'(-x) - G'(-x)] = a[G'(x) - F'(x)] = -\psi(x)$$

(derivando la prima delle (4.27): $-G'(-y) = -F'(y)$).

Dunque affinché la soluzione (4.25) soddisfi anche alle condizioni ai limiti, occorre che φ e ψ siano funzioni di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, dispari e periodiche di periodo 2π .

È poi facile verificare che in questo caso la (4.25) è soluzione del problema con valori iniziali e condizioni ai limiti.

4.5.4 Il metodo di Fourier

Consideriamo ancora il problema:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (4.20)$$

$$\forall t \geq 0 \quad y(0, t) = y(\pi, t) = 0 \quad (4.26)$$

$$\forall x \in [0, \pi] \quad y(x, 0) = \varphi(x) \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad (4.23)$$

e cerchiamo se esistono soluzioni esprimibili come prodotti di una funzione T della sola t per una funzione X della sola x :

$$y(x, t) = T(t) \cdot X(x) \quad (4.28)$$

Nel derivare parzialmente questa espressione, per esempio rispetto a t , il fattore $X(x)$ è da considerarsi una costante moltiplicativa e passa quindi invariato attraverso la derivazione, che è ora ordinaria, e quindi la (4.20) diventa:

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 T(t) \cdot X''(x)$$

e dividendo per $a^2 T(t) \cdot X(x)$:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

I due membri di questa eguaglianza dipendono da variabili diverse e indipendenti fra loro, e quindi possono essere identicamente uguali solo se assumono uno stesso valore costante $-\omega^2$ (Vedremo presto perché negativo¹⁶).

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2 = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (4.29)$$

L'equazione alle derivate parziali si spezza in una coppia di equazioni differenziali ordinarie in funzioni incognite diverse, collegate da un parametro comune:

$$\begin{cases} T'' + a^2 \omega^2 T = 0 \\ X'' + \omega^2 X = 0 \end{cases}$$

Sono equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti (positivi e con quello della derivata prima nullo) e il prodotto degli integrali generali è quindi:

$$y(x, t) = [A \cos a\omega t + B \sin a\omega t] \cdot [C \cos \omega x + D \sin \omega x] \quad (4.30)$$

Imponiamo che esso soddisfi le condizioni di annullamento ai limiti (4.26):

$$\text{per } \forall t \geq 0 \quad \text{e } x = 0: \quad [A \cos a\omega t + B \sin a\omega t] \cdot C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

$$\text{per } \forall t \geq 0 \quad \text{e } x = \pi: \quad [A \cos a\omega t + B \sin a\omega t] \cdot D \sin \omega \pi = 0$$

Nella seconda abbiamo posto $C = 0$ come implicato dalla prima. La seconda comporta invece $\omega \pi = n\pi$, che è soddisfatta da $\omega = n$ per ogni intero $n \geq 1$.

¹⁶ Se la costante nella (4.29) fosse positiva o nulla, nella (4.30) comparirebbero esponenziali invece che seni e coseni, e le condizioni ai limiti sarebbero soddisfatte solo da $C = D = 0$ cui corrisponde la soluzione $y(x, t) = 0$ che non può soddisfare le condizioni iniziali.

Abbiamo quindi una successione di (famiglie di) soluzioni dell'equazione di partenza:

$$y_n(x, t) = [A_n \cos ant + B_n \sin ant] \cdot \sin nx$$

(il fattore costante arbitrario D è stato conglobato negli A_n e B_n) tutte che soddisfano le condizioni di annullamento ai limiti ma che in genere non soddisfano le condizioni iniziali.

Nell'ipotesi che la serie di tali soluzioni converga, e che la derivata (rispetto a t) della somma si possa ottenere come serie delle derivate, tale somma

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} [A_n \cos ant + B_n \sin ant] \cdot \sin nx$$

soddisferà ancora l'equazione differenziale (data la sua linearità) e le condizioni di annullamento ai limiti. Imponendo ora le condizioni iniziali (4.23) a $y(x, t)$ e alla sua derivata rispetto al tempo:

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} [-anA_n \sin ant + anB_n \cos ant] \cdot \sin nx$$

otteniamo:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin nx \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} anB_n \sin nx \qquad (4.31)$$

Se troviamo dei coefficienti A_n e B_n che soddisfano queste due relazioni, ne segue che le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ devono essere periodiche di periodo 2π (o un multiplo intero di esso) e dispari, in quanto espresse da una serie di seni, che hanno tali proprietà, e ciò è in accordo con quanto trovato alla fine del paragrafo precedente con un metodo completamente diverso.

Come vedremo in dettaglio nel prossimo paragrafo, moltiplicando i due membri di queste uguaglianze per $\sin mx$ (m intero) e integrando fra 0 e π si ottengono le espressioni esplicite dei coefficienti A_n e B_n :

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin nx \, dx \qquad B_n = \frac{2}{\pi na} \int_0^\pi \psi(x) \sin nx \, dx \qquad (4.32)$$

Si può dimostrare che le varie condizioni (convergenza della serie e sua derivabilità termine a termine etc. ...) che abbiamo via via enunciato sono soddisfatte sotto ipotesi abbastanza larghe (per esempio φ e ψ due volte derivabili con continuità) e quindi possiamo concludere che:

L'equazione (4.20) con le condizioni iniziali (4.23) (con φ e ψ funzioni di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, dispari e periodiche di periodo 2π) e quelle ai limiti (4.26) ha soluzione:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} [A_n \cos ant + B_n \sin ant] \cdot \sin nx \qquad (4.33)$$

dove i coefficienti A_n e B_n sono dati dalle formule (4.32).

Naturalmente si può dimostrare che la soluzione (4.33) coincide con la (4.25) trovata col metodo di D'Alembert.

Calcolo dei coefficienti A_n e B_n

Ricordiamo dapprima l'ortogonalità¹⁷ delle funzioni $\sin nx$, cioè il fatto che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0 \quad \text{se e solo se} \quad n \neq m \quad (n, m \text{ interi positivi})$$

Infatti per una nota formula trigonometrica:

$$\sin nx \sin mx = \frac{1}{2} [\cos(nx - mx) - \cos(nx + mx)]$$

e, se $n \neq m$, la primitiva della funzione integranda è esprimibile come somma di due seni (con coefficiente della variabile intero); quindi i due valori della primitiva agli estremi di un intervallo di ampiezza 2π sono uguali e l'integrale cercato è zero. Se invece $n = m$ allora $\cos(nx - nx) = 1$ e la primitiva è somma di x e di una funzione seno, quindi l'integrale cercato vale π .

Inoltre la funzione integranda è pari, in quanto prodotto di due dispari, e quindi l'ortogonalità vale anche se l'integrale è esteso solo fra 0 e π , essendo allora la metà di quello fra $-\pi$ e π .

Moltiplicando quindi la prima delle (4.31) per $\sin mx$:

$$\varphi(x) \sin mx = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin nx \right) \sin mx$$

presumendo¹⁸ che la serie converga e si possa integrare termine a termine:

$$\begin{aligned} \varphi(x) \sin mx &= \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \sin nx \sin mx) \\ \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin mx \, dx &= \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \sin nx \sin mx) \, dx = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \int_0^{\pi} (\sin nx \sin mx) \, dx = \frac{\pi}{2} A_m \end{aligned}$$

perché, come osservato appena sopra, nell'ultima serie solo l'integrale con $n = m$ è diverso da zero, e uguale a $\frac{\pi}{2}$, quindi:

$$A_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin mx \, dx$$

che è la prima delle (4.32); con passaggi analoghi si ottiene la seconda.

¹⁷vedere al paragrafo 4.3.6 una spiegazione intuitiva di questa terminologia

¹⁸Come spesso facciamo in queste dispense, assumiamo un atteggiamento euristico più che deduttivo: occorre tenere presente che i risultati trovati necessitano poi di una verifica rigorosa

4.6 Membrana vibrante, coordinate polari e Bessel

Nel caso bidimensionale (pensiamo a una membrana invece che a una corda) nell'equazione delle vibrazioni la derivata seconda rispetto all'unica dimensione spaziale x viene sostituita dal laplaciano nelle due variabili spaziali x e y :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad (4.34)$$

Non esamineremo dettagliatamente questo caso, ma vedremo soltanto come, in certe condizioni, le soluzioni si esprimano naturalmente tramite un funzione di Bessel. Matematicamente, a parte i cambi di notazione, la situazione è analoga a quella descritta nel paragrafo 4.4 a proposito di un problema di diffusione, ma la derivata al primo membro è del secondo ordine invece che del primo. Passando infatti a coordinate polari nel piano x, y :

$$t = t \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad t \in \mathbb{R}, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\mathcal{Z}(t, r, \theta) = z(t, x(r, \theta), y(r, \theta))$$

otteniamo:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial \theta^2} \right)$$

Se, per motivi di simmetria, ipotizziamo \mathcal{Z} indipendente da θ , allora la derivata rispetto a θ è nulla:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial r} \right)$$

Separiamo le variabili, cioè cerchiamo soluzioni della forma:

$$\mathcal{Z}(t, r) = T(t)R(r)$$

Deriviamo e sostituiamo nella precedente equazione:

$$T''(t)R(r) = a^2 \left(T(t)R''(r) + \frac{1}{r} T(t)R'(r) \right)$$

Dividiamo per $\mathcal{Z}(t, r) = a^2 T(t)R(r)$:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \left(\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} \right)$$

I due membri devono quindi essere uguali a una medesima costante $-\beta$:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\beta = \left(\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} \right)$$

Otteniamo due equazioni, una in $T(t)$ e una in $R(r)$ collegate da un parametro comune:

$$T''(t) + \beta a^2 T(t) = 0 \quad r R''(r) + R'(r) + \beta r R(r) = 0$$

Per $\beta = 1$, moltiplicando la seconda per r si ottiene l'equazione di Bessel di ordine 0:

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + r^2 R(r) = 0$$

4.6.1 Ancora un cambio di variabile.

I valori che la costante β può assumere dipendono da eventuali condizioni ai limiti (vedi analogia col paragrafo 4.5.4); per esempio, $\beta = 1$ significa che la equazione in $T(t)$ ha soluzioni periodiche di periodo $2\pi/a$. Se abbiamo un generico $\beta > 0$ l'equazione è :

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + \beta r^2 R(r) = 0 \quad (4.35)$$

Facciamo allora il cambiamento di variabile $s = r\sqrt{\beta}$, cioè poniamo

$$\begin{aligned} R(r) &= W(r\sqrt{\beta}) \\ R'(r) &= \sqrt{\beta} W'(r\sqrt{\beta}) \\ R''(r) &= \beta W''(r\sqrt{\beta}) \end{aligned}$$

Sostituiamo nell'equazione in $R(r)$:

$$r^2 \beta W''(r\sqrt{\beta}) + r \sqrt{\beta} W'(r\sqrt{\beta}) + \beta r^2 W(r\sqrt{\beta}) = 0$$

Non dimentichiamo di esprimere la vecchia variabile r con la nuova $s = r\sqrt{\beta}$ (da cui $s^2 = r^2 \beta$); otteniamo l'equazione di Bessel di ordine 0 nella funzione incognita $W(s)$:

$$s^2 W''(s) + s W'(s) + s^2 W(s) = 0$$

Sappiamo che questa ha come soluzione (almeno) la funzione di Bessel di prima specie di ordine 0, che avevamo denotato con $J_0(s)$ (vedi paragrafo 2.5). L'equazione di partenza (4.35) ha quindi (almeno) la soluzione:

$$R(r) = J_0(r\sqrt{\beta})$$

segue: L'equazione di Laplace

Da inserire come pagina 34 bis.

L'equazione di Laplace in due dimensioni, in coordinate polari diventa:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = 0$$

Per motivi fisici o geometrici, potremmo essere interessati solo a soluzioni che siano costanti sulle circonferenze con centro nell'origine del piano y, z (potendo dipendere dal loro raggio). Queste soluzioni, in coordinate polari, dipendono da r mentre sono costanti rispetto a θ , quindi hanno la derivata rispetto a θ uguale a zero, e per esse l'equazione si riduce a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = 0$$

Essendoci una sola variabile possiamo usare la solita notazione per le derivate ordinarie invece che parziali:

$$\frac{1}{r} W' + W'' = 0$$

Questa equazione è del primo ordine a variabili separabili se la pensiamo nella funzione incognita $W'(r)$ invece che in $W(r)$. Oppure, moltiplichiamo per r :

$$W' + r W'' = 0$$

e osserviamo che il primo membro non è altro che la derivata di $r W'(r)$, quindi:

$$\frac{d}{dr}(r W'(r)) = 0 \quad \Rightarrow \quad r W'(r) = a \quad \text{costante}$$

dividendo per r :

$$W'(r) = \frac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad W(r) = a \log(r) + b$$

Tornando alle coordinate cartesiane e ricordando che $r = \sqrt{y^2 + z^2}$:

$$w(y, z) = W(\sqrt{y^2 + z^2}) = a \log(\sqrt{y^2 + z^2}) + b$$

e infine, assorbendo il fattore $\frac{1}{2}$ nella costante arbitraria a :

$$w(y, z) = a \log(y^2 + z^2) + b$$

con a e b costanti reali qualsiasi.

È facile verificare direttamente, derivando, che queste funzioni soddisfano l'equazione di Laplace scritta in coordinate cartesiane (3.9).