

Complementi di Matematiche

Alberto Alesina

a.a. 2005/2006

Introduzione

Questa dispensa contiene parte del materiale svolto, nell'a.a. 2005/06, nel corso di Complementi di Matematiche per le Lauree Magistrali di area chimica, presso la Facoltà di Scienze M.F.N. dell'Università degli Studi di Milano.

Parte I

Equazioni differenziali

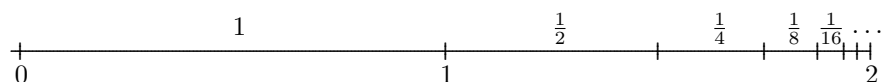
Capitolo 1

Richiami sulle serie

1.1 Serie numeriche

Il concetto di serie numerica serve a formalizzare e a dare senso, quando possibile, alla locuzione: somma di infiniti numeri.

In certi casi questa ha un significato intuitivo evidente:



Ogni segmento copre metà di quel che resta, dopo la somma dei segmenti precedenti, per arrivare a coprire l'intervallo $(0, 2)$:

Sciveremo allora:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$$

Più in generale diamo la seguente:

Definizione 1 Se $\{a_n\}$ è una successione di numeri reali (o complessi) da sommare, costruiamo la seguente successione ausiliaria, detta successione delle somme parziali:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0, \\ s_1 &= a_0 + a_1, \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2, \\ &\dots \\ s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ &\dots \end{aligned}$$

Diremo che la serie degli a_n converge, diverge o è irregolare rispettivamente se converge, diverge o è irregolare la successione degli s_n . In particolare se questa converge a un limite s , questo è detto somma della serie. Quindi:

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{equivale a} \quad s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

Esempio 2 Serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \forall q: \quad -1 < q < +1$$

(Che per $q = \frac{1}{2}$ dà l'esempio iniziale) Infatti:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & q \neq 1 \\ s_n &= 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n + 1 & q = 1 \end{aligned}$$

quindi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{1}{1-q} \quad \text{se} \quad |q| < 1$$

mentre il limite non esiste o è infinito per $|q| \geq 1$.

Condizione necessaria affinché $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converga è che la successione del termine generale $\{a_n\}$ abbia limite zero.

La condizione non è però sufficiente, come mostra il seguente:

Esempio 3 Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{diverge anche se} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Scriviamo infatti i primi termini della serie opportunamente associati:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Il contenuto di ogni coppia di parentesi è maggiore di $\frac{1}{2}$ (per esempio la terza contiene 4 addendi, ciascuno maggiore o uguale a $\frac{1}{8}$, che è il più piccolo dei quattro).

Ragionando su questo schema si ricava

$$s_2 \geq \frac{1}{2}, \quad s_4 \geq 2 \cdot \frac{1}{2}, \quad s_8 \geq 3 \cdot \frac{1}{2}, \quad s_{16} \geq 4 \cdot \frac{1}{2} \quad \dots \quad s_{2^k} \geq \frac{k}{2}$$

quindi la sottosuccessione $s_{2^k} \rightarrow +\infty$ ed essendo s_n monotona crescente, anch'essa tende all'infinito e quindi la serie data diverge.

1.2 Criteri di convergenza

Non esiste una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di una serie che sia di utilità pratica e si adatti a qualunque caso. Esistono però alcuni criteri semplici, utili in condizioni particolari.

1.2.1 Serie a termini positivi

Solo per $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, con $a_n > 0$ $b_n > 0 \quad \forall n$, valgono i seguenti criteri:

Criterio del confronto Sia $0 < a_n \leq b_n \quad \forall n$.

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge;

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge.

Criterio dell'asintotico Sia $a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow +\infty$. Allora le due serie hanno lo stesso carattere (cioè o convergono entrambi o divergono entrambi).

Criterio della radice Se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$

Se $\lambda < 1$ la serie converge

Se $\lambda > 1$ la serie diverge

Se $\lambda = 1$ il criterio non dà nessuna informazione.

Criterio del rapporto Se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$

valgono le stesse conclusioni del criterio precedente.

Esempio 4

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge e $\frac{1}{n} < \frac{1}{n - \sqrt{n}}$. Allora anche $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n - \sqrt{n}}$ diverge.

Esempio 5

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge e $\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$. Allora anche $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$ diverge.

Esempio 6 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^n}$ converge per il criterio della radice. Infatti:

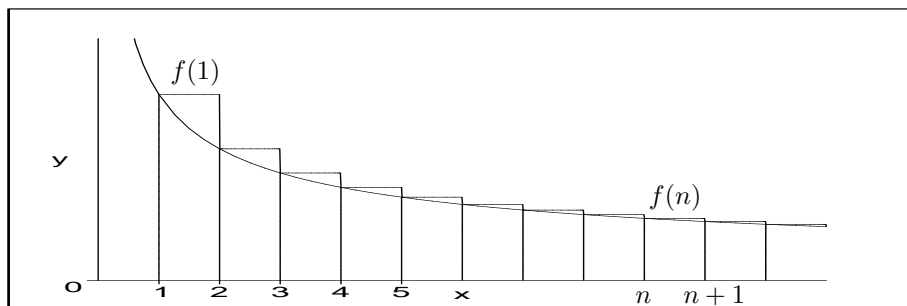
$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \frac{2}{n} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Esempio 7 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$ converge per il criterio del rapporto. Infatti:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Criterio del confronto con un integrale improprio

Sia $f(x)$ continua e monotona decrescente su $[1, +\infty)$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ ha lo stesso carattere (convergente o divergente) di $\int_1^{+\infty} f(x) dx$



Giustificazione intuitiva. I termini della serie danno le altezze dei rettangolini in figura, ma esse sono uguali alle loro aree, perché le basi sono tutte unitarie. La serie dà perciò il valore dell'area della regione a gradini che sarà finita (serie convergente) o infinita (serie divergente) a seconda che lo sia l'area della regione sottesa al grafico di $f(x)$, cioè a seconda che sia convergente o divergente l'integrale improprio.

Esempio 8 La funzione $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ha le proprietà richieste (per $\alpha > 0$).

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} [\log x]_1^{+\infty} = +\infty & \text{per } \alpha = 1 \text{ (diverge)} \\ \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_1^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{per } \alpha < 1 \text{ (diverge)} \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{per } \alpha > 1 \text{ (converge)} \end{cases} \end{cases}$$

Applicando il criterio di confronto serie-integrale ricaviamo che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{diverge (è il caso } \alpha = 1), \text{ e più in generale:}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{converge se e solo se } \alpha > 1$$

Esempio 9 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverge. Infatti:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x} dx = [\log \log x]_2^{+\infty} = +\infty$$

1.2.2 Serie a termini non di segno costante

Per serie a termini di segno qualsiasi diciamo che:

La $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **converge assolutamente** se converge $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ (la serie dei valori assoluti dei termini della serie di partenza). Vale il:

Criterio della convergenza assoluta. Se una serie converge assolutamente allora converge anche in senso ordinario, in formule:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \text{ convergente} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ convergente}$$

Non è vero il viceversa

Esempio 10 Consideriamo la serie:

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \frac{1}{49} - \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \dots$$

La serie dei moduli è semplicemente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ che converge perché del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha > 1$ (vedi criterio del confronto con un integrale improprio). Quindi la serie di partenza converge assolutamente (per definizione) e quindi anche in senso ordinario (per il criterio della convergenza assoluta).

Esempio 11 La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ converge per un criterio che enunciamo qui

di seguito, ma la sua serie dei moduli è $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ che sappiamo essere divergente.

Quindi la convergenza in senso ordinario non implica quella assoluta.

Criterio di Leibnitz per serie a termini di segno alternato

Data una serie del tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \quad \text{con } a_n > 0 \quad \forall n$$

se $a_n \rightarrow 0^+$ monotonamente, allora la serie converge. Inoltre la differenza fra la somma parziale n -esima e quella totale è inferiore in modulo ad a_{n+1} .

Esempio 12 $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$ è convergente per questo criterio. Vedremo come conseguenza delle formule di Taylor che la sua somma è $\frac{1}{e}$. Allora, sempre per questo criterio,

$$\left| s_5 - \frac{1}{e} \right| < \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$$

essendo $s_5 = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} = \frac{11}{30} = 0.3\bar{6}$

1.3 Serie di funzioni

Se il termine generale di una serie dipende da una variabile $t \in \mathbb{R}$ (o $t \in \mathbb{C}$) (oltre che dall'indice intero n), allora si parla di serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)$$

Si assume che le funzioni $a_n(t)$ abbiano tutte un dominio comune \mathcal{D} .

L'insieme \mathcal{S} dei valori $t \in \mathcal{D}$ tali che la serie di numeri $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)$ è convergente con somma $s(t)$ dicesi **insieme di convergenza** della serie (e può anche essere vuoto o comunque essere contenuto propriamente in \mathcal{D}). Esso è l'insieme di definizione della funzione somma della serie:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t) \quad \forall t \in \mathcal{S}$$

Esempio 13 *Serie geometrica (vedi primo paragrafo del capitolo, dove abbiamo usato la lettera q invece di t per indicare la variabile indipendente):*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \quad \forall t: \quad -1 < t < +1$$

I termini della serie sono le funzioni t^n sempre definite, quindi il dominio \mathcal{D} è uguale a tutto \mathbb{R} (o \mathbb{C}), mentre l'insieme di convergenza \mathcal{S} è l'intervallo $(-1,1)$ (o il disco aperto di centro nell'origine e raggio 1 se pensiamo a t complessi).

In generale NON è vero che:

- \mathcal{S} sia un intervallo,
- $s(t)$ sia continua se ogni $a_n(t)$ è continua,
- $s(t)$ sia derivabile se ogni $a_n(t)$ è derivabile,
- che la derivata della somma (quando esiste) sia la serie delle derivate,
- lo stesso per integrali indefiniti o definiti.

Nell'esempio qui sopra queste cose sono vere, ma si tratta di un caso particolare, nel quale le funzioni da sommare sono potenze a esponente intero della variabile t . Più in generale, nel caso:

$$a_n(t) = a_n \cdot (t - t_0)^n \quad a_n \text{ costanti}$$

si parla di **serie di potenze**¹, e le proprietà, appena negate nel caso generale, tornano a valere per questo importante tipo di serie.

¹Si noti il diverso significato delle $()$: a sinistra del segno di $=$ denotano dipendenza della funzione a_n da t , a destra definiscono questa dipendenza racchiudendo un fattore da moltiplicare per la costante a_n

1.4 Serie di potenze

Come anticipato nel paragrafo precedente una serie di funzioni del tipo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (t - t_0)^n$$

dicesi serie di potenze. Il punto t_0 dicesi centro della serie.

Senza perdere di generalità ci limiteremo spesso al caso $t_0 = 0$: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. L'ambiente più naturale per studiare le serie di potenze è il campo complesso, ma ci limiteremo al caso $t, t_0, a_n \in \mathbb{R}$.

Enunciamo senza dimostrazione le seguenti proprietà :

- L'insieme di convergenza di una s.d.p. o si riduce al punto t_0 , oppure è tutta la retta reale, oppure è un intervallo del tipo:

$$I = (t_0 - r, t_0 + r)$$

per un certo $r > 0$. I dicesi intervallo di convergenza e r raggio di convergenza. Per esempio, l'insieme di convergenza non può essere l'unione di due intervalli disgiunti, come può capitare per il dominio di una funzione qualsiasi.

- Nei punti estremi $t_0 \pm r$ di I la serie può convergere o divergere (nulla si può dire in generale)

- Una s.d.p. converge non solo in senso ordinario, ma anche assolutamente su tutto il suo intervallo di convergenza I (ricordiamo che ciò non è vero in generale nemmeno per serie numeriche)

- Un s.d.p. diverge (in senso ordinario e assolutamente) fuori della chiusura di I , cioè fuori di $[t_0 - r, t_0 + r]$

Esempio 14 $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ converge su $(-1, 1)$, ma non nei punti ± 1

Esempio 15 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} t^n$ converge su $[-1, +1)$ (in $t = -1$ converge per il criterio di Leibnitz, in $t = 1$ diverge perché è la serie armonica)

Esempio 16 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} t^n$ converge su $[-1, +1]$ (in $t = 1$ lo abbiamo visto mediante confronto con un integrale improprio; di conseguenza in $t = -1$ converge assolutamente e quindi anche in senso ordinario)

Esempio 17 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n$ converge $\forall t \in \mathbb{R}$ alla somma e^t (quindi $r = +\infty$)

Esempio 18 $\sum_{n=0}^{+\infty} n! t^n$ diverge ovunque, salvo che per $t = 0$.

Nei primi tre esempi abbiamo discusso la convergenza nei punti estremi dell'intervallo I . Per determinare I servirsi del criterio del rapporto.

1.4.1 Funzioni analitiche

La funzione somma di una serie di potenze convergente su un certo intervallo dicesi **funzione analitica** o **rappresentabile in serie di potenze**.

Sia dunque $s(t)$ una tale funzione:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (t - t_0)^n \quad \forall t \in (t_0 - r, t_0 + r), \quad r > 0$$

Enunciamo senza dimostrazione i seguenti teoremi:

Teorema 19 (*Integrabilità termine a termine*)

Una $s(t)$ analitica è continua sul suo insieme di definizione I e, $\forall x \in I$:

$$\int_{t_0}^x s(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{t_0}^x a_n \cdot (t - t_0)^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - t_0)^{n+1}$$

In parole: l'integrale definito di $s(t)$ su ogni intervallo chiuso strettamente contenuto in I è la serie degli integrali dei singoli termini, e, come conseguenza: una primitiva della serie è (a meno di una costante) la serie di primitive.

Teorema 20 (*Derivabilità termine a termine*)

Una $s(t)$ analitica è derivabile sul suo insieme di definizione I e, $\forall t \in I$:

$$s'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \cdot (t - t_0)^{n-1}$$

la derivata della serie è la serie delle derivate.

Notiamo esplicitamente che il raggio di convergenza si mantiene sia per la serie delle primitive che per quella delle derivate.

Esempio 21 *Dallo studio della serie geometrica sappiamo che:*

$$\forall t \in (-1, 1) \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$$

Sostituendo t con $-t$:

$$\forall t \in (-1, 1) \quad \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$$

Integrando termine a termine:

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Che ci dà una espressione in serie di potenze di $\log(1+x)$ valida per $x \in (-1, 1)$.

1.4.2 Serie di Taylor e funzioni analitiche

Se $s(t)$ è una funzione analitica, cioè se:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (t - t_0)^n \quad \forall t \in (t_0 - r, t_0 + r), \quad r > 0$$

derivando successivamente e valutando le derivate in t_0 :

$$\begin{aligned} s'(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \cdot (t - t_0)^{n-1} & s'(t_0) &= a_1 \\ s''(t) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n \cdot (t - t_0)^{n-2} & s''(t_0) &= 2a_2 \\ s'''(t) &= \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2) a_n \cdot (t - t_0)^{n-3} & s'''(t_0) &= 3 \cdot 2a_3 \\ \dots & \dots & & \\ s^{(k)}(t) &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n \cdot (t - t_0)^{n-k} & s^{(k)}(t_0) &= k! a_k \end{aligned}$$

Infatti, valutando quest'ultima serie per $t = t_0$, solo il primo termine (quello per $n = k$) è diverso da zero e uguale a:

$$k(k-1) \dots (k-k+1) a_k (t - t_0)^{k-k} = k! a_k$$

mentre quelli per $n > k$ contengono il fattore $(t - t_0)^{n-k}$ che si annulla per $t = t_0$, e perciò si annullano anch'essi.

Quindi la funzione analitica $s(t)$ si può riscrivere come:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^{(n)}(t_0)}{n!} \cdot (t - t_0)^n = s(t_0) + s'(t_0)(t - t_0) + \frac{s''(t_0)}{2!} (t - t_0)^2 + \dots$$

(per convenzione $s^{(0)}(t) = s(t)$ e $0! = 1$, quindi $\frac{s^{(0)}(t_0)}{0!} = \frac{s(t_0)}{1} = a_0$)

In base a quanto visto possiamo concludere che una funzione analitica è sviluppabile in serie di Taylor con centro in $t = t_0$ e il suo sviluppo in serie di potenze coincide con quello in serie di Taylor e quindi è unico.

Osservazione 22 *Non è vero in generale, anche se capita spesso, che una funzione $f(t)$ derivabile infinite volte in un punto t_0 sia sviluppabile in serie di Taylor (e quindi di potenze) con centro in t_0 e raggio di convergenza $r > 0$.*

Per esempio si può dimostrare che la funzione

$$f(t) = \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{per } t \neq 0, \quad f(0) = 0$$

ha derivate di ogni ordine tutte nulle in $t = 0$, e quindi la sua serie di Taylor ha termini tutti nulli e converge alla funzione identicamente nulla, che coincide con la f data solo per $t = 0$.

1.4.3 Sviluppabilità in serie di Taylor

Se una funzione $f(t)$ ha derivate di ogni ordine in $t = t_0$, vale la formula di Taylor:

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k + E_n(t)$$

Le sommatorie che compaiono nella formula non sono altro che i polinomi di Taylor della funzione, nonché somme parziali n -esima della sua serie di Taylor.

La funzione è sviluppabile in serie di Taylor **se e solo se** le somme parziali n -esime convergono, per $n \rightarrow +\infty$, e convergono proprio alla funzione stessa². Questo avrà luogo **se e solo se** $E_n(t) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, $\forall t \in (t_0 - r, t_0 + r)$

Ricordiamo che con varie maggiorazioni del resto, scritto, per esempio, nella forma di Lagrange, si riesce a dimostrare la convergenza a zero del resto stesso, e quindi la sviluppabilità in serie, per le funzioni elementari. Per esempio:

$$e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots$$

$$\sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$$

$$\cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots$$

Questi sviluppi in serie convergono per $\forall t \in \mathbb{R}$.

In altri casi certe funzioni sono sviluppabili in serie, con centro in un dato punto, e lo sviluppo converge solo in un intervallo strettamente contenuto nell'insieme di definizione della funzione.

Per esempio i seguenti sviluppi sono validi solo per $t \in (-1, 1)$:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \dots + t^n + \dots$$

$$\log(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^7}{7} + \dots$$

$$\arctan t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots$$

Se le funzioni elementari sono esprimibili in serie di potenze, ricordiamo tuttavia che non tutte le funzioni esprimibili in serie di potenze sono elementari o esprimibili in termini finiti tramite queste. La considerazione delle funzioni analitiche allarga quindi la classe di funzioni a nostra disposizione.

² (ciò che NON capita nella funzione vista nell'osservazione alla pagina precedente dove le somme parziali sono nulle e convergono alla funzione nulla)

1.4.4 Operazioni con le serie di potenze

Per serie numeriche **convergenti** si dimostra facilmente che:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) \qquad c \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c a_n$$

Cioè la somma di due serie (convergenti) è la serie delle somme e vale la distributività del prodotto di una costante per una serie. Queste considerazioni si estendono facilmente alle serie di potenze.

Per il prodotto di due serie le cose sono più complicate; la relazione:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cdot b_n) \quad \text{è FALSA}$$

(anche per somme finite).

Senza discutere il concetto di serie prodotto, diciamo solo che la serie di potenze che dà la funzione prodotto di due funzioni a loro volta espresse da serie, si calcola semplicemente trattando le serie come se fossero polinomi (di grado infinito). Vediamo questo procedimento su un:

Esempio 23 Abbiamo già visto che:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \dots + t^n + \dots \qquad \forall t \in (-1, 1)$$

Allora:

$$\frac{e^t}{1-t} = \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right) (1 + t + t^2 + t^3 + \dots) \qquad \forall t \in (-1, 1)$$

Come se le somme fossero di un numero finito di termini, si devono fare tutti i prodotti di ogni termine della prima parentesi per ogni termine della seconda. Quindi già il primo termine della prima parentesi dà luogo a infiniti prodotti e non si arriverebbe mai a considerare il secondo termine. Per ovviare a questo inconveniente consideriamo prima tutti i prodotti (di un termine della prima per uno della seconda) che danno un risultato di grado zero (cioè contribuiscono al termine noto). Poi consideriamo tutti i prodotti che danno un risultato di grado uno in t , poi tutti quelli che danno un risultato di grado 2 etc. Otteniamo:

$$\begin{aligned} & 1 + (t+t) + \left(t^2 + t^2 + \frac{t^2}{2!} \right) + \left(t^3 + t^3 + \frac{t^3}{2!} + \frac{t^3}{3!} \right) + \dots = \\ & = 1 + 2t + \left(2 + \frac{1}{2} \right) t^2 + \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) t^3 + \dots \end{aligned}$$

E riassumendo:

$$\frac{e^t}{1-t} = 1 + 2t + \frac{5}{2} t^2 + \frac{8}{3} t^3 + \dots \qquad \forall t \in (-1, 1)$$

Si noti che ci si può aspettare che lo sviluppo ottenuto converga solo nell'intersezione dei due intervalli di convergenza delle serie moltiplicate.

Capitolo 2

Equazioni differenziali ordinarie

2.1 Equazioni lineari del secondo ordine

Riassumiamo qui le cose note dal corso di Istituzioni di Matematiche per le lauree triennali, a proposito delle soluzioni di una equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t) \quad a, b, f \in \mathcal{C}(I) \quad (2.1)$$

Per maggiori dettagli si veda la dispensa "Wronskiano".

L'integrale generale è della forma:

$$y(t, k_1, k_2) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) + \bar{y}(t) \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C} \quad (2.2)$$

dove

$y_1(t), y_2(t)$ sono soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea associata

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \quad (2.3)$$

$\bar{y}(t)$ è una soluzione particolare della equazione di partenza (non omogenea)

linearmente indipendenti significa che il rapporto delle due soluzioni in questione non è una costante.

Si dimostra che l'indipendenza di due soluzioni dell'omogenea equivale all'essere sempre diverso da zero del loro determinante Wronskiano:

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall t \in I$$

(e a ciò basta che il Wronskiano non si annulli in un punto $t_0 \in I$).

Infine il teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy afferma che, fissati comunque due numeri reali u, v e un valore $t_0 \in I$, esiste una e una sola soluzione della (2.1) che soddisfa la condizione iniziale:

$$\begin{cases} y(t_0) = u \\ y'(t_0) = v \end{cases}$$

e tale soluzione è definita su tutto l'intervallo I .

(Si noti che nella (2.1) il coefficiente di $y''(t)$ è uguale a uno)

In base a quanto detto sul Wronskiano, per ottenere due soluzioni indipendenti dell'omogenea, basterà che lo siano le loro condizioni iniziali, intese come vettori di \mathbb{R}^2 ; per esempio basterà scegliere:

$$\begin{cases} y_1(t_0) = 1 \\ y_1'(t_0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2(t_0) = 0 \\ y_2'(t_0) = 1 \end{cases}$$

Si noti che abbiamo enunciato il teorema di esistenza e unicità dopo quello sulla forma dell'integrale generale; in realtà nello sviluppo della teoria quest'ultimo è basato proprio su quello.

Nel caso di una equazione (2.1) a coefficienti a, b costanti è facile trovare due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata cercandole sotto forma di esponenziali (anche complessi). Rinviamo ai corsi di primo livello per questa tecnica che basta per studiare casi importanti come quello delle oscillazioni semplici e forzate e il fenomeno della risonanza.

Se però i coefficienti $a(t), b(t)$ sono funzioni non costanti non esiste un metodo generale per trovare tali soluzioni.

Dedicheremo il resto di questo capitolo allo studio di alcuni casi nei quali si riesce, con diverse tecniche, fra le quali il cambiamento di variabile o l'integrazione per serie, a trovare due soluzioni indipendenti dell'equazione lineare omogenea. Ulteriori esempi saranno esaminati nel capitolo successivo, dove i risultati di questo saranno applicati ad alcune equazioni differenziali alle derivate parziali.

2.2 Ricerca di una soluzione indipendente da un'altra

Se dell'equazione

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \quad (2.3)$$

è nota una soluzione $y_1(t)$, se ne può ricavare un'altra $y_2(t)$, indipendente dalla precedente, cercandola della forma:

$$y_2(t) = k(t)y_1(t)$$

dove $k(t)$ è una funzione incognita da trovarsi (variazione delle costanti). Si noti che con un k costante si avrebbe una seconda soluzione NON indipendente dalla prima. Tralasciando di scrivere la variabile t per brevità, avremo:

$$\begin{aligned} y_2 &= k y_1 \\ y_2' &= k' y_1 + k y_1' \\ y_2'' &= k'' y_1 + 2 k' y_1' + k y_1'' \end{aligned}$$

imponendo che y_2 soddisfi la (2.3) otteniamo:

$$(k'' y_1 + 2 k' y_1' + k y_1'') + a(k' y_1 + k y_1') + (b k y_1) = 0$$

La somma dei tre termini sottolineati (fra i quali si raccoglie k ; da moltiplicare per a il secondo) è zero perché y_1 è soluzione della (2.3). Resta l'equazione:

$$k'' y_1 + k' (2y_1' + a y_1) = 0$$

che è del primo ordine a variabili separabili, nell'incognita $h(t) = k'(t)$:

$$h'(t) y_1(t) + h(t) (2y_1'(t) + a(t) y_1(t)) = 0$$

Separando le variabili e integrando:

$$\int \frac{dh}{h} = - \int \frac{2y_1'(t) + a(t) y_1(t)}{y_1(t)} dt$$

$$\log h(t) = - \log[y_1(t)]^2 - \int a(t) dt$$

$$k'(t) = h(t) = \exp\left(-\log[y_1(t)]^2 - \int a(t) dt\right) = \frac{\exp\left(-\int a(t) dt\right)}{[y_1(t)]^2}$$

Passando a una primitiva ricaviamo $k(t)$.

Concludendo, la seconda soluzione, indipendente dalla prima, è :

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{\exp\left(-\int a(t) dt\right)}{[y_1(t)]^2} dt$$

Il rapporto delle due soluzioni è quest'ultima primitiva che non può essere costante essendo l'integrando diverso da zero. Quindi le due soluzioni sono effettivamente indipendenti.

2.3 L'equazione di Eulero

Consideriamo un primo caso di equazione a coefficienti non costanti (Eulero):

$$t^2 y'' + a t y' + b y = 0 \quad a, b \text{ costanti} \quad (2.4)$$

Per $t \neq 0$ equivale a

$$y'' + \frac{a}{t} y' + \frac{b}{t^2} y = 0 \quad (2.5)$$

In un intorno del punto $t = 0$ non si può invocare il teorema di esistenza e unicità della soluzione con condizioni iniziali $y(0) = u$, $y'(0) = v$ con u e v qualsiasi, perché i coefficienti $\frac{a}{t}$ e $\frac{b}{t^2}$ non sono continui proprio nel punto iniziale $t = 0$. Per alcune scelte di u e v potrebbero esserci soluzioni (anche non uniche) e per altre no.

Scelto per semplicità l'intervallo $I = (0, +\infty)$, su cui i coefficienti sono continui, cerchiamo soluzioni su I sotto forma di potenze t^α :

$$y(t) = t^\alpha \quad y' = \alpha t^{\alpha-1} \quad y'' = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$$

Sostituendo nella (2.4):

$$t^2 \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} + a t \alpha t^{\alpha-1} + b t^\alpha = 0$$

semplificando per t^α che è diverso da zero per $t \neq 0$

$$\alpha(\alpha-1) + a\alpha + b = 0 \quad \text{cioé} \quad \alpha^2 + (a-1)\alpha + b = 0 \quad (2.6)$$

che è la cosiddetta **equazione indiciale**.

1^o caso: se α_1 e α_2 sono radici reali e distinte, allora l'integrale generale è :

$$y(t, k_1, k_2) = k_1 t^{\alpha_1} + k_2 t^{\alpha_2}$$

2^o caso: esistono due radici complesse coniugate (vedi esempio seguente)

3^o caso: esiste una radice doppia $\bar{\alpha} = \frac{1-a}{2}$. Allora $y_1(t) = t^{\bar{\alpha}}$ è una prima soluzione. Una seconda soluzione indipendente può essere ricavata col metodo esposto nel paragrafo precedente:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= y_1(t) \int \frac{\exp\left(-\int a(t) dt\right)}{[y_1(t)]^2} dt = t^{\frac{1-a}{2}} \int \frac{\exp\left(-\int \frac{a}{t} dt\right)}{t^{1-a}} dt = \\ &= t^{\frac{1-a}{2}} \int \frac{1}{t^{1-a+a}} dt = t^{\frac{1-a}{2}} \log t \end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$y(t, k_1, k_2) = k_1 t^{\frac{1-a}{2}} + k_2 t^{\frac{1-a}{2}} \log t = t^{\frac{1-a}{2}} (k_1 + k_2 \log t)$$

Esempio 24

$$t^2 y'' + 3t y' + b y = 0$$

L'equazione indiciale è :

$$\alpha^2 + 2\alpha + b = 0$$

1^o caso: $b = -8$

$$\alpha^2 + 2\alpha - 8 = 0 \quad \alpha_{1,2} = -1 \pm \sqrt{9}$$

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = -4 \quad y(t, k_1, k_2) = k_1 t^2 + k_2 t^{-4}$$

Si nota che esistono infinite soluzioni (quelle per $k_2 = 0, \forall k_1$) definite anche per $t = 0$, soddisfacenti la condizione iniziale $y(0) = 0, y'(0) = 0$, mentre non esiste nessuna soluzione soddisfacente la condizione $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

2^o caso: $b = 5$

$$\alpha^2 + 2\alpha + 5 = 0 \quad \alpha_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2i$$

$$\begin{aligned} y(t, k_1, k_2) &= k_1 t^{-1+2i} + k_2 t^{-1-2i} = \frac{1}{t} [k_1 t^{2i} + k_2 t^{-2i}] = \\ &= \frac{1}{t} [k_1 e^{2i \log t} + k_2 e^{-2i \log t}] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{t} [k_1 (\cos(2 \log t) + i \sin(2 \log t)) + k_2 (\cos(2 \log t) - i \sin(2 \log t))]$$

Scegliendo $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$ otteniamo la soluzione $y_1(t) = \frac{1}{t} \cos(2 \log t)$, mentre con $k_1 = \frac{1}{2i} = -k_2$ otteniamo la soluzione $y_2(t) = \frac{1}{t} \sin(2 \log t)$; abbiamo così un'altra coppia di soluzioni indipendenti, mediante le quali otteniamo una rappresentazione reale dell'integrale generale:

$$y(t, c_1, c_2) = \frac{1}{t} (c_1 \cos(2 \log t) + c_2 \sin(2 \log t))$$

Si noti che l'espressione complessa e quella reale dell'integrale generale sono equivalenti, entrambi contengono sia le soluzioni reali che quelle complesse, ottenibili per opportuni valori di k_1 e k_2 nel primo caso, di c_1 e c_2 nel secondo.

3^o caso: $b = 1$

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \quad \alpha = -1$$

la radice è doppia, quindi l'integrale generale è :

$$y(t, k_1, k_2) = \frac{1}{t} (k_1 + k_2 \log t)$$

2.4 Caso dei coefficienti analitici

Esaminiamo ora il caso in cui l'equazione

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \quad (2.3)$$

abbia i coefficienti $a(t)$ e $b(t)$ analitici, cioè rappresentabili come serie di potenze su un certo intervallo $(t_0 - r, t_0 + r)$, dove t_0 ed r sono detti rispettivamente centro e raggio di convergenza:

$$a(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (t - t_0)^n \quad b(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (t - t_0)^n \quad (2.7)$$

Se $t_0 = 0$:

$$a(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad b(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n \quad (2.8)$$

Attenzione: I coefficienti che supponiamo analitici sono quelli di y' e y , dopo che l'eventuale coefficiente di y'' è stato ridotto a uno; quindi, per esempio, nell'equazione di Eulero i coefficienti $\frac{a}{t}$ e $\frac{b}{t^2}$ NON sono analitici con centro in $t_0 = 0$!

Teorema 25 *Se i coefficienti $a(t)$ e $b(t)$ sono funzioni analitiche su di un intervallo $(t_0 - r, t_0 + r)$, allora l'equazione omogenea (2.3) ha due soluzioni indipendenti $y_1(t)$ e $y_2(t)$ analitiche sullo stesso intervallo*

Dim. (Cenno, per semplicità con $t_0 = 0$)

Si cercano soluzioni analitiche con coefficienti c_n da determinarsi:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$$

Per la derivabilità termine a termine delle serie di potenze:

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n c_n t^{n-1} \quad y''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) c_n t^{n-2}$$

Si sostituiscono gli sviluppi in serie di $y(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$, $a(t)$ e $b(t)$ nella (2.3) e si cercano le relazioni che i coefficienti incogniti c_n devono rispettare affinché l'equazione sia soddisfatta. In pratica si agisce come se avessimo a che fare con polinomi (di grado infinito) e applicassimo il principio di identità dei polinomi.¹

Le relazioni trovate fra i c_n permettono di determinarne il valore a partire da quelli, scelti arbitrariamente, di c_0 e c_1 (che rappresentano i valori iniziali $y(0)$ e $y'(0)$ della soluzione). Scegliendo due condizioni iniziali indipendenti, otteniamo due soluzioni $y_1(t)$ e $y_2(t)$ indipendenti. ■

Osserviamo che la traccia della dimostrazione è di fatto anche la traccia del metodo per calcolare le soluzioni, come vedremo su esempi.

¹Due polinomi sono uguali sse i coefficienti dei termini di ugual grado sono uguali

Esempio 26

$$y'' - ty = 0$$

I coefficienti $a(t) = 0 \quad \forall t$ e $b(t) = -t$ sono banalmente analitici su tutto \mathbb{R}

$$\begin{aligned} y(t) &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + \dots + c_n t^n + \dots \\ y'(t) &= c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + \dots + (n+1)c_{n+1} t^n + \dots \\ y''(t) &= 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 t + 4 \cdot 3c_4 t^2 + 5 \cdot 4c_5 t^3 + \dots + (n+2)(n+1)c_{n+2} t^n + \dots \\ -ty(t) &= -c_0 t - c_1 t^2 - c_2 t^3 - \dots - c_{n-1} t^n - \dots \end{aligned}$$

Sommando membro a membro² le ultime due equazioni:

$$y'' - ty = 2c_2 + (3 \cdot 2c_3 - c_0)t + (4 \cdot 3c_4 - c_1)t^2 + \dots + [(n+2)(n+1)c_{n+2} - c_{n-1}]t^n + \dots$$

Affinché la somma della serie sia zero, tutti i coefficienti devono essere nulli:

$$c_2 = 0 \quad 3 \cdot 2c_3 - c_0 = 0 \quad 4 \cdot 3c_4 - c_1 = 0 \quad \dots \quad c_{n+2} = \frac{c_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \quad \dots$$

Scegliendo $c_0 = 1$ e $c_1 = 0$ (condizione iniziale), e avendo $c_2 = 0$ si ricava:

$$c_3 = \frac{c_0}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3 \cdot 2} \quad c_4 = \frac{c_1}{4 \cdot 3} = 0 \quad c_5 = \frac{c_2}{5 \cdot 4} = 0$$

$$c_6 = \frac{c_3}{6 \cdot 5} = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} \quad c_7 = 0 \quad c_8 = 0 \quad \dots$$

e, generalizzando, $c_n = 0$ se n non è multiplo di 3, mentre se $n = 3k$:

$$c_{3k} = \frac{1}{3k(3k-1)[3(k-1)(3k-4)] \dots 3 \cdot 2}$$

Quindi:

$$y_1(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3k(3k-1)[3(k-1)(3k-4)] \dots 3 \cdot 2} t^{3k}$$

Scegliendo $c_0 = 0$ e $c_1 = 1$ (condizione iniziale indipendente dalla precedente), e avendo sempre $c_2 = 0$, con calcoli analoghi si ottiene:

$$y_2(t) = t + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(3k+1)3k[(3k-2)3(k-1)] \dots 4 \cdot 3} t^{3k+1}$$

Il Teorema 5 ci assicura che le due serie di potenze trovate hanno lo stesso intervallo di convergenza dei coefficienti (che è tutto l'asse reale).

L'integrale generale della equazione omogenea data è perciò :

$$y(t, c_1, c_2) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

²vedi osservazioni alla pagina seguente

Osservazione 27 I primi passaggi della pagina precedente possono essere scritti equivalentemente, con notazioni più compatte:

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k \quad -t y = \sum_{k=0}^{+\infty} -c_k t^{k+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} -c_{n-1} t^n$$

$$y'' = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k t^{k-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} t^n = 2c_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} t^n$$

sommando termine a termine le ultime serie delle due righe precedenti:

$$y'' - t y = 2c_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} [(n+2)(n+1) c_{n+2} - c_{n-1}] t^n$$

Osservazione 28 Sommare termine a termine due serie, come abbiamo appena fatto sopra, significa porre:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$$

Questo vale per serie convergenti, altrimenti può non avere senso. Per esempio:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n &= +1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ \sum_{n=1}^{+\infty} b_n &= -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \end{aligned}$$

sono due serie irregolari, avendo entrambi la successione delle somme parziali oscillante, mentre la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots$$

è evidentemente convergente con somma zero.

Osservazione 29 L'esempio della pagina precedente è abbastanza semplice in quanto i coefficienti dell'equazione sono addirittura monomi (serie di potenze con un termine solo!). Se essi fossero serie vere e proprie occorrerebbe sviluppare prodotti di serie.

L'esempio mostra tuttavia che anche con coefficienti molto semplici (ma non costanti) le soluzioni possono essere esprimibili solo come somma di un numero infinito di termini.

Quando i coefficienti dell'equazione omogenea (dopo aver normalizzato a uno quello di y'') non sono analitici in un intorno di un punto t_0 , allora non si può sapere a priori se esisteranno soluzioni analitiche con centro in t_0 oppure no.

Esempio 30

$$t^2 y'' - y' - \alpha y = 0 \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

non ha coefficienti analitici con centro in $t_0 = 0$; infatti, normalizzando:

$$y'' - \frac{1}{t^2} y' - \frac{\alpha}{t^2} y = 0$$

Non siamo neanche nel caso di Eulero, essendo il coefficiente di y' un infinito del secondo ordine invece che del primo. Cerchiamo comunque soluzioni analitiche e scopriremo che per certi valori del parametro α esistono e sono addirittura polinomiali, mentre per gli altri valori non ne esistono. Posto:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n \quad y'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n c_n t^{n-1} \quad y''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) c_n t^{n-2}$$

sostituendo nell'equazione:

$$t^2 y'' - y' - \alpha y = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) c_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n c_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha c_n t^n = 0$$

La seconda serie, avendo il termine per $n = 0$ nullo, è riscrivibile come:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) c_{n+1} t^n$$

E sommando le serie termine a termine:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [n(n-1) c_n - (n+1) c_{n+1} - \alpha c_n] t^n = 0$$

Annullando tutti i coefficienti si trova la legge di ricorrenza:

$$c_{n+1} = \frac{n(n-1) - \alpha}{n+1} c_n \quad c_0 \text{ arbitrario} \quad (2.9)$$

Se $\alpha = N(N-1)$ per qualche intero positivo N , allora $c_{N+1} = 0$ e quindi anche tutti i coefficienti successivi sono nulli, e la serie si riduce a un polinomio.

Se α non è il prodotto di due interi consecutivi, il numeratore della (2.9) non è mai zero e quindi, scegliendo $c_0 \neq 0$, tutti i c_n sono diversi da zero.

La serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$ però non converge per nessun $t \neq 0$. Infatti, applicando il criterio del rapporto (per $t > 0$):

$$\frac{c_{n+1} t^{n+1}}{c_n t^n} = \frac{n^2 - n - \alpha}{n+1} t \rightarrow +\infty \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Se la serie non converge per $t > 0$, essendo una serie di potenze non può convergere neanche per $t < 0$, quindi per tali α la serie ha raggio di convergenza zero e non definisce nessuna soluzione analitica in un intorno di $t_0 = 0$.

2.5 L'equazione di Bessel

Un caso che mescola la tipologia dell'equazione di Eulero con quella dei coefficienti analitici è :

$$t^2 y'' + a(t) t y' + b(t) y = 0$$

con $a(t)$ e $b(t)$ analitiche con centro in $t_0 = 0$. Equivalentemente, per $t \neq 0$:

$$y'' + \frac{a(t)}{t} y' + \frac{b(t)}{t^2} y = 0$$

Per a e b costanti si ritrova l'equazione di Eulero. C'è un importante (e complicato) teorema³ dedicato a questo tipo di equazioni. Senza entrare nei dettagli diciamo solo che si comincia cercando soluzioni della forma:

$$y(t) = t^s \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n \quad s \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad c_0 \neq 0$$

cioè prodotto di una (possibile) soluzione di una equazione di Eulero per una (possibile) soluzione di una equazione a coefficienti analitici.

Non esamineremo il caso generale, ma solo quello particolare, ma importantissimo, della equazione di Bessel:

$$t^2 y'' + t y' + (t^2 - \nu^2) y = 0 \quad (2.10)$$

dove ν è una costante reale non negativa.

Anticipiamo che, **per $\nu = p = 0, 1, 2, \dots$ intero**, troveremo la soluzione:

$$J_p(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^p \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+p)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}$$

che chiameremo funzione di Bessel di prima specie, di ordine p .

Si può ricavare anche una seconda soluzione indipendente da questa (per costruire l'integrale generale) ottenendo le funzioni di Bessel di seconda specie delle quali non parleremo. Sono già importanti nelle applicazioni, come vedremo, le funzioni di prima specie J_0 e J_1 che hanno analogie con le funzioni $\cos(t)$ e $\sin(t)$, e che approfondiremo nel paragrafo successivo:

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \quad J_1(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+1}$$

Anche **per ν non intero** esistono soluzioni, ma la loro espressione è più complicata e richiede l'introduzione della funzione speciale Γ , che estende la definizione di fattoriale ai numeri non interi.

³vedi p.e. Apostol, Calcolo, ed Boringhieri, vol 3, pag 74 e seguenti

2.5.1 Soluzione Bessel: determinazione di s

Consideriamo dunque il caso particolare:

$$t^2 y'' + t y' + (t^2 - p^2) y = 0 \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Cerchiamo soluzioni del tipo:

$$y(t) = t^s \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n \quad s \in \mathbb{R}, \quad c_0 \neq 0$$

(A posteriori s risulterà intero, quindi non serve porre $t > 0$). Derivando:

$$y' = s t^{s-1} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n + t^s \sum_{n=0}^{+\infty} n c_n t^{n-1} = t^{s-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (s+n) c_n t^n$$

$$\begin{aligned} y'' &= (s-1)t^{s-2} \sum_{n=0}^{+\infty} (s+n) c_n t^n + t^{s-1} \sum_{n=0}^{+\infty} n(s+n) c_n t^{n-1} = \\ &= t^{s-2} \sum_{n=0}^{+\infty} (s+n)(s+n-1) c_n t^n \end{aligned}$$

Sostituendo nella (2.11):

$$t^s \sum_{n=0}^{+\infty} (s+n)(s+n-1) c_n t^n + t^s \sum_{n=0}^{+\infty} (s+n) c_n t^n - t^s \sum_{n=0}^{+\infty} p^2 c_n t^n + t^s \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^{n+2} = 0$$

Dividendo per t^s , che è non nullo per $t \neq 0$, e riunendo le prime tre serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [(s+n)^2 - p^2] c_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^{n+2} = 0$$

isolando i primi due termini della prima serie, e riscrivendo la terza:

$$(s^2 - p^2) c_0 + [(s+1)^2 - p^2] c_1 t + \sum_{n=2}^{+\infty} [(s+n)^2 - p^2] c_n t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} c_{n-2} t^n = 0$$

riunendo le due serie:

$$(s^2 - p^2) c_0 + [(s+1)^2 - p^2] c_1 t + \sum_{n=2}^{+\infty} [((s+n)^2 - p^2) c_n + c_{n-2}] t^n = 0 \quad (2.12)$$

Affinché la somma sia uguale a zero $\forall t$, tutti i termini, compreso il termine costante $(s^2 - p^2) c_0$ devono essere nulli.

Avendo chiesto all'inizio che $c_0 \neq 0$, dovrà ora essere

$$s^2 - p^2 = 0 \quad (\text{equazione indiciale})$$

Quindi $s = p$ e $s = -p$ sono i valori possibili.

Determineremo ora i coefficienti c_n corrispondenti a $s = p$, intero non negativo.

2.5.2 Soluzione Bessel: determinazione dei c_n

Sempre per soddisfare la (2.12) notiamo che anche il termine di primo grado in t deve essere nullo, quindi:

$$[(s+1)^2 - p^2]c_1 = 0$$

Ma ora $s = p$ quindi la parentesi quadra non si annulla e deve essere:

$$c_1 = 0$$

Annullando poi i coefficienti dei termini di grado ≥ 2 si perviene alla relazione di ricorrenza:

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{(p+n)^2 - p^2} = -\frac{c_{n-2}}{n(2p+n)} \quad \forall n \geq 2$$

Applicandola con $n = 3, n = 5 \dots$, essendo $c_1 = 0$, si ricava che tutti i c_n di indice n dispari sono nulli.

Per gli indici pari, applicandola successivamente:

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{c_0}{2^2(p+1)} \\ c_4 &= -\frac{c_2}{2^2 \cdot 2(p+2)} = \frac{(-1)^2 c_0}{2^4 \cdot 2(p+1)(p+2)} \\ c_6 &= -\frac{c_4}{2^2 \cdot 3(p+3)} = \frac{(-1)^3 c_0}{2^6 \cdot 2 \cdot 3(p+1)(p+2)(p+3)} \\ &\dots\dots \\ c_{2k} &= \frac{(-1)^k c_0}{2^{2k} k! (p+1)(p+2)\dots(p+k)} \end{aligned}$$

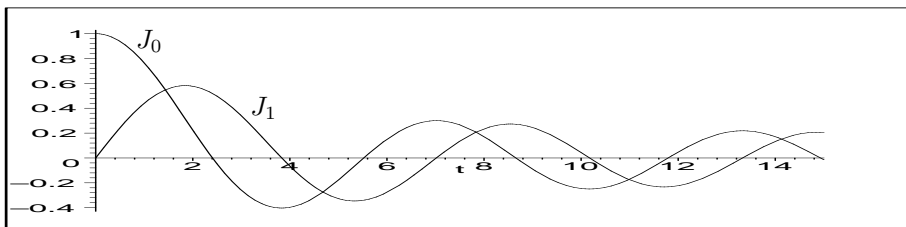
Ricordiamo che p è intero e $c_0 \neq 0$: scegliendo $c_0 = \frac{1}{2^p p!}$:

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} 2^p k! p! (p+1)(p+2)\dots(p+k)} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} 2^p k! (p+k)!}$$

Possiamo quindi concludere che una soluzione della (2.11) è :

$$J_p(t) = \frac{t^p}{2^p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (p+k)!} t^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! (p+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+p}$$

Queste funzioni sono chiamate funzioni di Bessel di prima specie di ordine p . Il criterio del rapporto, applicato ai valori assoluti dei termini della serie, ci dice che essa converge (assolutamente e quindi anche in senso ordinario) per ogni valore di $t \in \mathbb{R}$.

2.5.3 Le funzioni J_0 e J_1 

Le funzioni J_0 e J_1 hanno proprietà che ricordano quelle di \cos e \sin . Elenchiamo le poche che ci serviranno; per le altre rimandiamo ai testi⁴.

- Scrivendo per esteso le serie che le esprimono si ha:

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 4^2} - \frac{t^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots$$

$$J_1(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+1} = \frac{t}{2} - \frac{t^3}{2^2 4} + \frac{t^5}{2^2 4^2 6} - \frac{t^7}{2^2 4^2 6^2 8} + \dots$$

- J_0 è una funzione pari, J_1 è dispari
- Mediante derivazione termine a termine si vede facilmente che:

$$J_0'(t) = -J_1(t) \quad [t J_1(t)]' = t J_0(t)$$

- Le radici positive dell'equazione $J_0(t) = 0$ sono infinite e formano una successione crescente α_j che tende a $+\infty$ ed è asintotica alla successione $(j - \frac{1}{4})\pi$ per $j \rightarrow +\infty$, mentre per j piccoli si ha approssimativamente:

$$\alpha_1 = 2.405 \quad \alpha_2 = 5.520 \quad \alpha_3 = 8.654 \quad \alpha_4 = 11.792 \quad \alpha_5 = 14.931 \quad \dots$$

- Se α_j sono gli zeri di J_0 di cui al punto precedente:

$$\int_0^1 t J_0^2(\alpha_j t) dt = \frac{1}{2} J_1^2(\alpha_j) \quad \forall j = 1, 2, 3, \dots$$

$$\int_0^1 t J_0(\alpha_j t) J_0(\alpha_n t) dt = 0 \quad \text{per } j \neq n$$

questa specie di ortogonalità delle funzioni $J_0(\alpha_j t)$ sta alla base delle espansioni in serie di Fourier-Bessel delle quali vedremo un esempio in un prossimo paragrafo.

⁴F. Bowman, Introduction to Bessel functions, ed. Dover, New York, oppure Watson, Theory of Bessel functions, Cambridge 1922

Capitolo 3

Derivazione di funzioni composte

3.1 Il caso di una variabile

Ricordiamo brevemente la regola ben nota nel caso di una variabile. Siano date due funzioni f e G reali di variabile reale, derivabili:

$$y = f(x) \quad \text{e} \quad z = G(y)$$

con l'immagine della prima contenuta nel dominio della seconda in modo da poterne considerare la composta g :

$$g(x) = G \circ f(x) =: G(f(x))$$

Allora la composta è derivabile e, con varie notazioni:

$$g'(x) = G'(f(x))f'(x) \tag{3.1}$$

$$\frac{dg}{dx}(x) = \frac{dG}{dy}(f(x)) \frac{df}{dx}(x) \tag{3.2}$$

$$\frac{dz}{dx}(x) = \frac{dz}{dy}(y(x)) \frac{dy}{dx}(x) \tag{3.3}$$

l'ultima sostituendo i nomi delle funzioni con quelli delle variabili dipendenti.

Esempio 31 $y = f(x) = x^3 \quad z = G(y) = \cos(y) \quad g(x) = \cos(x^3)$

$$g'(x) = -\sin(x^3) 3x^2$$

3.2 Cambio di variabile indipendente in equazioni differenziali

Sia data una equazione differenziale nella quale l'incognita è funzione della variabile indipendente t , per esempio:

$$F(y(t), y'(t), y''(t), t) = 0 \quad (3.4)$$

Cambiare variabile indipendente significa immaginare la funzione incognita $y(t)$ come composta da una nuova funzione incognita $Y(x)$ con una funzione nota (derivabile con continuità) $x = c(t)$:

$$y(t) = Y(c(t)) \quad (3.5)$$

Con la regola di derivazione delle funzioni composte, ricordata nel paragrafo precedente, si ricavano le derivate $y'(t)$ e $y''(t)$ in funzione delle derivate della nuova funzione incognita $Y(x)$ e si sostituiscono nella (3.4) ottenendo così una nuova equazione in $Y(x)$.

Risolta questa e trovata la $Y(x)$, otteniamo la $y(t)$ dalla (3.5).

Esempio 32 (Equazione di Eulero)

$$t^2 y''(t) + 3t y'(t) + y(t) = 0 \quad (3.6)$$

Invece di usare il metodo già visto, immaginiamo la funzione $y(t)$ composta di una $Y(x)$ con $x = \log t$; ne segue:

$$y(t) = Y(\log t) \quad y'(t) = Y'(\log t) \frac{1}{t}$$

$$y''(t) = Y''(\log t) \frac{1}{t^2} + Y'(\log t) \left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

Sostituendo nella (3.6):

$$t^2 \left[Y''(\log t) \frac{1}{t^2} - Y'(\log t) \frac{1}{t^2} \right] + 3t Y'(\log t) \frac{1}{t} + Y(\log t) = 0$$

semplificando:

$$Y''(\log t) + 2Y'(\log t) + Y(\log t) = 0$$

cioè

$$Y''(x) + 2Y'(x) + Y(x) = 0$$

Questa è una equazione lineare omogenea a coefficienti costanti, quindi risolvibile per esponenziali:

$$Y(x, c_1, c_2) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

($\lambda = -1$ è soluzione doppia dell'equazione algebrica associata $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$).
Infine:

$$y(t, c_1, c_2) = Y(\log t, c_1, c_2) = c_1 \frac{1}{t} + c_2 \frac{\log t}{t}$$

3.3 Derivate parziali di funzioni composte

La formula di derivazione di funzione composta si estende al caso di più variabili, sostituendo nella (3.1) il simbolo di derivata con quello di matrice Jacobiana delle derivate parziali. Più precisamente siano date le funzioni:

$$\vec{y} = \mathbf{f}(\vec{x}) \quad \text{e} \quad \vec{z} = \mathbf{G}(\vec{y}) \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{y} \in \mathbb{R}^m, \quad \vec{z} \in \mathbb{R}^p$$

dotate di derivate parziali continue, e con l'immagine della prima contenuta nel dominio della seconda in modo da poterne considerare la composta \mathbf{g} :

$$\mathbf{g}(\vec{x}) = \mathbf{G} \circ \mathbf{f}(\vec{x}) =: \mathbf{G}(\mathbf{f}(\vec{x}))$$

Allora la composta è derivabile e:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\vec{x}) = \mathbf{J}_{\mathbf{G}}(\mathbf{f}(\vec{x}))\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\vec{x}) \quad (3.7)$$

Per matrice Jacobiana $\mathbf{J}_{\mathbf{f}}$ di una funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ si intende la matrice a m righe ed n colonne che ha nella i -esima riga le derivate parziali della i -esima componente della funzione \mathbf{f} rispetto alle n variabili x_j , cioè

$$(\mathbf{J}_{\mathbf{f}})_{ij}(\vec{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x})$$

Esempio 33 Con $n = m = 2$ e $p = 1$

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad z = G(y_1, y_2)$$

$$z = g(x_1, x_2) = G(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2))$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial y_1} & \frac{\partial G}{\partial y_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Moltiplicano l'unica riga di \mathbf{J}_G per la prima colonna di $\mathbf{J}_{\mathbf{f}}$ (ed esplicitando i punti nei quali sono calcolate le derivate) otteniamo per esempio:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial G}{\partial y_1}(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)) \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial G}{\partial y_2}(\dots) \frac{\partial y_2}{\partial x_1}(\dots)$$

Con altre notazioni, senza usare indici, dall'esempio ricaviamo le seguenti formule che useremo spesso. Se

$$w(x, y) = W(u(x, y), v(x, y))$$

allora:

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial W}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial W}{\partial v}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial W}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial W}{\partial v}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

3.4 Cambio di variabili in equazioni alle derivate parziali

Nel cambiamento di variabili indipendenti in equazioni alle derivate parziali si procede come per le equazioni differenziali ordinarie; naturalmente nel nuovo caso si dovranno calcolare derivate parziali di funzioni composte.

Illustreremo questa tecnica mediante due esempi.

Nel primo, in perfetta analogia con quanto visto per l'equazione di Eulero in un precedente paragrafo, tratteremo l'equazione della corda vibrante:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

nella funzione incognita $y = y(x, t)$ che immagineremo composta da una nuova funzione incognita $Y(u, v)$ con il cambiamento di variabili indipendenti

$$u = x + at, \quad v = x - at$$

$$y(x, t) = Y(x + at, x - at)$$

Derivando parzialmente con la regola per le funzioni composte esprimeremo le derivate parziali di y rispetto a x e t in funzione di quelle di Y rispetto a u e v , le sostituiremo nell'equazione di partenza ricavandone una nella nuova funzione incognita $Y(u, v)$, che sarà facilmente risolvibile, e poi risaliremo alla $y(x, t)$ per composizione. Si noti che in questo primo esempio il cambiamento di variabile esprime le nuove variabili u e v in funzione di quelle vecchie, x e t , ed è motivato da considerazioni fisiche.

Il secondo esempio riguarderà l'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

In questo caso il cambiamento di variabile, suggerito in alcuni casi è :

$$y = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta \quad (r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi)$$

che esprime le vecchie variabili indipendenti y e z in funzione delle nuove coordinate polari r e θ . Per procedere come nel primo caso dovremmo invertire questa funzione, ricavando una

$$r = r(y, z) \quad \theta = \theta(y, z)$$

per poi proseguire come prima derivando

$$w(y, z) = W(r(y, z), \theta(y, z))$$

Benché ciò sia possibile, è complicato. È meglio derivare la composizione:

$$W(r, \theta) = w(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

ricavando le derivate parziali di W rispetto a r e θ in funzione di quelle di w rispetto a y e z , e poi osservare che una certa combinazione delle prime dà esattamente l'espressione $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ alla quale si sostituisce, producendo l'equazione cui W soddisfa se e solo se w soddisfa all'equazione di partenza.

3.4. CAMBIO DI VARIABILI IN EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI 33

Esempio 34 (equazione della corda vibrante)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3.8)$$

$$u = x + at, \quad v = x - at \quad y(x, t) = Y(x + at, x - at)$$

Derivando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial u}(x + at, x - at) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial v}(x + at, x - at) \frac{\partial v}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial Y}{\partial u}(x + at, x - at)a + \frac{\partial Y}{\partial v}(x + at, x - at)(-a) \end{aligned}$$

Derivando ulteriormente occorre fare attenzione al fatto che la funzione più esterna della composizione non è più Y , bensì $\frac{\partial Y}{\partial u}$ o $\frac{\partial Y}{\partial v}$. Avremo quindi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \left[\frac{\partial(\frac{\partial Y}{\partial u})}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{\partial Y}{\partial u})}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right] a + \left[\frac{\partial(\frac{\partial Y}{\partial v})}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{\partial Y}{\partial v})}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right] (-a) = \\ &= \frac{\partial^2 Y}{\partial u^2} a^2 + \frac{\partial^2 Y}{\partial v \partial u} (-a^2) + \frac{\partial^2 Y}{\partial u \partial v} (-a^2) + \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} a^2 \end{aligned}$$

Per un noto teorema le due derivate seconde miste (se continue) sono uguali:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{\partial^2 Y}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 Y}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} \right]$$

Per $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ i fattori $\frac{\partial u}{\partial x} = a$ e $\frac{\partial v}{\partial x} = -a$ saranno sostituiti da $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ e $\frac{\partial v}{\partial x} = 1$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 Y}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 Y}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} \right]$$

Sostituendo nell'equazione (3.8) e semplificando:

$$4 \frac{\partial^2 Y}{\partial v \partial u} = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{\partial(\frac{\partial Y}{\partial u})}{\partial v} = 0$$

Integrando rispetto a v (aggiungendo una qualsiasi $f(u)$ costante rispetto a v):

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = f(u)$$

e integrando rispetto a u (aggiungendo una $G(v)$ costante rispetto a u):

$$Y(u, v) = \int f(u) du + G(v) = F(u) + G(v)$$

e tornando alle vecchie variabili:

$$y(x, t) = Y(x + at, x - at) = F(x + at) + G(x - at)$$

Con F e G funzioni arbitrarie di una sola variabile (con qualche regolarità, per esempio con derivate seconde continue).

Esempio 35 (equazione di Laplace)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (3.9)$$

$$y = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta \quad W(r, \theta) = w(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial w}{\partial z}(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{\partial z}{\partial r}(r, \theta)$$

Le derivate di y e z rispetto a r sono note, quindi:

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial z}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial w}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right] \cos \theta + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial w}{\partial z}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right] \sin \theta = \\ &= \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} \frac{\partial z}{\partial r} \right] \cos \theta + \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial r} \right] \sin \theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \sin^2 \theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\partial w}{\partial z}(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{\partial z}{\partial \theta}(r, \theta) = \\ &= \frac{\partial w}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)(-r \sin \theta) + \frac{\partial w}{\partial z}(r \cos \theta, r \sin \theta)(r \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial w}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)(-r \sin \theta) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial w}{\partial z}(r \cos \theta, r \sin \theta)(r \cos \theta) \right]$$

E ricordando anche la regola di derivazione di un prodotto:

$$\boxed{\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} r^2 \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} r^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} r^2 \cos^2 \theta - \frac{\partial w}{\partial y} r \cos \theta - \frac{\partial w}{\partial z} r \sin \theta}$$

Se si moltiplica per $\frac{1}{r}$ il primo riquadro, e per $\frac{1}{r^2}$ il terzo, e poi si sommano i tre riquadri membro a membro, si ottiene:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

Sostituendo nella (3.9) si ottiene l'equazione di Laplace in coordinate polari.

Capitolo 4

Esempi di equazioni alle derivate parziali

In questo capitolo useremo le tecniche illustrate nelle pagine precedenti, per risolvere alcune equazioni differenziali alle derivate parziali che si incontrano nelle applicazioni. Non mostreremo come tali equazioni costituiscono il modello matematico di certi fenomeni fisici, rimandando per questo ai testi specializzati¹

Gli esempi che tratteremo riguardano il moto stazionario di un liquido in un tubo, il moto non stazionario di uno strato semiinfinito di liquido sovrastante una parete orizzontale, la propagazione del calore in una lastra piana infinitamente estesa di spessore uniforme, un fenomeno di diffusione in una colonna a pareti bagnate.

Negli ultimi due casi illustreremo anche la tecnica di separazione delle variabili (che non c'entra nulla con l'omonimo metodo per equazioni differenziali ordinarie del primo ordine a variabili separabili) e che è fondamentale anche per l'integrazione dell'equazione di Schrödinger, come vedremo nell'ultima parte del corso.

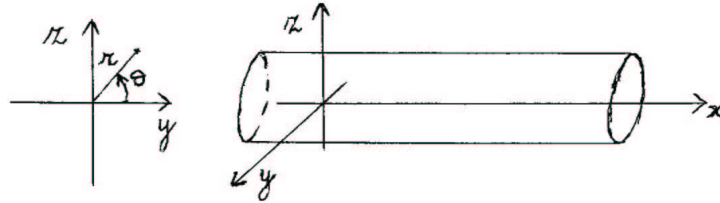
¹L. Forni - Fenomeni di trasporto. Ed. Libreria Cortina, Milano.

4.1 Moto di un liquido in un tubo

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Questa equazione riguarda il moto stazionario di un liquido in un tubo orizzontale a sezione circolare uniforme, in presenza del solo campo gravitazionale.

Il riferimento cartesiano è disposto in modo che l'asse x coincida con l'asse del tubo. La funzione incognita $u = u(x, y, z)$ dà la componente secondo l'asse x della velocità della particella di liquido nel punto (x, y, z) (nelle condizioni descritte questa è l'unica componente della velocità), mentre la pressione $P(x)$ si suppone nota e dipendente solo da x . Infine μ è un coefficiente legato alla viscosità del liquido. Data la simmetria cilindrica del sistema, usiamo le coordi-



nate cilindriche, che individuano un punto tramite la sua distanza x dal piano y, z (come per la x cartesiana) e le coordinate polari r e θ della sua proiezione sul piano y, z . Di conseguenza r esprime la distanza del punto dall'asse x ; per r e x costanti, al variare di θ il punto descrive una circonferenza concentrica all'asse del tubo e appartenente a un piano parallelo al piano y, z .

Le relazioni che legano le coordinate cilindriche e quelle cartesiane sono:

$$x = x \quad y = r \cos \theta \quad z = r \sin \theta \quad x \in \mathbb{R}, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Trasformare l'equazione data in coordinate cilindriche significa, come abbiamo visto nel capitolo precedente, considerare la nuova funzione incognita

$$\mathcal{U}(x, r, \theta) = u(x, y(r, \theta), z(r, \theta))$$

Poiché il Laplaciano che compare nell'equazione è riferito alle sole variabili y e z , che sono espresse in maniera polare tramite r e θ , nel fare il cambiamento di coordinate possiamo usare l'espressione calcolata nel capitolo precedente del Laplaciano in due variabili in coordinate polari e sostituirla nell'equazione, ottenendo:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

Per motivi di simmetria, ipotizziamo \mathcal{U} indipendente da θ , quindi la derivata rispetto a θ è nulla, e moltiplicando per r :

$$\frac{r}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} = r \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}$$

Il secondo membro si può scrivere come la derivata di un prodotto:

$$\frac{r}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} \right)$$

e integrando rispetto a r , con c_1 costante rispetto a r :

$$\frac{r^2}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} = r \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} + c_1$$

Dividiamo per r per isolare la derivata rispetto a r della funzione incognita:

$$\frac{r}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} + \frac{c_1}{r}$$

così possiamo ricavare \mathcal{U} integrando nuovamente rispetto a r :

$$\frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} = \mathcal{U} + c_1 \log r - c_2$$

$$\mathcal{U} = \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} - c_1 \log r + c_2$$

Fra questa doppia infinità di soluzioni dobbiamo scartare quelle che vanno all'infinito per $r \rightarrow 0$, cioè sull'asse del tubo: infatti non ha fisicamente senso che le particelle sull'asse del tubo abbiano velocità infinita; quindi poniamo $c_1 = 0$.

$$\mathcal{U}(x, r) = \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + c_2$$

Per trovare il valore di c_2 teniamo conto del fatto che le particelle dello strato infinitesimo a contatto con la parete interna del tubo per l'attrito sono ferme, quindi se r_w è il raggio del tubo:

$$\mathcal{U}(x, r_w) = 0$$

dalla quale si ricava:

$$\frac{r_w^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{r_w^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

e infine:

$$\mathcal{U}(x, r) = \frac{r^2 - r_w^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

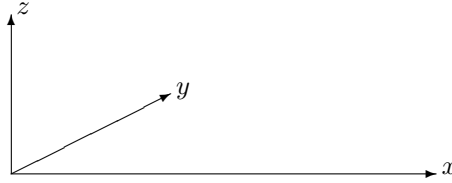
Si vede che il profilo del campo di velocità per x costante è parabolico in r , con un massimo² per $r = 0$, cioè sull'asse del tubo.

²Si tenga conto che la derivata di P rispetto a x è negativa, se la velocità ha il verso dell'asse x stesso.

4.2 Moto di uno strato di liquido

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Questa equazione riguarda il caso, non stazionario (cioè con dipendenza dal tempo t) del moto isoterma di un liquido disposto in uno strato semiinfinito sovrastante una parete piana orizzontale (il piano x, y , di equazione $z = 0$). Tale parete, ferma all'istante $t = 0$, acquista istantaneamente la velocità costante u_w nella direzione e verso dell'asse x , trascinando per attrito le particelle a contatto con essa; queste a loro volta trasmettono il moto a quelle adiacenti etc. ...



La funzione incognita $u = u(t, z)$ dà la velocità (nella direzione dell'asse x) delle particelle di liquido alla quota z , all'istante t . Le situazione descritta si traduce³ nelle condizioni (un po' iniziali, un po' al contorno):

$$\begin{cases} u(0, z) = 0 & \forall z > 0 \\ u(t, 0) = u_w & \forall t > 0 \end{cases}$$

Proviamo, euristicamente, un cambio di variabili indipendenti⁴ del tipo:

$$u(t, z) = \Phi(\eta(t, z)) \quad \text{con} \quad \eta(t, z) = c t^a z^b$$

con a, b, c costanti da determinarsi in modo da potersi ridurre a una equazione differenziale ordinaria nella funzione incognita $\Phi(\eta)$.

Applicando come al solito la regola di derivazione delle funzioni composte (questa volta con una sola variabile intermedia η):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Phi'(\eta(t, z)) \frac{\partial \eta}{\partial t} = \Phi'(\eta(t, z)) c a t^{a-1} z^b$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \Phi'(\eta(t, z)) \frac{\partial \eta}{\partial z} = \Phi'(\eta(t, z)) c b t^a z^{b-1}$$

Per avere $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ da sostituire nell'equazione, dobbiamo derivare rispetto a z la $\frac{\partial u}{\partial z}$ appena calcolata, che si presenta come un prodotto: per non avere z in entrambi i fattori, scegliamo $b = 1$; da ciò si ottiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Phi''(\eta(t, z)) \frac{\partial \eta}{\partial z} c t^a = \Phi''(\eta(t, z)) (c t^a)^2$$

³equivalentemente: $\frac{\partial(u/u_w)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2(u/u_w)}{\partial z^2}$ $u(0, z)/u_w = 0$ $u(t, 0)/u_w = 1$

⁴Il cambio di variabili può essere suggerito anche da considerazioni dimensionali

Sostituendo nell'equazione le derivate di u calcolate:

$$\Phi'(\eta(t, z)) c a t^{a-1} z = \nu \Phi''(\eta(t, z)) c^2 t^{2a}$$

ovvero:

$$\Phi''(\eta(t, z)) - \frac{c a t^{a-1} z}{\nu c^2 t^{2a}} \Phi'(\eta(t, z)) = 0$$

e semplificando:

$$\Phi''(\eta(t, z)) - \frac{a z}{\nu c t^{a+1}} \Phi'(\eta(t, z)) = 0$$

Per avere solo la variabile η occorre che il coefficiente di Φ' sia esprimibile tramite $\eta = c t^a z$, e a ciò basta che sia :

$$-\frac{a z}{\nu c t^{a+1}} = 2 c t^a z$$

(il fattore 2 è solo per comodità successiva) e da questa si ottiene:

$$a + 1 = -a \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2}$$

che sostituito nella precedente dà :

$$\frac{1}{2} \frac{z}{\nu c \sqrt{t}} = 2 c \frac{z}{\sqrt{t}} \quad \Rightarrow \quad c^2 = \frac{1}{4 \nu} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2 \sqrt{\nu}}$$

e infine:

$$\eta = \frac{z}{\sqrt{4 \nu t}}$$

(che è una quantità adimensionata, vedi nota precedente) e l'equazione diventa:

$$\Phi''(\eta) + 2 \eta \Phi'(\eta) = 0$$

Le condizioni che avevamo posto sulla funzione $u(t, z)$:

$$u(0, z) = 0 \quad u(t, 0) = u_w$$

si traducono sulla funzione $\Phi(\eta)$, vista l'espressione di $\eta(t, z)$, nelle condizioni :

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \Phi(\eta) = 0 \quad \Phi(0) = u_w \quad (4.1)$$

Abbassiamo l'ordine dell'equazione in Φ ponendo $g(\eta) = \Phi'(\eta)$:

$$g'(\eta) = -2 \eta g(\eta)$$

Separando le variabili e integrando:

$$\int \frac{dg}{g} = - \int 2 \eta d\eta \quad \Rightarrow \quad \log g = -\eta^2 + c$$

$$g(\eta) = c_1 e^{-\eta^2}$$

ed essendo g la derivata di Φ :

$$\Phi(\eta) = \Phi(0) + c_1 \int_0^\eta e^{-v^2} dv$$

Ricordando le (4.1) e sapendo⁵ che $\int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ricaviamo:

$$u_w + c_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} u_w$$

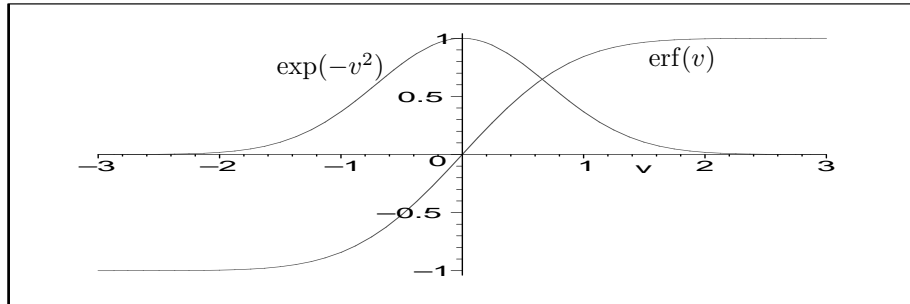
e infine:

$$\Phi(\eta) = u_w \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-v^2} dv \right]$$

Il secondo termine in parentesi quadra è la ben nota funzione errore:

$$\operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-v^2} dv = \frac{\int_0^\eta e^{-v^2} dv}{\int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv}$$

per quanto ricordato nella nota essa può venire solo calcolata numericamente (tabulata).



Con la terminologia ricordata la nostra soluzione si scrive come:

$$\Phi(\eta) = u_w [1 - \operatorname{erf}(\eta)]$$

e tornando alle vecchie variabili, ricordando che $\eta = \frac{z}{\sqrt{4\nu t}}$:

$$u(t, z) = u_w \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z}{\sqrt{4\nu t}} \right) \right]$$

⁵Non provare a calcolare la primitiva, che non è esprimibile in termini finiti!

4.3 Propagazione del calore

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Questa equazione si presenta anche nello studio della propagazione del calore. La funzione incognita $T(t, z)$ rappresenta la temperatura T in funzione del tempo t e di una coordinata spaziale z . Consideriamo per esempio il caso di una lastra piana omogenea, di semi-spessore r_w , disposta in modo da avere il piano x, y come piano di simmetria e dunque perpendicolare all'asse z , infinitamente estesa nelle direzioni x e y , che si trovi al tempo $t = 0$ alla temperatura uniforme T_0 . Da tale istante in poi si mantenga, sulle due facce della lastra (i piani di equazione $z = \pm r_w$), una temperatura costante $T_1 \neq T_0$.

Sotto certe ipotesi fisiche, questa situazione è descritta dalle condizioni:

$$\begin{cases} T(0, z) = T_0 & \forall z \in [-r_w, +r_w] \\ T(t, \pm r_w) = T_1 & \forall t > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

4.3.1 Il cambiamento iniziale di funzione incognita

Iniziamo la risoluzione del problema con un cambiamento di funzione incognita (non legato a un cambio di variabili indipendenti come negli esempi visti finora) per ridurre T_0 e T_1 rispettivamente ai valori 1 e 0, cosa che renderà possibile i calcoli successivi, come vedremo. Poniamo dunque:

$$Y(t, z) = \frac{T(t, z) - T_1}{T_0 - T_1}$$

e ricaviamo $T(t, z)$ per poterne calcolare le derivate parziali, in funzione di quelle di $Y(t, z)$:

$$T(t, z) = (T_0 - T_1)Y(t, z) + T_1$$

dalla quale otteniamo, essendo T_0 e T_1 costanti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= (T_0 - T_1) \frac{\partial Y}{\partial t} \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= (T_0 - T_1) \frac{\partial Y}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = (T_0 - T_1) \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione e nelle condizioni (4.2) otteniamo la stessa equazione (nell'incognita $Y(t, z)$):

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \quad (4.3)$$

con le condizioni:

$$Y(0, z) = \frac{T(0, z) - T_1}{T_0 - T_1} = \frac{T_0 - T_1}{T_0 - T_1} = 1 \quad (4.4)$$

$$Y(t, \pm r_w) = \frac{T(t, \pm r_w) - T_1}{T_0 - T_1} = \frac{T_1 - T_1}{T_0 - T_1} = 0 \quad (4.5)$$

4.3.2 La separazione delle variabili

Il metodo di separazione delle variabili consiste ora nel cercare soluzioni dell'equazione (4.3) che siano del tipo

$$Y(t, z) = \Theta(t) \cdot Z(z) \quad (4.6)$$

cioè esprimibili come prodotto di una funzione $\Theta(t)$ della sola t , per una $Z(z)$ della sola z ; questo porterà a risolvere due equazioni differenziali ordinarie in funzioni incognite diverse, ma collegate fra loro da un parametro.

Per soddisfare la condizione (4.4) dovremo poi considerare somme (anzi, serie) di tali prodotti, e tale somma sarà ancora soluzione dell'equazione per la linearità di quest'ultima. Inoltre la condizione (4.5) sarà automaticamente assicurata dal fatto che, se delle funzioni valgono tutte zero in certi punti, anche la loro somma vale zero negli stessi punti.

Dalla (4.6) ricaviamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial t} &= \Theta'(t) Z(z) \\ \frac{\partial Y}{\partial z} &= \Theta(t) Z'(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} = \Theta(t) Z''(z) \end{aligned}$$

e sostituendo nella (4.3):

$$\Theta'(t) Z(z) = \alpha \Theta(t) Z''(z)$$

Ipotizzando $\Theta(t)$ e $Z(z)$ diverse da zero:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\Theta'(t)}{\Theta(t)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)} \quad \forall t > 0, \quad z \in (-r_w, +r_w)$$

I due membri di questa identità dipendono da variabili diverse e indipendenti fra loro, quindi possono essere uguali solo se assumono lo stesso valore costante $-\bar{K}$ al variare comunque di t e z .

Potremo quindi avere soluzioni del tipo (4.6) per quei \bar{K} costanti tali che:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\Theta'(t)}{\Theta(t)} = -\bar{K} = \frac{Z''(z)}{Z(z)}$$

cioè :

$$\begin{cases} \Theta'(t) + \alpha \bar{K} \Theta(t) = 0 \\ Z''(z) + \bar{K} Z(z) = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

La condizione (4.5) diventa:

$$\Theta(t) Z(\pm r_w) = 0$$

e dovendo essere $\Theta(t) \neq 0$ (altrimenti la soluzione è banale), si ha:

$$Z(-r_w) = Z(r_w) = 0 \quad (4.8)$$

mentre la condizione (4.4) verrà usata più avanti.

Cominciamo dunque a cercare soluzioni per la seconda equazione delle (4.7) con le condizioni (4.8).

4.3.3 L'equazione in $Z(z)$

$$Z''(z) + \bar{K} Z(z) = 0 \quad \text{con} \quad Z(-r_w) = Z(r_w) = 0$$

non è un problema ai valori iniziali (di Cauchy), ma ai limiti, e quindi non è garantita l'esistenza e l'unicità della soluzione. Vedremo che per certi \bar{K} non esistono soluzioni non nulle, mentre per certi altri ne esistono infinite.

Caso $\bar{K} = 0$ (nessuna soluzione non nulla). L'equazione diventa $Z''(z) = 0$ che dà $Z(z) = az + b$ che soddisfa le condizioni ai limiti solo per $a = b = 0$.

Caso $\bar{K} < 0$ (nessuna soluzione non nulla). L'integrale generale è :

$$Z(z) = c_1 \exp(qz) + c_2 \exp(-qz) \quad \text{con} \quad q = \sqrt{-\bar{K}}$$

Imponendo le condizioni ai limiti si ricava il sistema nelle incognite c_1 e c_2 :

$$\begin{cases} c_1 \exp(qr_w) + c_2 \exp(-qr_w) = 0 \\ c_1 \exp(q(-r_w)) + c_2 \exp(-q(-r_w)) = 0 \end{cases}$$

Esso ha determinante $\exp(2qr_w) - \exp(-2qr_w) \neq 0$ per $q \neq 0$ e quindi ha solo la soluzione nulla $c_1 = c_2 = 0$ che darebbe nuovamente $Z(z) = 0$.

Caso $\bar{K} > 0$ (allora scriveremo $\bar{K} = K^2$). L'integrale generale è :

$$Z(z) = c_1 \cos(Kz) + c_2 \sin(Kz) = c_1 \cos(Kz)$$

in quanto ci aspettiamo soluzioni pari in z per motivi di simmetria del sistema fisico rispetto al piano $z = 0$, e quindi possiamo porre $c_2 = 0$.

Imponendo le condizioni ai limiti:

$$c_1 \cos(Kr_w) = 0$$

e dovendo essere $c_1 \neq 0$ per evitare la soluzione nulla:

$$Kr_w = (2j - 1) \frac{\pi}{2} \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Quindi per i valori⁶

$$\bar{K}_j = K_j^2 = \frac{1}{r_w^2} \left[\frac{\pi}{2} (2j - 1) \right]^2 \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

abbiamo le corrispondenti infinite (al variare di c_1) soluzioni:

$$Z_j(z) = c_1 \cos \left[\frac{z}{r_w} \frac{\pi}{2} (2j - 1) \right]$$

⁶I valori $-\bar{K}_j$ diconsi autovalori del problema e le corrispondenti soluzioni Z_j diconsi autofunzioni.

4.3.4 L'equazione in $\Theta(t)$

Per i valori $\overline{K_j} = K_j^2$ trovati, risolviamo ora la prima delle equazioni (4.7)

$$\Theta'(t) + \alpha K_j^2 \Theta(t) = 0$$

È un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine a variabili separabili:

$$\Theta_j(t) = c_3 \exp(-\alpha K_j^2 t) = c_3 \exp\left\{-\left[\frac{\pi}{2}(2j-1)\right]^2 \frac{\alpha t}{r_w^2}\right\}$$

4.3.5 Conclusioni

Per l'equazione (4.3) otteniamo quindi le soluzioni di tipo (4.6):

$$Y_j(t, z) = c_j \exp\left\{-\left[\frac{\pi}{2}(2j-1)\right]^2 \frac{\alpha t}{r_w^2}\right\} \cdot \cos\left[\frac{z}{r_w} \frac{\pi}{2}(2j-1)\right] \quad (c_j = c_1 c_3)$$

che soddisfano tutte la condizione $Y(t, \pm r_w) = 0$, ma non la $Y(0, z) = 1$.

Per soddisfare anche quest'ultima condizione consideriamo somme di $Y_j(t, z)$ per diversi valori di j . Tali somme, per qualunque scelta dei c_j soddisfano ancora l'equazione (4.3) perché essa è lineare e si annullano anch'esse per $z = \pm r_w$.

In realtà si considera la serie di tutte le Y_j :

$$Y(t, z) = \sum_{j=1}^{+\infty} Y_j(t, z)$$

e si può dimostrare⁷ che queste affermazioni valgono ancora. Su questa funzione si impone la condizione $Y(0, z) = 1$. Dando a t il valore 0 i fattori esponenziali si riducono all'unità e si ottiene:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} c_j \cos\left[\frac{z}{r_w} \frac{\pi}{2}(2j-1)\right] = 1 \quad \forall z \in (-r_w, +r_w)$$

Si può dimostrare (vedi traccia nel prossimo paragrafo) che i valori:

$$c_j = \frac{-4(-1)^j}{\pi(2j-1)}$$

soddisfano tale condizione e quindi otteniamo la soluzione del problema (4.3)(4.4)(4.5):

$$Y(t, z) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{-4(-1)^j}{\pi(2j-1)} \exp\left\{-\left[\frac{\pi}{2}(2j-1)\right]^2 \frac{\alpha t}{r_w^2}\right\} \cos\left[\frac{z}{r_w} \frac{\pi}{2}(2j-1)\right]$$

Infine, per ottenere la soluzione della equazione iniziale nell'incognita $T(t, z)$, occorre naturalmente tenere conto dell'espressione che la lega alla $Y(t, z)$:

$$T(t, z) = (T_0 - T_1) Y(t, z) + T_1$$

⁷Non abbiamo a che fare con serie di potenze; per una dimostrazione rigorosa occorrerebbero altre nozioni preliminari.

4.3.6 Il calcolo dei coefficienti c_j

Questo problema è analogo a quello di trovare i coefficienti di una combinazione lineare di vettori \vec{v}_k dello spazio euclideo \mathbb{R}^3 che dia come risultato un certo vettore assegnato \vec{v} :

$$\sum_{k=1}^3 c_k \vec{v}_k = \vec{v}$$

Se i \vec{v}_k sono ortogonali a due a due, cioè se i prodotti scalari $\vec{v}_j \cdot \vec{v}_k$ sono nulli per $j \neq k$, per trovare c_j basta moltiplicare scalarmente per \vec{v}_j a destra e sinistra, nella relazione precedente:

$$\begin{aligned} \vec{v}_j \cdot \sum_{k=1}^3 c_k \vec{v}_k &= \vec{v}_j \cdot \vec{v} \\ \sum_{k=1}^3 c_k \vec{v}_j \cdot \vec{v}_k &= \vec{v}_j \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Nella sommatoria, solo il termine per $k = j$ è diverso da zero, quindi:

$$c_j \vec{v}_j \cdot \vec{v}_j = \vec{v}_j \cdot \vec{v}$$

e si ottiene:

$$c_j = \frac{\vec{v}_j \cdot \vec{v}}{\vec{v}_j \cdot \vec{v}_j}$$

Se esprimiamo i vettori in questione tramite componenti cartesiane, per esempio $\vec{v}_j = (v_j^1, v_j^2, v_j^3)$ ⁸:

$$c_j = \frac{\sum_{i=1}^3 v_j^i v^i}{\sum_{i=1}^3 v_j^i v_j^i} = \frac{\sum_{i=1}^3 v_j^i v^i}{\sum_{i=1}^3 (v_j^i)^2}$$

Possiamo pensare un vettore come una funzione definita sull'insieme finito fatto dai tre elementi $\{1, 2, 3\}$ e a valori reali. Essa è assegnata semplicemente elencando le immagini $(v(1), v(2), v(3))$ dei tre elementi del dominio che non sono altro che le componenti (v^1, v^2, v^3) del vettore. Con questa notazione la relazione precedente diventa:

$$c_j = \frac{\sum_{i=1}^3 v_j(i) v(i)}{\sum_{i=1}^3 (v_j(i))^2}$$

Queste considerazioni si possono estendere⁹ al caso di funzioni definite su un insieme continuo di numeri (qui l'intervallo $[-r_w, +r_w]$), introducendo, come analogo del prodotto scalare $\sum_{i=1}^3 u(i) v(i)$ di due vettori \vec{u} e \vec{v} , il seguente prodotto scalare di funzioni, dove la somma è sostituita dall'integrale:

$$\int_{-r_w}^{+r_w} u(z) v(z) dz$$

⁸I numerini in apice sono indici, NON esponenti!

⁹L'ambiente giusto per questi concetti è quello degli spazi di Hilbert

Torniamo al nostro problema: dobbiamo trovare dei coefficienti c_k che soddisfino la relazione

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cos \left[\frac{z}{r_w} \frac{\pi}{2} (2k-1) \right] = 1 \quad \forall z \in (-r_w, +r_w)$$

che è analoga a quella della pagina precedente, dove le funzioni $\cos \left[\frac{z}{r_w} \frac{\pi}{2} (2k-1) \right]$ sostituiscono i vettori \vec{v}_k e la funzione costante uguale a 1 sta per il vettore \vec{v} .

Si noti che le funzioni coseno in questione sono ortogonali rispetto al prodotto scalare introdotto; infatti:

$$\int_{-r_w}^{+r_w} \cos \left[\frac{z}{r_w} \frac{\pi}{2} (2k-1) \right] \cos \left[\frac{z}{r_w} \frac{\pi}{2} (2j-1) \right] dz = 0 \quad \text{per } j \neq k$$

(Verificare per esercizio, ricordando: $\cos(\alpha) \cos(\beta) = [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]/2$)

Supponendo che tali coefficienti esistano e procedendo più euristicamente che rigorosamente¹⁰, imitando la formula ricavata alla fine della pagina precedente, otteniamo:

$$c_j = \frac{\int_{-r_w}^{+r_w} \left(\cos \left[\frac{z}{r_w} \frac{\pi}{2} (2j-1) \right] \right) 1 dz}{\int_{-r_w}^{+r_w} \left(\cos \left[\frac{z}{r_w} \frac{\pi}{2} (2j-1) \right] \right)^2 dz} = \frac{-4(-1)^j}{\pi(2j-1)}$$

Un calcolo più rigoroso dei coefficienti c_j richiederebbe la teoria delle serie di Fourier. Per chi la conosce, notiamo che il periodo della somma della serie di funzioni è $4r_w$ (esso è il periodo del coseno di frequenza più bassa che compare nella serie). Inoltre se la somma della serie deve essere 1 sull'intervallo $(-r_w, +r_w)$, essa deve essere -1 su $[r_w, 3r_w]$. Infatti, ricordando che $\cos(x + \pi(2j-1)) = -\cos(x)$, si ha:

$$\cos \left[\frac{z + 2r_w}{r_w} \frac{\pi}{2} (2j-1) \right] = -\cos \left[\frac{z}{r_w} \frac{\pi}{2} (2j-1) \right]$$

e quindi la somma della serie $s(z)$ soddisfa:

$$s(z + 2r_w) = -s(z) = -1 \quad \text{per } z \in (-r_w, r_w)$$

Per trovare i coefficienti c_j basta allora sviluppare in serie di Fourier la funzione periodica di periodo $4r_w$ che vale 1 su $(-r_w, +r_w)$ e vale -1 su $(r_w, 3r_w)$.

¹⁰Per esempio assumendo che i passaggi fatti per le somme finite valgano anche per la serie di funzioni in questione

4.4 Un problema di diffusione in sistemi fluenti

In un problema di diffusione in una colonna a pareti bagnate¹¹ si presenta la seguente equazione:

$$u \frac{\partial c}{\partial z} = D \left[\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right]$$

(dove u e D sono costanti), con le condizioni:

$$\begin{cases} c(r, 0) = c_0 & \forall r : 0 < r < r_w \\ c(r_w, z) = c_w & \forall z > 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

4.4.1 Il cambiamento iniziale di funzione incognita

Iniziamo la risoluzione del problema con un cambiamento di funzione incognita (analogo a quello del paragrafo sulla diffusione del calore) per ridurre c_0 e c_w rispettivamente ai valori 1 e 0, cosa che renderà possibile i calcoli successivi, come vedremo. Poniamo dunque:

$$C(r, z) = \frac{c(r, z) - c_w}{c_0 - c_w}$$

e ricaviamo $c(r, z)$ per poterne calcolare le derivate parziali, in funzione di quelle di $C(r, z)$:

$$c(r, z) = (c_0 - c_w) C(r, z) + c_w$$

dalla quale otteniamo, essendo c_0 e c_w costanti:

$$\frac{\partial c}{\partial z} = (c_0 - c_w) \frac{\partial C}{\partial z}$$

$$\frac{\partial c}{\partial r} = (c_0 - c_w) \frac{\partial C}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} = (c_0 - c_w) \frac{\partial^2 C}{\partial r^2}$$

Sostituendo nell'equazione e nelle condizioni (4.9) otteniamo la stessa equazione (nell'incognita $C(r, z)$):

$$u \frac{\partial C}{\partial z} = D \left[\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} \right] \quad (4.10)$$

con le condizioni:

$$C(r, 0) = \frac{c(r, 0) - c_w}{c_0 - c_w} = \frac{c_0 - c_w}{c_0 - c_w} = 1 \quad (4.11)$$

$$C(r_w, z) = \frac{c(r_w, z) - c_w}{c_0 - c_w} = \frac{c_w - c_w}{c_0 - c_w} = 0 \quad (4.12)$$

¹¹Forni, op.cit. pag.381

4.4.2 La separazione delle variabili

Il metodo di separazione delle variabili consiste ora nel cercare soluzioni dell'equazione (4.10) che siano del tipo

$$C(r, z) = R(r) \cdot Z(z) \quad (4.13)$$

cioè esprimibili come prodotto di una funzione $R(r)$ della sola r , per una $Z(z)$ della sola z ; questo porterà a risolvere due equazioni differenziali ordinarie in funzioni incognite diverse, ma collegate fra loro da un parametro.

Per soddisfare la condizione (4.11) dovremo poi considerare somme (anzi, serie) di tali prodotti, e tale somma sarà ancora soluzione dell'equazione per la linearità di quest'ultima. Inoltre la condizione (4.12) sarà automaticamente assicurata dal fatto che, se delle funzioni valgono tutte zero in certi punti, anche la loro somma vale zero negli stessi punti.

Dalla (4.13) ricaviamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial z} &= R(r) Z'(z) \\ \frac{\partial C}{\partial r} &= R'(r) Z(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} = R''(r) Z(z) \end{aligned}$$

e sostituendo nella (4.10):

$$u R(r) Z'(z) = D \left[R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) \right] Z(z)$$

Ipotizzando $R(r)$ e $Z(z)$ diverse da zero, dividendo per $R(r)Z(z)$:

$$u \frac{Z'(z)}{Z(z)} = D \left[\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} \right] \quad \forall z > 0, \quad 0 < r < r_w$$

I due membri di questa identità dipendono da variabili diverse e indipendenti fra loro, quindi possono essere uguali solo se assumono lo stesso valore costante $-\beta$ al variare comunque di r e z :

$$u \frac{Z'(z)}{Z(z)} = -\beta = D \left[\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} \right]$$

cioè :

$$\begin{cases} u Z'(z) = -\beta Z(z) \\ r^2 R''(r) + r R'(r) + \frac{\beta}{D} r^2 R(r) = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

La condizione (4.12) diventa:

$$R(r_w) Z(z) = 0$$

e dovendo essere $Z(z) \neq 0$ (altrimenti la soluzione è banale), si ha:

$$R(r_w) = 0 \quad (4.15)$$

mentre la condizione (4.11) verrà usata più avanti.

Cominciamo dunque a cercare soluzioni per la seconda equazione delle (4.14) con la condizione (4.15).

4.4.3 L'equazione in $R(r)$

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + \frac{\beta}{D} r^2 R(r) = 0 \quad R(r_w) = 0$$

Se il coefficiente $\frac{\beta}{D} = \gamma$ valesse uno, avremmo l'equazione di Bessel di ordine zero. Possiamo rifarci a questo caso con un cambiamento di variabile indipendente, cioè immaginando $R(r)$ composta di una nuova $Y(t)$ con $t = r\sqrt{\gamma}$. Quindi:

$$\begin{aligned} R(r) &= Y(r\sqrt{\gamma}) \\ R'(r) &= \sqrt{\gamma} Y'(r\sqrt{\gamma}) \\ R''(r) &= \gamma Y''(r\sqrt{\gamma}) \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione:

$$\begin{aligned} r^2 \gamma Y''(r\sqrt{\gamma}) + r\sqrt{\gamma} Y'(r\sqrt{\gamma}) + r^2 \gamma Y(r\sqrt{\gamma}) &= 0 \\ (r\sqrt{\gamma})^2 Y''(r\sqrt{\gamma}) + r\sqrt{\gamma} Y'(r\sqrt{\gamma}) + (r\sqrt{\gamma})^2 Y(r\sqrt{\gamma}) &= 0 \end{aligned}$$

ed essendo $t = r\sqrt{\gamma}$:

$$t^2 Y''(t) + t Y'(t) + t^2 Y(t) = 0$$

che ha soluzioni¹² $Y(t) = a J_0(t)$ dove a è una costante e J_0 la funzione di Bessel di prima specie di ordine zero vista al paragrafo 2.5.3 .

Quindi l'equazione di partenza ha soluzioni:

$$R(r) = a J_0(r\sqrt{\gamma}) = a J_0\left(r\sqrt{\frac{\beta}{D}}\right) \quad (4.16)$$

Imponendo la condizione $R(r_w) = 0$ ricaviamo i valori della costante β ammissibili per il problema (4.14). Otteniamo infatti:

$$R(r_w) = a J_0\left(r_w\sqrt{\frac{\beta}{D}}\right) = 0$$

per cui, se α_n per $n = 1, 2, 3, \dots$ sono gli zeri della funzione J_0 :

$$r_w\sqrt{\frac{\beta}{D}} = \alpha_n \quad \Rightarrow \quad r_w^2 \frac{\beta}{D} = \alpha_n^2 \quad \Rightarrow \quad \beta_n = D \frac{\alpha_n^2}{r_w^2}$$

Sostituendo i valori trovati di β nella (4.16) otteniamo le soluzioni corrispondenti del problema enunciato a inizio pagina:

$$R_n(r) = a J_0\left(r \frac{\alpha_n}{r_w}\right)$$

¹²Ci sarebbero anche altre soluzioni, indipendenti da queste, date dalle funzioni di Bessel di seconda specie, ma vanno all'infinito per $t \rightarrow 0$, quindi sono da scartare per motivi fisici.

4.4.4 L'equazione in $Z(z)$

Per i valori β_n trovati, risolviamo ora la prima delle equazioni (4.14)

$$u Z'(z) + \beta_n Z(z) = 0$$

È un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine a variabili separabili:

$$Z_n(z) = \bar{a} \exp\left(-\frac{\beta_n}{u} z\right) = \bar{a} \exp\left(-\frac{D}{u} \frac{\alpha_n^2}{r_w^2} z\right)$$

4.4.5 Conclusioni

Per l'equazione (4.10) otteniamo quindi le soluzioni di tipo (4.13):

$$C_n(r, z) = a_n \exp\left(-\frac{D}{u} \frac{\alpha_n^2}{r_w^2} z\right) \cdot J_0\left(r \frac{\alpha_n}{r_w}\right) \quad (a_n = a \bar{a})$$

che soddisfano tutte la condizione $C(r_w, z) = 0$, ma non la $C(r, 0) = 1$.

Per soddisfare anche quest'ultima condizione consideriamo somme di $C_n(r, z)$ per diversi valori di n . Tali somme, per qualunque scelta degli a_n soddisfano ancora l'equazione (4.10) per la sua linearità, e si annullano anch'esse per $r = r_w$.

In realtà si considera la serie di tutte le C_n :

$$C(r, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n(r, z)$$

e si può dimostrare¹³ che queste affermazioni valgono ancora. Su questa funzione si impone la condizione $C(r, 0) = 1$. Dando a z il valore 0, i fattori esponenziali si riducono all'unità e si ottiene:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n J_0\left(r \frac{\alpha_n}{r_w}\right) = 1 \quad \forall r \in (0, r_w)$$

Si può dimostrare (vedi traccia in un successivo paragrafo) che i valori:

$$a_n = \frac{2}{\alpha_n J_1(\alpha_n)}$$

soddisfano tale condizione e quindi otteniamo la soluzione del problema (4.10)(4.11)(4.12):

$$C(r, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} \exp\left(-\frac{D}{u} \frac{\alpha_n^2}{r_w^2} z\right) J_0\left(r \frac{\alpha_n}{r_w}\right)$$

Infine, per ottenere la soluzione della equazione iniziale nell'incognita $c(r, z)$, occorre naturalmente tenere conto dell'espressione che la lega alla $C(r, z)$:

$$c(r, z) = (c_0 - c_w) C(r, z) + c_w$$

¹³Non abbiamo a che fare con serie di potenze; per una dimostrazione rigorosa occorrerebbero altre nozioni preliminari.

4.4.6 Il calcolo dei coefficienti a_n

Il problema è analogo a quello trattato nel corrispondente paragrafo a proposito della diffusione del calore: dobbiamo trovare dei coefficienti a_n che,

$\forall t = \frac{r}{r_w} \in (0, 1)$, soddisfino la relazione:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n J_0(\alpha_n t) = 1 \quad (4.17)$$

Questa volta le funzioni $J_0(\alpha_n t)$ in questione sono ortogonali rispetto al peso t come abbiamo anticipato al paragrafo 2.5.3, cioè :

$$\int_0^1 t J_0(\alpha_j t) J_0(\alpha_n t) dt = 0 \quad \text{per } j \neq n$$

Supponendo che i coefficienti a_n esistano e procedendo più euristicamente che rigorosamente¹⁴, moltiplichiamo ambo i membri della (4.17) per $t J_0(\alpha_j t)$ e integriamo fra 0 e 1:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_0^1 t J_0(\alpha_j t) J_0(\alpha_n t) dt = \int_0^1 t J_0(\alpha_j t) dt$$

Tutti i termini della serie sono nulli, tranne quello per $n = j$:

$$a_j \int_0^1 t J_0(\alpha_j t) J_0(\alpha_j t) dt = \int_0^1 t J_0(\alpha_j t) dt \quad (4.18)$$

Ricordando, dal paragrafo 2.5.3, che:

$$\int_0^1 t J_0^2(\alpha_j t) dt = \frac{1}{2} J_1^2(\alpha_j) \quad \text{e} \quad \int_0^1 x J_0(x) dx = x J_1(x)$$

e tenendo presente che gli α_j sono gli zeri della funzione J_0 , (da non confondersi con i coefficienti a_j che stiamo calcolando), la (4.18) diventa:

$$a_j \frac{J_1^2(\alpha_j)}{2} = \int_0^1 t J_0(\alpha_j t) dt = \frac{1}{\alpha_j^2} [x J_1(x)]_{x=0}^{x=\alpha_j} = \frac{J_1(\alpha_j)}{\alpha_j}$$

(si è calcolato l'integrale con la sostituzione $x = \alpha_j t$), da cui finalmente:

$$a_j = \frac{2}{\alpha_j J_1(\alpha_j)}$$

¹⁴Per esempio assumendo che l'integrale della serie sia la serie degli integrali

4.4.7 Il valor medio della soluzione

Denotiamo con \bar{c} il valor medio di una funzione c definita su un insieme A del piano:

$$\bar{c} = \frac{1}{\text{misura}(A)} \int_A c(x, y) dx dy$$

Allora, se c_0 e c_w sono costanti:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{c} - c_w}{c_0 - c_w} &= \frac{\left(\frac{1}{\text{misura}(A)} \int_A c\right) - c_w}{c_0 - c_w} = \frac{\left(\frac{1}{\text{misura}(A)} \int_A c\right) - \left(\frac{1}{\text{misura}(A)} \int_A c_w\right)}{c_0 - c_w} = \\ &= \frac{\frac{1}{\text{misura}(A)} \int_A (c - c_w)}{c_0 - c_w} = \frac{1}{\text{misura}(A)} \int_A \frac{c - c_w}{c_0 - c_w} = \overline{\left(\frac{c - c_w}{c_0 - c_w}\right)} \end{aligned}$$

Quindi per ottenere l'espressione $\frac{\bar{c} - c_w}{c_0 - c_w}$ dove c è la soluzione del problema di cui ai paragrafi precedenti, basterà calcolare la media della $C = \frac{c - c_w}{c_0 - c_w}$.

L'insieme sul quale vogliamo la media è la sezione orizzontale, cioè per z costante, della colonna verticale cilindrica, avente per asse l'asse z , e di raggio r_w .

Dal momento che stiamo operando in coordinate cilindriche, avremo:

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \frac{1}{\pi r_w^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_w} r C(r, z) dr = \quad (4.19) \\ &= 2 \int_0^1 p C(p r_w, z) dp \quad (\text{ponendo : } r = p r_w \quad dr = r_w dp) \\ &= 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_n^2 J_1(\alpha_n)} \exp\left(-\frac{D}{u} \frac{\alpha_n^2}{r_w^2} z\right) \int_0^1 \alpha_n p J_0(\alpha_n p) dp = \\ &= 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_n^2 J_1(\alpha_n)} \exp\left(-\frac{D}{u} \frac{\alpha_n^2}{r_w^2} z\right) \frac{1}{\alpha_n} \int_0^{\alpha_n} x J_0(x) dx \quad (x = \alpha_n p) \\ &= 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_n^2 J_1(\alpha_n)} \exp\left(-\frac{D}{u} \frac{\alpha_n^2}{r_w^2} z\right) \frac{1}{\alpha_n} [x J_1(x)]_0^{\alpha_n} = \\ &= 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} \exp\left(-\frac{D}{u} \frac{\alpha_n^2}{r_w^2} z\right) \end{aligned}$$

ricordando che $\int x J_0(x) dx = x J_1(x)$. E infine:

$$\frac{\bar{c} - c_0}{c_w - c_0} = \frac{\bar{c} - c_w + c_w - c_0}{c_w - c_0} = 1 - \frac{\bar{c} - c_w}{c_0 - c_w} = 1 - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} \exp\left(-\frac{D}{u} \frac{\alpha_n^2}{r_w^2} z\right)$$

Osservazione 36 Il fattore r nell'integrale (4.19) è lo Jacobiano: per rendersi conto della sua necessità, si noti che con esso si ha $\bar{C} = C$ nel caso C costante:

$$\bar{C} = \frac{1}{\pi r_w^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_w} r C dr = \frac{1}{\pi r_w^2} 2\pi C \frac{r_w^2}{2} = C$$