



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Introduzione alla teoria delle curve differenziabili

RELATORE
Prof. Alberto Alzati

TESI DI LAUREA DI
Andrea Molteni
Matricola 671966

Anno Accademico 2006/2007

Indice

Introduzione	5
1 Curve come funzioni vettoriali	7
1.1 Retta tangente	8
1.2 Curve equivalenti	9
1.3 Parametizzazioni fortemente regolari	11
1.4 Piano osculatore	12
2 Sistema di riferimento intrinseco	15
3 Lunghezza di una curva	17
3.1 Parametro arco	17
3.2 Sistema di riferimento mobile	19
4 Formule di Frénet e teorema fondamentale	20
4.1 Teorema di integrazione delle equazioni intrinseche	21
4.2 Calcolo di curvatura e torsione	23
5 Analisi locale	25
5.1 Sfere osculatrici	27
6 Evolvente ed evoluta	28
7 Teoria delle curve piane	31
7.1 Analisi locale	33
7.2 Curve a curvatura costante	34
7.3 Integrazione delle equazioni intrinseche in \mathbf{E}^2	36
7.4 Coordinate polari	37
8 Cenni sulla teoria globale delle curve piane	39
8.1 Convessità	42
8.2 Ovali	44
8.3 Disuguaglianza isoperimetrica	48
8.4 Cenni sulla teoria globale delle curve spaziali	50
A Classificazione delle 1-sottovarietà	53
B Alcuni esercizi	56
B.1 Retta tangente e piano osculatore	56
B.2 Lunghezza d'arco	58
B.3 Curvatura e torsione	58
B.4 Curve su spazi di matrici	59
Bibliografia	63

Introduzione

Con questa tesi ci siamo proposti di realizzare un'introduzione alla teoria delle curve differenziabili che risulti pienamente accessibile nei suoi contenuti ad uno studente del secondo anno del corso di laurea in Matematica. I prerequisiti sono dunque ridotti alle nozioni più basilari di algebra, geometria euclidea e calcolo differenziale ed integrale che vengono usualmente illustrate nei corsi del primo anno.

Assumendo l'opera un taglio prevalentemente didattico, lungo l'esposizione della teoria verranno anche proposti al lettore degli esercizi, che egli potrà svolgere di volta in volta per impratichirsi sui concetti appena appresi.

Nell'introdurre il concetto di curva differenziabile abbiamo deciso di sottolineare in modo particolare le differenze ed i punti di contatto con la teoria delle curve algebriche, con la quale il lettore potrebbe aver già fatto conoscenza. Questo perché nei corsi di geometria del primo anno viene solitamente affrontato lo studio delle coniche, anche se soltanto dai punti di vista della geometria affine e proiettiva. Ribadiamo tuttavia che la conoscenza di tale teoria non è necessaria per i nostri fini.

Una volta data la definizione di curva differenziabile regolare, definiremo la retta tangente in ogni suo punto. Passeremo poi ad introdurre un concetto di equivalenza tra curve, e chiariremo che l'oggetto del nostro studio non sono tanto le singole curve differenziabili quanto le classi di equivalenza a cui esse appartengono.

Nonostante la quasi totalità dei concetti che presenteremo sia applicabile a curve in generici spazi n -dimensionali, ci limiteremo in questa trattazione alle curve spaziali. E sotto tale ipotesi, $n = 3$, introdurremo il concetto di curva fortemente regolare, concetto che va essenzialmente a coincidere con la richiesta di esistenza in ogni punto di un piano cosiddetto osculatore.

Anticiperemo a questo punto l'introduzione di un sistema di riferimento mobile definito in ogni punto della curva, il cosiddetto sistema di riferimento intrinseco. La definizione di tale sistema verrà poi sviluppata una volta acquisita la capacità di calcolare la lunghezza di un arco di curva, perché si potrà in tal modo disporre di una parametrizzazione di una curva differenziabile che risulta, almeno dal punto di vista teorico, assai più comoda delle altre, la cosiddetta parametrizzazione naturale.

I tempi saranno allora maturi per presentare quello che viene chiamato il teorema fondamentale della teoria locale delle curve. Tale teorema afferma essenzialmente che ogni curva differenziabile può essere ricostruita, a meno di rototraslazioni, a partire da due opportune funzioni reali di variabile reale, che avremo per tempo introdotto e che portano rispettivamente i nomi di curvatura e torsione. Passeremo quindi ad eseguire un'analisi locale delle curve, andandone a studiare il comportamento vicino ad ogni loro punto. Introdurremo infine per le curve spaziali un celebre metodo per ricavare da una curva data delle nuove curve, definendo le cosiddette curve evolute ed evolventi.

A questo punto abbandoneremo lo spazio tridimensionale per limitarci al piano, dove scopriremo che risulta conveniente modificare alcune delle definizioni fin lì introdotte. Riproporremo allora un'analisi locale delle curve ed il teorema fon-

damentale, fornendo questa volta esplicitamente una dimostrazione costruttiva del risultato.

Sempre nel contesto delle curve piane presenteremo quella che viene detta teoria globale di tali curve. Essa tende a considerare una curva (chiusa) come un tutt'uno piuttosto che soffermarsi sull'analisi di quanto avviene nei pressi dei singoli punti. Parleremo innanzitutto di quella che viene detta curvatura totale, ed esporremo un importante risultato che ne limita i valori, nella sua forma più generale per curve differenziabili a tratti. Definiremo cosa si intende per curva convessa e forniremo una caratterizzazione di tale concetto utilizzando la funzione curvatura. Introdurremo gli ovali e procederemo quindi a discorrere sulle interessanti proprietà che possono assumere, definendo cosa si intende per vertice di una curva. Ci porremo infine il problema di stabilire quale sia la curva di lunghezza fissata che racchiude la regione di piano di area maggiore.

Nell'appendice A proponiamo poi una semplice introduzione al concetto di varietà, andando a caratterizzare topologicamente le varietà di dimensione 1. Tale introduzione vuole fungere da "ponte" tra quanto visto in questa trattazione e i successivi corsi di geometria che lo studente potrà affrontare.

Nell'appendice B riprendiamo infine in mano i concetti della teoria principale, riproponendoli da un punto di vista più pragmatico e fornendo degli esercizi svolti al quale lo studente possa attingere per rinsaldare la comprensione di quanto appreso con la teoria.

1 Curve come funzioni vettoriali

Definiamo una curva come un'applicazione

$$\underline{P} : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n (\leftrightarrow \mathbb{E}^n).$$

Per noi le curve differenziabili saranno definite solo su intervalli, anche illimitati, eventualmente chiusi o semiaperti. Tutte le componenti di \underline{P} saranno funzioni reali di variabile reale, per cui non ricorremo a quelle considerazioni sul campo complesso che si rivelano così comode per le curve algebriche, e ci atterremo scrupolosamente alla geometria differenziale reale. Per dare una definizione di curva dobbiamo però essere più esigenti. Non sarebbe sufficiente chiedere \underline{P} continua, altrimenti il supporto della curva potrebbe anche essere un oggetto bidimensionale.¹ Quello che noi chiediamo è dunque $\underline{P} \in \mathcal{C}^1(a, b)$ (che è già un bel richiedere). Scegliere una funzione con queste caratteristiche ci garantisce che il *supporto* $\text{Im } \underline{P}$ sia quello che comunemente intendiamo per curva. Siccome \underline{P} è una funzione vettoriale, chiediamo dunque che ciascuna delle sue componenti sia derivabile. Utilizzeremo spesso anche le derivate successive della funzione, indicandole con la simbologia, tipica della Meccanica,

$$\dot{\underline{P}}(t) = \frac{d\underline{P}}{dt}, \quad \ddot{\underline{P}}(t) = \frac{d^2\underline{P}}{dt^2}, \quad \dddot{\underline{P}}(t) = \frac{d^3\underline{P}}{dt^3}.$$

Assumiamo come comoda convenzione che la nostra funzione \underline{P} abbia un grado di regolarità sufficiente a giustificare tutti i passaggi analitici che stiamo facendo, quindi quando utilizziamo la derivata k -esima stiamo sottintendendo che la funzione considerata sia almeno di classe \mathcal{C}^k .

Osservazione Qualcuno potrebbe obiettare che non ha molto senso, nel caso in cui l'intervallo sia chiuso o semichiuso, parlare di condizione di classe \mathcal{C}^1 , perché le condizioni di classe \mathcal{C}^k sono definite su intervalli aperti. Ma anche qui passiamo una utile convenzione: se abbiamo un'intervallo chiuso $[a, b]$, diremo che la funzione è derivabile nel punto a se esiste la semiderivata destra in a , derivabile in b se esiste la semiderivata sinistra in b .

Chiediamo infine un'ultima importante proprietà, la *regolarità* di \underline{P} .

Definizione 1 La funzione \underline{P} si dice *regolare* se $\dot{\underline{P}}(t) \neq \underline{0} \forall t \in (a, b)$.

Ancora un po' di nomenclatura:

Definizione 2 La funzione \underline{P} si dice *semplice* se \underline{P} è iniettiva.

Definizione 3 La funzione \underline{P} si dice *chiusa* se è definita su $[a, b]$ e $\underline{P}(a) = \underline{P}(b)$.

Osservazione Per convenzione quando avremo a che fare con curve chiuse chiederemo di più, i.e. che tutti i vettori derivati (per tutti i valori per cui questo ha senso) nel punto iniziale e nel punto finale coincidano: $\underline{P}^{(k)}(a) = \underline{P}^{(k)}(b)$. Questo per evitare situazioni fastidiose, come e.g. l'avere dei punti angolosi.

Esempi Quali differenze si presentano rispetto alla teoria delle curve algebriche?

¹Ad esempio la famosa curva di Peano, definita su $[0, 1]$, per cui l'immagine di \underline{P} è costituita da tutti i punti di un quadrato.

- Consideriamo la funzione \underline{P} definita da

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Controlliamo che sia regolare:

$$\dot{\underline{P}}(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 3t^2 - 1 \end{bmatrix} \neq \underline{0} \quad \forall t.$$

Considerando questa come una curva razionale e utilizzando la teoria del risultante per trovare la curva algebrica associata risulterà una cubica irriducibile ridotta con un punto singolare nell'origine, per l'esattezza un nodo ordinario le cui tangenti principali sono le rette $y = \pm x$. Dal punto di vista della geometria differenziale, invece, questa è una curva non semplice ma del tutto regolare.

- Ben diverso è il caso della curva

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

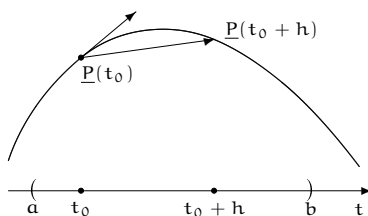
Già sappiamo che questa è una cubica cuspidata. Stavolta dal punto di vista differenziale cade la regolarità perché

$$\dot{\underline{P}}(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix} = \underline{0} \quad \text{se } t = 0.$$

La morale è che se il punto è singolare ma ordinario non ci sono problemi dal punto di vista differenziale, mentre i punti a natura cuspidale sono un problema sia per l'una che per l'altra teoria. La geometria differenziale che stiamo considerando va a vedere quello che succede vicino a ciascun punto della curva con un archetto che passa per tale punto; quindi se anche ci sono più archi che si incrociano noi ne prendiamo uno per volta e non ci accorgiamo della differenza rispetto ad un arco qualsiasi. In questo esempio però non abbiamo un archetto corrispondente ad un arco di parabola che passa per il punto cuspidale. Se noi immaginiamo di percorrere questa curva secondo il verso indotto da quello naturale che esiste su \mathbb{R} , arriviamo nell'origine con un certo vettore tangente e dobbiamo poi ripartire con un vettore tangente che ha la stessa direzione ma verso opposto.

1.1 Retta tangente

Mostriamo ora che se una curva è regolare effettivamente esiste per ogni punto una ben definita retta tangente. Nel caso generale di un intervallo (a, b) fissiamo un certo punto t_0 e diamo un incremento positivo h a questa variabile.



Quando passiamo al limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\underline{P}(t_0 + h) - \underline{P}(t_0))$$

dal punto di vista geometrico il segmento congiungente $\underline{P}(t_0)$ e $\underline{P}(t_0 + h)$ si sposta fino ad arrivare ad una direzione ben definita che è per convenzione quella della retta tangente alla curva nel punto considerato; dal punto di vista analitico questo non è nient'altro che il vettore $\dot{\underline{P}}(t_0)$. Siccome la nostra curva è regolare questo è diverso da $\underline{0}$ e ci dà appunto un vettore che individua la direzione della retta tangente nel punto in questione. Quindi la *retta tangente* nel punto $\underline{P}(t)$ è lo spazio affine di dimensione 1

$$\left(\underline{P}(t), \langle \dot{\underline{P}}(t) \rangle \right).$$

1.2 Curve equivalenti

Vale ora la pena di riflettere sul perché invece di chiamare curva il supporto della curva si preferisce chiamare curva l'applicazione stessa. La motivazione risiede nel fatto che noi siamo maggiormente interessati a sapere come il supporto viene percorso; infatti ci sono curve che percorrono lo stesso insieme di punti ma in maniera diversa, e a noi interessa mantenere distinti questi fenomeni.

Esempio Consideriamo queste tre curve:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad \begin{cases} x = \tau^2 \\ y = \tau^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \eta^3 \\ y = \eta^3 \end{cases}$$

Tutti i parametri sono definiti su $(-\infty, +\infty)$ e danno ovviamente curve differenziabili di classe analitica. Considerando però i vettori derivati

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2\tau \\ 2\tau \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3\eta^2 \\ 3\eta^2 \end{bmatrix}$$

notiamo che, mentre la prima curva è regolare, le altre due non lo sono. Ciononostante, il supporto della prima e dell'ultima curva è esattamente lo stesso insieme di punti, i.e. la retta $y = x$, mentre il supporto della seconda è una semiretta.

Introduciamo quindi il concetto di curve equivalenti, dopodiché l'oggetto dei nostri studi saranno le classi d'equivalenza di curve. Supponiamo di avere due curve

$$\underline{P} : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^n \quad \underline{Q} : (c, d) \rightarrow \mathbb{E}^n.$$

Definizione 4 Diciamo che \underline{P} , \underline{Q} sono *equivalenti* se esiste una funzione $t = t(\tau)$ biunivoca, bicontinua e bidifferenziabile² che trasforma l'intervallo (c, d) nell'intervallo (a, b) e t.c. $\underline{P}[t(\tau)] = \underline{Q}(\tau)$.

Esempio Riprendiamo l'esempio precedente per vedere se le curve sono equivalenti. Per passare dalla prima alla seconda curva bisogna scegliere $t = \tau^2$, ma tale applicazione non è biunivoca, quindi le due curve non sono equivalenti. Se invece andiamo a considerare la terza curva dobbiamo porre $t = \eta^3$; questa funzione è biunivoca e bicontinua, ma non bidifferenziabile perché la sua inversa $\eta = \sqrt[3]{t}$ non è differenziabile per $t = 0$. Pertanto neanche queste due curve sono equivalenti su $(-\infty, +\infty)$. Se però consideriamo intervalli più ridotti riusciamo a realizzare un'equivalenza. Se ad esempio prendessimo $t \in (0, +\infty)$, $\tau \in (0, +\infty)$ allora effettivamente e.g. la prima e la seconda curva sarebbero equivalenti.

In teoria, tutte le proprietà relative a una curva che noi citeremo dovrebbero essere testate tenendo conto di questa relazione di equivalenza, al fine di dimostrare che sono invarianti; tuttavia non sempre lo faremo. Una cosa possiamo però mostrarla subito, ed è l'invarianza della condizione di regolarità.

²In realtà "bidifferenziabile" implica "bicontinua" e "bicontinua" implica "biunivoca".

Dimostrazione La regolarità corrisponde al fatto che il vettore derivato è sempre diverso da zero. Calcoliamo dunque la derivata dei due vettori $\underline{Q}(\tau)$ e $\underline{P}[t(\tau)]$.

$$\frac{d\underline{Q}}{d\tau} = \frac{d\underline{P}}{dt} \frac{dt}{d\tau}.$$

Attenzione a non farsi trarre in inganno: questa relazione vuol dire che se prendo un certo valore $\bar{\tau}$ e in corrispondenza di questo considero un valore $\bar{t} = t(\bar{\tau})$ allora

$$\left. \frac{d\underline{Q}}{d\tau} \right|_{\bar{\tau}} = \left. \frac{d\underline{P}}{dt} \right|_{\bar{t}} \left. \frac{dt}{d\tau} \right|_{\bar{\tau}}.$$

Si noti inoltre che i primi due oggetti a sinistra sono funzioni vettoriali, mentre l'ultimo è una funzione scalare.³ Ora, siccome la funzione $t(\tau)$ è biunivoca, bicontinua e bidifferenziabile, di certo

$$\frac{dt}{d\tau} \neq 0 \quad \forall \tau,$$

e quindi

$$\frac{d\underline{Q}}{d\tau} \neq 0,$$

dunque l'esistenza di una retta tangente – qualunque sia la parametrizzazione della nostra curva – è garantita, purché almeno una curva della classe d'equivalenza sia regolare. \square

Potremmo chiederci perché questa definizione di equivalenza è sensata, perché dobbiamo utilizzare proprio questa e non un'altra. Il motivo è che vogliamo catturare le varie parametrizzazioni di uno stesso insieme di punti che risulta luogo di zeri di opportune funzioni regolari.

Esempio Nel piano possiamo considerare funzioni $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e chiederci quale sia il loro luogo degli zeri, ovvero il luogo dei punti nel piano \mathbb{R}^2 su cui una data funzione si annulla. Per esempio

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

dà luogo alla circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine. Esistono teoremi dell'Analisi che garantiscono la possibilità di parametrizzare localmente insiemi di punti che sono luoghi di zeri di funzioni sufficientemente regolari; il teorema chiave è il cosiddetto teorema del Dini.⁴ Nel caso di funzioni di due variabili, sostanzialmente il messaggio è questo: se almeno una derivata parziale è non-nulla allora possiamo scegliere un piccolo sottoinsieme del nostro insieme di punti e parametrizzarlo utilizzando un sottoinsieme dell'asse delle x o un sottoinsieme dell'asse delle y . Se per esempio $f_y \neq 0$ in un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ del luogo allora esiste sull'asse x un opportuno intorno U di x_0 tale che

$$\exists \varphi : U \rightarrow \mathbb{R} : f(x, \varphi(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in U.$$

³Solitamente i valori scalari si scrivono preposti ai vettori, ma questa funzione scalare è nata in modo naturale dalla legge di derivazione delle funzioni composte.

⁴Il teorema della funzione implicita, conosciuto anche come teorema del Dini, stabilisce quando il luogo di zeri di un'equazione implicita si può esplicitare rispetto a una variabile.

Teorema [della funzione implicita] Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ una funzione di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$. Indichiamo con (x, y) le coordinate di \mathbb{R}^{m+n} , dove $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Sia $p_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ tale che $f(p_0) = 0$ e $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(p_0) \right) \neq 0$. Allora esistono un intorno $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ di p_0 , un intorno $V \subset \mathbb{R}^m$ di x_0 e un'applicazione $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe \mathcal{C}^k tale che $U \cap \{p \in \Omega : f(p) = 0\}$ è costituito da tutti e soli i punti della forma $(x, g(x))$ con $x \in V$.

Se invece $f_x \neq 0$ in P_0 allora esiste sull'asse y un opportuno intorno V di y_0 tale che

$$\exists \psi : V \rightarrow \mathbb{R} : f(\psi(y), y) \equiv 0 \quad \forall y \in V.$$

Nel nostro caso queste due funzioni si possono scrivere molto facilmente:

$$\varphi : \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases} \quad t \in U \qquad \psi : \begin{cases} x = \sqrt{1-\tau^2} \\ y = \tau \end{cases} \quad \tau \in V$$

Sussiste inoltre una relazione tra le due funzioni:

$$t = t(\tau) = \sqrt{1-\tau^2},$$

che è proprio del tipo che abbiamo considerato prima.

1.3 Parametrazioni fortemente regolari

Tratteremo questo argomento essenzialmente nello spazio, ponendo $n = 3$.

Definizione 5 Sia $\underline{P} = \underline{P}(t)$ una curva regolare, $\dot{\underline{P}} \neq \underline{0}$. Se⁵

$$\dot{\underline{P}}(t) \wedge \ddot{\underline{P}}(t) \neq \underline{0} \quad \forall t$$

allora \underline{P} è detta *fortemente regolare*.

È bene cominciare introducendo dei risultati utili per operare nel nostro spazio vettoriale \mathbf{E}^3 su \mathbb{R} in relazione al calcolo differenziale.

Proposizione 1.1 Siano $\underline{P}(t)$, $\underline{Q}(t)$ due vettori funzioni di un parametro t . Valgono:

$$\begin{aligned} \frac{d(\underline{P}(t) \times \underline{Q}(t))}{dt} &= \dot{\underline{P}}(t) \times \underline{Q}(t) + \underline{P}(t) \times \dot{\underline{Q}}(t) \\ \frac{d(\underline{P}(t) \wedge \underline{Q}(t))}{dt} &= \dot{\underline{P}}(t) \wedge \underline{Q}(t) + \underline{P}(t) \wedge \dot{\underline{Q}}(t) \end{aligned}$$

Esercizio 1 Fare i conti: scrivere espressamente cosa significa fare il prodotto scalare e, passando alle coordinate dei vettori, calcolare le derivate.

Osservazione Se abbiamo un vettore $\underline{P}(t)$ con norma costante (e.g. un versore) possiamo dire qualcosa sul suo vettore derivato:

$$\|\underline{P}\| = \sqrt{\underline{P} \times \underline{P}} = (\underline{P} \times \underline{P})^{\frac{1}{2}}$$

è costante, quindi $\underline{P} \times \underline{P}$ è costante, e derivando abbiamo

$$\dot{\underline{P}} \times \underline{P} + \underline{P} \times \dot{\underline{P}} = 0,$$

ovvero $\underline{P} \perp \dot{\underline{P}}$.

Prima di passare a studiare le curve fortemente regolari, ci interessa sapere cosa succede qualora $\dot{\underline{P}}(t) \wedge \ddot{\underline{P}}(t) = \underline{0}$.

⁵Ovvero se $\dot{\underline{P}}$ e $\ddot{\underline{P}}$ sono sempre linearmente indipendenti.

Proposizione 1.2 Sia la coppia $\{\underline{P}(t) \neq \underline{0}, \dot{\underline{P}}(t)\}$ dipendente $\forall t$. Allora

$$\underline{P}(t) = f(t)\underline{v}$$

con $f(t)$ funzione scalare e \underline{v} vettore costante.

Dimostrazione La dipendenza della coppia significa che $\forall t \exists (\alpha(t), \beta(t)) \neq (0, 0)$ t.c.

$$\alpha(t)\underline{P}(t) + \beta(t)\dot{\underline{P}}(t) = \underline{0}.$$

Siccome $\underline{P}(t) \neq \underline{0}$, non può succedere $\beta(t) = 0$. Possiamo quindi dividere per $\beta(t)$ ottenendo

$$\dot{\underline{P}}(t) = \lambda(t)\underline{P}(t).$$

Consideriamo il vettore ausiliario

$$\underline{Q}(t) := \frac{\underline{P}(t)}{\|\underline{P}(t)\|} = (\underline{P}(t) \times \underline{P}(t))^{-\frac{1}{2}}\underline{P}(t),$$

in breve

$$\underline{Q} = (\underline{P} \times \underline{P})^{-\frac{1}{2}}\underline{P}.$$

Calcoliamone la derivata:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{Q}} &= -\frac{1}{2}(\underline{P} \times \underline{P})^{-\frac{3}{2}}(\dot{\underline{P}} \times \underline{P} + \underline{P} \times \dot{\underline{P}})\underline{P} + (\underline{P} \times \underline{P})^{-\frac{1}{2}}\dot{\underline{P}} \\ &= -(\underline{P} \times \underline{P})^{-\frac{3}{2}}(\lambda\underline{P} \times \underline{P})\underline{P} + (\underline{P} \times \underline{P})^{-\frac{1}{2}}\lambda\underline{P} = \underline{0}. \end{aligned}$$

Pertanto $\underline{Q}(t) = \frac{\underline{P}(t)}{\|\underline{P}(t)\|}$ sarà un certo vettore costante \underline{v} . Allora $\underline{P}(t) = f(t)\underline{v}$ con $f(t) = \|\underline{P}(t)\|$. \square

Osservazione Possiamo applicare questo risultato anche a $\{\dot{\underline{P}}, \ddot{\underline{P}}\}$, in quanto $\dot{\underline{P}}(t) \neq \underline{0}$, quindi se la coppia è dipendente l'apice del vettore $\dot{\underline{P}}(t)$ si sposta lungo una retta passante per l'origine: $\underline{P}(t) = g(t)\underline{v}$. Questo significa che sarà

$$\underline{P}(t) = \left(\int g(t) dt \right) \underline{v} + \underline{k}.$$

Pertanto la condizione che i due vettori siano sempre l.d. equivale a dire che il supporto della nostra curva è contenuto dentro una retta; situazione ben poco significativa, perché è come avere una curva a valori in \mathbb{R} invece che in \mathbb{R}^3 , ed è possibile riparametrizzare il tutto considerando una curva a valori in \mathbb{R} . Quindi possiamo sempre supporre che $\dot{\underline{P}}, \ddot{\underline{P}}$ non siano l.d. Potrebbe anche succedere che una curva non abbia questi due vettori identicamente dipendenti ma che la condizione di dipendenza sia verificata in qualche punto isolato. In tal caso la curva sarà regolare ma non fortemente regolare, e i punti per cui i due vettori non sono l.i. vengono a volte chiamati *flessi* della curva.

Osservazione Quest'ultima proposizione si può estendere: se abbiamo 3 vettori

$$\underbrace{\{\underline{P}(t), \dot{\underline{P}}(t), \ddot{\underline{P}}(t)\}}_{\text{l.i.}}$$

dipendenti, allora l'apice del vettore $\underline{P}(t)$ si muove rimanendo su un piano uscente dall'origine. Analogamente la proprietà si generalizza in spazi di dimensioni superiori: se un vettore e i suoi primi $n-1$ derivati sono l.d. ma i primi $n-1$ vettori sono l.i. allora l'apice del vettore $\underline{P}(t)$ si muove lungo uno spazio lineare di dimensione $n-1$ passante per l'origine.

1.4 Piano osculatore

Se una curva è fortemente regolare allora ammette in ciascuno dei suoi punti un ben definito *piano osculatore*.⁶ Se invece è regolare ma in alcuni punti non è

⁶Dal latino *osculari* 'baciare'.

fortemente regolare allora in tali punti il piano osculatore non è definito.

Definizione 6 Il *piano osculatore* in un punto di una curva è un piano passante per quel punto e tale che la molteplicità d'intersezione fra il piano e la curva nel punto sia ≥ 3 .

Ma come si definisce la molteplicità d'intersezione fra le nostre curve e un piano? Consideriamo un punto qualunque della nostra curva. Possiamo pensarlo corrispondente a $t = 0$, perché qualunque sia l'intervallo di definizione della curva tramite una traslazione sull'asse delle t possiamo far sì che l'intervallo contenga l'origine del sistema di riferimento; tale traslazione ci farà passare dalla nostra curva ad una curva equivalente definita su un intervallo (α, β) contenente l'origine. Consideriamo dunque un piano generico dello spazio

$$ax + by + cz + d = 0$$

e componiamo la funzione polinomiale con la nostra curva di equazioni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

ottenendo

$$h(t) = ax(t) + by(t) + cz(t) + d.$$

I punti d'intersezione saranno ovviamente quelli corrispondenti ai valori di t per cui $h(t) = 0$; quindi per le nostre ipotesi sarà $h(0) = 0$. Per determinare la molteplicità d'intersezione del piano e della curva nel punto dobbiamo supporre come sempre che la funzione $\underline{P}(t)$ abbia un elevato grado di regolarità, dopodiché anche la $h(t)$ sarà molto regolare, tanto da poter essere sviluppata in serie di Taylor:

$$h(t) = \underbrace{h(0)}_0 + \dot{h}(0)t + \ddot{h}(0)\frac{t^2}{2} + \ddot{\ddot{h}}(0)\frac{t^3}{6} + \dots$$

Se $\dot{h}(0) \neq 0$ la molteplicità d'intersezione è 1, se $\dot{h}(0) = 0$ ma $\ddot{h}(0) \neq 0$ la molteplicità d'intersezione è 2, e così via. In sostanza si danno le stesse definizioni che si danno nella teoria delle curve algebriche, solo che in quel caso la definizione corrisponde alla molteplicità della radice $t = 0$ di un polinomio, mentre qui $h(t)$ non è un polinomio, bensì uno sviluppo *a priori* infinito.

Se vogliamo che la molteplicità d'intersezione sia ≥ 3 ci basta chiedere che h, \dot{h}, \ddot{h} si annullino in 0. Per trovare il piano imponiamo dunque tali condizioni:

$$\begin{cases} ax(0) + by(0) + cz(0) + d = 0 \\ a\dot{x}(0) + b\dot{y}(0) + c\dot{z}(0) = 0 \\ a\ddot{x}(0) + b\ddot{y}(0) + c\ddot{z}(0) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo un sistema di 3 equazioni in 4 incognite a, b, c, d , e questo è sufficiente per determinare la quaterna a meno di un suo multiplo. Questo sistema corrisponde ad un'applicazione lineare

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

di cui ci interessa il nucleo. Se il rango della matrice relativa è massimo allora il nucleo ha dimensione 1, dunque esiste una quaterna soluzione $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ e tutte le altre soluzioni sono suoi multipli. Quindi il piano osculatore esisterà unico se e solo se $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk} \varphi = 3$. Scriviamo la matrice dei coefficienti del sistema, ottenendo

$$\operatorname{rk} \begin{bmatrix} x(0) & y(0) & z(0) & 1 \\ \dot{x}(0) & \dot{y}(0) & \dot{z}(0) & 0 \\ \ddot{x}(0) & \ddot{y}(0) & \ddot{z}(0) & 0 \end{bmatrix} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rk} \begin{bmatrix} \dot{x}(0) & \dot{y}(0) & \dot{z}(0) \\ \ddot{x}(0) & \ddot{y}(0) & \ddot{z}(0) \end{bmatrix} = 2.$$

Se consideriamo la trasposta di questa sottomatrice vediamo una matrice 3×2 che coincide con

$$[\dot{\underline{P}}(0) \mid \ddot{\underline{P}}(0)]$$

quindi chiedere che abbia rango 2 corrisponde a chiedere l'indipendenza di questi due vettori. Pertanto supponendo che la curva sia fortemente regolare in ogni punto troveremo ivi un solo piano osculatore.

Per scrivere le equazioni di tale piano bisogna tenere presente che i due vettori $\dot{\underline{P}}(t), \ddot{\underline{P}}(t)$ hanno la funzione di generare lo spazio direttore del nostro piano osculatore. Il piano che stiamo cercando risulta quindi essere

$$(\underline{P}(t), \langle \dot{\underline{P}}(t), \ddot{\underline{P}}(t) \rangle)$$

e possiamo ottenere le sue equazioni scrivendo quelle del piano che passa per quel punto e ha quello come spazio direttore:

$$\det \begin{bmatrix} x - x(t) & y - y(t) & z - z(t) \\ \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{bmatrix} = 0.$$

Questa è peraltro la trasposta di

$$[\underline{P} - \underline{P}(t) \mid \dot{\underline{P}}(t) \mid \ddot{\underline{P}}(t)].$$

Il piano osculatore contiene la retta tangente, perché nello spazio direttore del piano c'è ovviamente lo spazio lineare affine che passa per il punto e che ha come spazio direttore quello generato da $\dot{\underline{P}}(t)$, che è esattamente la retta tangente.

Verifichiamo ora che la definizione del piano osculatore per una curva fortemente regolare è indipendente dalla rappresentante scelta all'interno della classe di equivalenza della curva.

Dimostrazione Sia la nostra curva $\underline{P} = \underline{P}(t)$ equivalente a $\underline{Q} = \underline{Q}(\tau)$ con la solita condizione su $t = t(\tau)$. Il piano osculatore di \underline{Q} sarà

$$(\underline{Q}(\tau), \langle \dot{\underline{Q}}(\tau), \ddot{\underline{Q}}(\tau) \rangle).$$

Fissiamo i parametri $\bar{\tau}, \bar{t} = t(\bar{\tau})$.

$$\underline{P}(\bar{t}) = \underline{P}[t(\bar{\tau})] = \underline{Q}(\bar{\tau})$$

Il problema è capire cosa succede nei vettori derivati.

$$\begin{aligned}\underline{\dot{Q}}(\tau) &= \frac{d\underline{P}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\ \underline{\dot{Q}}(\bar{\tau}) &= \underbrace{\dot{\underline{P}}(\bar{t})}_{\alpha \neq 0} \frac{dt}{d\tau} \Big|_{\bar{\tau}} \\ \frac{d^2\underline{Q}}{d\tau^2} \Big|_{\bar{\tau}} &= \frac{d^2\underline{P}}{dt^2} \Big|_{\bar{t}} \left(\frac{dt}{d\tau} \Big|_{\bar{\tau}} \right)^2 + \frac{d\underline{P}}{dt} \Big|_{\bar{t}} \underbrace{\frac{d^2t}{d\tau^2} \Big|_{\bar{\tau}}}_{\beta} \\ \underline{\ddot{Q}}(\bar{\tau}) &= \alpha^2 \underline{\ddot{P}}(\bar{t}) + \beta \underline{\dot{P}}(\bar{t})\end{aligned}$$

Consideriamo ora:

$$\begin{cases} \underline{\dot{Q}}(\bar{\tau}) = \alpha \underline{\dot{P}}(\bar{t}) \\ \underline{\ddot{Q}}(\bar{\tau}) = \beta \underline{\dot{P}}(\bar{t}) + \alpha^2 \underline{\ddot{P}}(\bar{t}) \end{cases}$$

Questa è la relazione che lega i due vettori che generano lo spazio dei vettori del piano osculatore quando la curva è parametrizzata secondo \underline{Q} e i due che lo generano quando è parametrizzata secondo \underline{P} . Sono coppie di vettori dello stesso spazio vettoriale euclideo bidimensionale, e la matrice che dà la combinazione lineare è la matrice dei coefficienti. Risulta

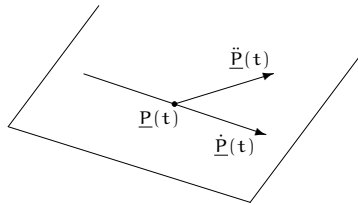
$$\det \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \alpha^2 \end{bmatrix} = \alpha^3 \neq 0,$$

quindi abbiamo in sostanza un cambiamento del sistema di riferimento nello spazio direttore. Da questo concludiamo:

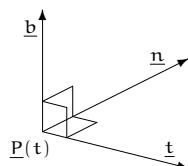
- Se una curva è fortemente regolare qualsiasi altra sua equivalente è fortemente regolare, perché $\underline{Q}(t), \underline{\dot{Q}}(t)$ si scrivono come combinazione lineare di due vettori l.i. tramite una matrice 2×2 con determinante non-nullo e sono dunque a loro volta l.i.
- Lo spazio direttore del piano osculatore nei punti corrispondenti è lo stesso: nel primo caso il piano passa per il punto $\underline{P}(t)$ e ha come spazio direttore $\langle \underline{\dot{P}}(t), \underline{\ddot{P}}(t) \rangle$; nel secondo caso passa per $\underline{Q}(\tau)$ e ha come spazio direttore $\langle \underline{\dot{Q}}(\tau), \underline{\ddot{Q}}(\tau) \rangle$. Siccome questi due vettori sono in realtà dipendenti dai primi, lo spazio che generano è lo stesso, cambia solo la base. Quindi in pratica il passaggio da una curva ad una equivalente non fa altro che cambiare la base di un sistema di riferimento mobile. \square

2 Sistema di riferimento intrinseco

Come si fa ad assegnare un sistema di riferimento mobile nel generico punto di una curva fortemente regolare?



Il sistema di riferimento sarà dato assegnando una terna destrorsa:⁷ sarà costituita da 3 versori mutuamente ortogonali tali che il determinante della matrice ortogonale data dalle loro coordinate sia 1 (e non -1), il che ci garantisce che esiste un movimento rigido che sposta la terna fissa del sistema di riferimento di \mathbb{E}^3 sulla terna mobile.⁸ Facciamo dunque conoscenza con questi vettori:⁹



\underline{t} versore tangente
 \underline{n} versore normale principale
 \underline{b} versore binormale

Si definiscono così:

$$\underline{t} = \frac{\dot{\underline{P}}(t)}{\|\dot{\underline{P}}(t)\|}$$

$$\underline{b} = \frac{\dot{\underline{P}}(t) \wedge \ddot{\underline{P}}(t)}{\|\dot{\underline{P}}(t) \wedge \ddot{\underline{P}}(t)\|}$$

$$\underline{n} = \underline{b} \wedge \underline{t}$$

Si noti che il terzo vettore viene di conseguenza: il prodotto vettoriale di ciascuna coppia (nel giusto ordine) è sempre il terzo vettore. Con questa scelta ci garantiamo che la nostra base $\{\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}\}$ sia ortonormale e ottenibile da quella fissa tramite un movimento rigido. In seguito avremo occasione di vedere perché si utilizza proprio questa definizione e non un'altra.

Digressione Un tale sistema di riferimento è detto *sistema di Frénet*, e può essere generalizzato a curve in \mathbb{E}^n . Si consideri una curva $\underline{P} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che le derivate $\dot{\underline{P}}(t), \ddot{\underline{P}}(t), \dots, \underline{P}^{(n-1)}(t)$ siano linearmente indipendenti. Il sistema di Frénet n -dimensionale di tale curva è dato da n mappe differenziabili $\underline{e}_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$, tali che

$$\underline{e}_i(t) \times \underline{e}_j(t) = \delta_{ij} \quad \forall t \in I$$

e

$$\underline{P}^{(k)}(t) \in \langle \underline{e}_1(t), \dots, \underline{e}_k(t) \rangle \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Si pongono inoltre le seguenti richieste:

- (i) Per ogni $k = 1, \dots, n-1$, le basi $\{\dot{\underline{P}}(t), \dots, \underline{P}^{(k)}(t)\}$ e $\{\underline{e}_1(t), \dots, \underline{e}_k(t)\}$ devono avere la stessa orientazione, ovvero la trasformazione lineare che porta una base nell'altra deve avere determinante positivo.
- (ii) La base $\{\underline{e}_1(t), \dots, \underline{e}_n(t)\}$ deve avere orientazione positiva, cioè la stessa orientazione della base canonica di \mathbb{R}^n .

Assunto ciò, si può provare (si veda ad esempio [9]) che esiste un unico sistema di Frénet per la curva in questione, costruibile nella pratica mediante il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

⁷Questo perché vogliamo che lo spostamento della terna dal sistema di riferimento fisso a quello mobile possa avvenire tramite un movimento rigido.

⁸Questa non è una convenzione universalmente adottata, ma noi per comodità la assumeremo.

⁹A riguardo della figura: i tre vettori sarebbero spiccati dall'origine del sistema di riferimento, mentre qui sono raffigurati tre loro rappresentanti della classe di equipollenza uscenti dal punto $\underline{P}(t)$ per rendere la rappresentazione più evocativa.

3 Lunghezza di una curva

Vogliamo ora individuare all'interno della classe di equivalenza di ogni curva alcuni rappresentanti che sono più comodi da usare (almeno dal punto di vista teorico, seppur molto meno da quello pratico). Questa rappresentazione si dice fatta attraverso un *parametro naturale* (o *parametro arco*).

Il discorso parte dalla determinazione della lunghezza di un arco di curva. Supponiamo sempre di avere la nostra curva fortemente regolare

$$\underline{P} : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^3$$

e prendiamo due valori del parametro t_1, t_2 , da cui i punti $\underline{P}(t_1), \underline{P}(t_2)$. Vogliamo misurare la lunghezza dell'arco di curva compreso fra questi due punti. L'idea è di considerare una certa poligonale inscritta a questa curva, sicché calcolando la somma delle distanze tra i punti di tale poligonale abbiamo più o meno un'idea di quella che può essere la lunghezza della curva. È chiaro che la curva sarà in generale più lunga del numero così ottenuto, ma volendo approssimare ulteriormente questa valutazione si possono considerare delle poligonali con un numero maggiore di vertici, sempre presi lungo il supporto della curva. Facendo tendere a infinito questa operazione (purché il limite esista finito), quello che otterremo sarà la lunghezza del nostro arco di curva. In termini analitici, quello che si fa è andare a considerare un certo numero di punti intermedi t_i del parametro fra t_1 e t_2 , e considerare

$$\sum_i \|\underline{P}(t_{i+1}) - \underline{P}(t_i)\|.$$

Ora possiamo dividere e moltiplicare per $(t_{i+1} - t_i)$, e poiché tale quantità è positiva possiamo anche portarla all'interno della norma:

$$\sum_i \left\| \frac{\underline{P}(t_{i+1}) - \underline{P}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right\| (t_{i+1} - t_i).$$

Adesso si vede che, facendo tendere a zero il passo della suddivisione, cioè $|t_{i+1} - t_i|$, la frazione rappresenta esattamente il rapporto incrementale della funzione \underline{P} , quindi quando passiamo al limite questa espressione diventa

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\underline{P}}(\tau)\| d\tau, \quad (1)$$

e corrisponde esattamente alla lunghezza del nostro arco.

3.1 Parametro arco

All'interno dell'intervallo di definizione (a, b) della nostra curva scegliamo un certo punto t_0 e una variabile t corrispondente a un punto generico. Calcoliamo la lunghezza dell'arco di curva compreso tra questi due punti:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\underline{P}}(\tau)\| d\tau.$$

Questa è in pratica una lunghezza con segno misurata a partire da $\underline{P}(t_0)$, che tiene conto dell'orientamento che è stato indotto sulla curva da quello naturale di \mathbb{R} .

Siccome questa è una funzione integrale, possiamo calcolare

$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{\underline{P}}(t)\| > 0$$

perché la curva è regolare. Quindi la funzione $s = s(t)$ è una funzione derivabile con derivata sempre strettamente positiva, dunque monotona crescente e pertanto invertibile. Esiste allora una certa funzione $t = t(s)$ che la inverte, anch'essa è una funzione continua e derivabile e la sua derivata è esattamente pari punto per punto al reciproco di quella di s :

$$\left. \frac{dt}{ds} \right|_s = \frac{1}{\|\dot{\underline{P}}(\bar{t})\|}.$$

Questo ci dice che nella nostra curva possiamo sostituire al posto del parametro t questa funzione $t = t(s)$ e passare dalla curva rappresentata in funzione del parametro t alla curva rappresentata in funzione del parametro s , dove si intende $\underline{P}(s) = \underline{P}[t(s)]$. Questo parametro s che abbiamo introdotto prende il nome di *parametro naturale* (o *parametro arco*). Sarebbe anzi il caso di chiamarlo *un* parametro arco, perché non è univocamente determinato. Per esempio, noi abbiamo scelto arbitrariamente il valore iniziale t_0 ; potevamo scegliere invece un altro valore t_1 , e chiaramente avremmo trovato un altro parametro naturale

$$\sigma(t) = \int_{t_1}^t \|\dot{\underline{P}}(\tau)\| d\tau,$$

e questo sarebbe differito dal precedente s semplicemente per una costante, cioè

$$\int_{t_0}^t \|\dot{\underline{P}}(\tau)\| d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\underline{P}}(\tau)\| d\tau + \int_{t_1}^t \|\dot{\underline{P}}(\tau)\| d\tau \Rightarrow s = k + \sigma.$$

Non solo, ma abbiamo anche scelto arbitrariamente il verso di percorrenza. Cambiandolo, il parametro s diventa $-s$. Morale: tutti i parametri naturali sono della forma

$$\sigma = \pm s + k.$$

Esempio [eliche cilindriche] Supponiamo di avere una curva così rappresentata:

$$\begin{cases} x = r \cos t & t \in \mathbb{R} \\ y = r \sin t & r, k > 0 \\ z = kt \end{cases}$$

Vogliamo scrivere questa curva in funzione di un parametro arco. Scegliamo $t_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{P}}(t) &\leftrightarrow \begin{bmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ k \end{bmatrix} & \|\dot{\underline{P}}(t)\| &= \sqrt{r^2 + k^2} := h \\ s(t) &= \int_0^t h d\tau = h[\tau]_0^t = ht & \Rightarrow & t = \frac{s}{h}. \end{aligned}$$

Pertanto in questo caso una rappresentazione parametrica naturale si trova immediatamente:

$$\begin{cases} x = r \cos\left(\frac{s}{h}\right) \\ y = r \sin\left(\frac{s}{h}\right) \\ z = k \frac{s}{h} \end{cases}$$

Esercizio 2 Verificare che la curva dell'esempio è fortemente regolare e calcolare in ogni punto il piano osculatore.

Osservazione Per convenzione universale, quando si deriva \underline{P} rispetto ad un parametro t qualunque il vettore derivato si indica con $\underline{P}'(t)$, quando invece si deriva rispetto a un qualunque parametro arco si indica con $\underline{P}'(s)$.

3.2 Sistema di riferimento mobile

Vediamo perché è così comodo usare una parametrizzazione del tipo appena introdotto. Supponiamo di avere una rappresentazione naturale per la nostra curva e andiamo a considerare il vettore $\underline{P}'(s)$, vettore tangente nel generico punto della curva. Prima osservazione: questo vettore è in realtà un versore. Infatti:

$$\underline{P}'(s) = \frac{d\underline{P}}{ds} = \frac{d\underline{P}}{dt} \frac{dt}{ds}$$

$$\|\underline{P}'(\bar{s})\| = \left\| \frac{d\underline{P}}{ds} \Big|_{\bar{s}} \right\| = \left\| \frac{d\underline{P}}{dt} \Big|_{\bar{t}} \frac{dt}{ds} \Big|_{\bar{s}} \right\| = \left\| \dot{\underline{P}}(\bar{t}) \cdot \frac{1}{\|\underline{P}'(\bar{t})\|} \right\| = 1.$$

per ogni valore \bar{s} del parametro. Possiamo allora considerare il vettore

$$\underline{t}(s) = \underline{P}'(s),$$

che sarà il primo dei tre versori del sistema di riferimento intrinseco da associare alla curva. Vediamo subito qual è il secondo. A suo tempo abbiamo mostrato che il vettore derivato di un versore in funzione di un parametro è sempre perpendicolare al versore di partenza. Possiamo dunque eseguire questa operazione (essendo la curva fortemente regolare) per definire il vettore normale principale:

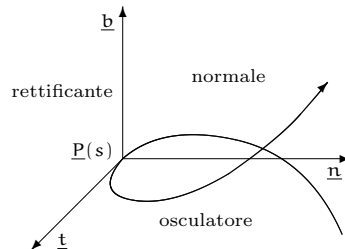
$$\underline{n}(s) = \frac{\underline{P}''(s)}{\|\underline{P}''(s)\|}.$$

Definizione 7 La funzione $c(s) = \|\underline{P}''(s)\|$ si dice *curvatura* della curva.

Il terzo versore, il versore binormale, è semplicemente definito come

$$\underline{b}(s) = \underline{t}(s) \wedge \underline{n}(s).$$

Quindi la nostra terna è costituita dai tre versori $\{\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}\}$ dipendenti da s ; l'ordine è importante, perché vogliamo un sistema di riferimento mobile destrorso, e quindi ottenibile dalla terna $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ del sistema di riferimento fisso in maniera tale che il movimento che porta la prima terna nella seconda sia rigido. Naturalmente, siccome il piano osculatore è definito come il piano che passa per un certo punto generato da \underline{P}' , \underline{P}'' , possiamo ben dire che esso ha come spazio direttore lo spazio generato da \underline{t} e \underline{n} . Inoltre, il piano generato dai versori \underline{n} e \underline{b} è detto *piano normale*, e il piano generato da \underline{t} e \underline{b} è detto *piano rettificante*.



Vediamo ora qualche utilità pratica della nostra terna mobile. Se ho una curva e a partire da questa ne voglio costruire una nuova, può darsi che il generico punto della nuova curva abbia delle coordinate che si scrivono in maniera molto complicata rispetto al sistema di riferimento fisso, ma molto semplice rispetto al sistema di riferimento mobile.

Esempio Se vogliamo una curva il cui generico punto sia esattamente l'apice del versore tangente in ogni punto ad una vecchia curva, abbiamo nel sistema di riferimento fisso $\underline{Q}(s) = \underline{P}(s) + \underline{t}(s)$, mentre nel sistema di riferimento mobile il generico punto di questa curva ha addirittura coordinate costanti:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Un'applicazione più teorica è questa: sapendo come si muove il sistema di riferimento mobile possiamo in realtà ricostruire l'intera curva. Questo risultato è noto come *teorema di integrazione delle equazioni intrinseche*. Prima di discuterne bisogna però introdurre le formule di Frénet.

4 Formule di Frénet e teorema fondamentale

Definizione 8 Si dice *torsione* $\tau(s)$ della curva il coefficiente con cui si decompone il vettore derivato del versore normale principale rispetto al versore binormale.

L'idea ora è quella di andare a considerare come varia il sistema di riferimento mobile rispetto a sé stesso. Ovvero: per sapere come varia il sistema di riferimento in generale si derivano i versori che danno il sistema rispetto alla variabile s . Esistono tre formule molto semplici che esprimono la decomposizione dei vettori derivati rispetto al sistema di riferimento mobile, e che prendono il nome di *formule di Frénet*:

$$\begin{cases} \underline{t}'(s) = & c(s)\underline{n}(s) \\ \underline{n}'(s) = & -c(s)\underline{t}(s) & +\tau(s)\underline{b}(s) \\ \underline{b}'(s) = & -\tau(s)\underline{n}(s) \end{cases} \quad (2)$$

Digressione Notiamo che la matrice dei coefficienti è *emisimmetrica* (o *antisimmetrica*). Se fossimo in \mathbf{E}^n avremmo un'analogia con le formule di Frénet. Dovremmo definire un sistema di riferimento mobile con n vettori, e l'analogia della nostra scrittura sarebbe una matrice emisimmetrica della forma

$$\begin{bmatrix} 0 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_1 & 0 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -c_2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_n \\ 0 & \cdots & 0 & -c_n & 0 \end{bmatrix}$$

dove $c_i = c_i(s)$, con $c_1, \dots, c_{n-1} > 0$.

Dimostriamo la validità delle formule appena introdotte.

1) La prima è facile:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{t}}(s) &= \underline{\mathbf{P}}'(s) \\ \underline{\mathbf{t}}'(s) &= \underline{\mathbf{P}}''(s) = c(s)\underline{\mathbf{n}}(s)\end{aligned}$$

per la definizione di $\underline{\mathbf{n}}(s)$.

2) La componente di $\underline{\mathbf{n}}'$ lungo $\underline{\mathbf{t}}$ si calcola con la seguente tecnica standard. Abbiamo $\underline{\mathbf{n}} \times \underline{\mathbf{t}} = \mathbf{0}$ per la perpendicolarità, quindi:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{n}}' \times \underline{\mathbf{t}} + \underline{\mathbf{n}} \times \underline{\mathbf{t}}' &= \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{n}}' \times \underline{\mathbf{t}} &= -\underline{\mathbf{n}} \times c\underline{\mathbf{n}} = -c.\end{aligned}$$

La componente di $\underline{\mathbf{n}}'$ lungo $\underline{\mathbf{n}}$ è nulla perché, essendo $\underline{\mathbf{n}}$ un versore, il suo vettore derivato gli è perpendicolare. La componente di $\underline{\mathbf{n}}'$ lungo $\underline{\mathbf{b}}$ invece la chiamiamo noi τ , sicché la seconda formula è dimostrata.

3) Per la terza formula non c'è più nulla da fissare, e bisogna fare di conto. Usiamo la stessa tecnica vista prima:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{t}} &= \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{b}}' \times \underline{\mathbf{t}} + \underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{t}}' &= \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{b}}' \times \underline{\mathbf{t}} &= -\underline{\mathbf{b}} \times c\underline{\mathbf{n}} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Infine la componente di $\underline{\mathbf{b}}'$ lungo $\underline{\mathbf{n}}$:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{n}} &= \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{b}}' \times \underline{\mathbf{n}} + \underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{n}}' &= \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{b}}' \times \underline{\mathbf{n}} &= -\underline{\mathbf{b}} \times (-c\underline{\mathbf{t}} + \tau\underline{\mathbf{b}}) = -\tau.\end{aligned}$$

4.1 Teorema di integrazione delle equazioni intrinseche

Vediamo ora come dalla conoscenza del quadro appena visto si possa ricostruire una curva. Per esprimere esattamente cosa intendiamo, ci serve una definizione.¹⁰

Definizione 9 Un *movimento rigido* di \mathbb{R}^n (si rammenti l'usuale corrispondenza $\mathbb{R}^n \leftrightarrow \mathbf{E}^n$) è un isomorfismo affine $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ della forma $\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, dove $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ e

$$\mathbf{A} \in \text{SO}(n) = \{\mathbf{A} \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) : \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}, \det \mathbf{A} = 1\}.$$

In particolare, quando $n = 3$ ogni movimento rigido è esprimibile mediante una rotazione attorno ad una retta passante per l'origine seguita da una traslazione.

¹⁰L'aver scelto una terna rigidamente destrorsa ci dice che la ricostruzione a partire dalla curvatura e dalla torsione può essere fisicamente eseguita nello spazio, e l'arco di curva che si ottiene è univocamente determinato a meno di rototraslazioni. Nessun ribaltamento è ammissibile: il ribaltamento è un'operazione teorica ma non praticamente eseguibile, e quindi non ci riguarda. Questo è solo uno dei punti di vista che si può assumere, e altri autori assumono altri punti di vista. Per esempio, in [11], i due autori russi Mishchenko e Fomenko definiscono in altro modo curvatura e torsione, non utilizzando la rigida definizione di terna destrorsa (forse per motivi politici), sicché la curvatura non è sempre positiva; devono dunque considerare solo archi di curva in cui la curvatura ha segno costante, ricostruendo le curve a meno di questa ambiguità.

Il *teorema fondamentale della teoria locale delle curve*, o *teorema di integrazione*, afferma essenzialmente che due curve con uguale curvatura e torsione sono sempre ottenute l'una dall'altra tramite un movimento rigido. Le formule di Frénet sono esattamente lo strumento che ci permetterà di dimostrare questo risultato. Utilizzeremo il classico teorema dell'Analisi sull'esistenza e unicità delle soluzioni di un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie.¹¹

Teorema 4.1 Siano dati un intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, un punto $t_0 \in [a, b]$, un vettore $\underline{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ e due applicazioni $\underline{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $A : [a, b] \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$. Allora esiste un'unica soluzione $\underline{u} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe \mathcal{C}^{k+1} del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \underline{u}' = A\underline{u} + \underline{f} \\ \underline{u}(t_0) = \underline{u}_0 \end{cases} \quad (3)$$

In particolare, la soluzione del problema di Cauchy per sistemi lineari di equazioni differenziali ordinarie esiste su tutto l'intervallo di definizione dei coefficienti. Con ciò possiamo dimostrare il

Teorema 4.2 [fondamentale della teoria locale delle curve] Date due funzioni $c : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^+$ e $\tau : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, con c sempre positiva e di classe \mathcal{C}^{k+1} e τ di classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$), esiste un'unica (a meno di movimenti rigidi dello spazio) curva $\underline{P} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe \mathcal{C}^{k+3} , fortemente regolare, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, con curvatura c e torsione τ .

Dimostrazione Cominciamo con l'esistenza. Le formule di Frénet (2) possono essere viste come un sistema lineare di 9 equazioni differenziali ordinarie in 9 incognite (le componenti di $\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}$), e possono quindi essere rappresentate da un'applicazione $A : [0, L] \rightarrow \text{Mat}_9(\mathbb{R})$. Fissiamo una base ortonormale $\{\underline{t}_0, \underline{n}_0, \underline{b}_0\}$ con la stessa orientazione della base canonica. Considerando questa come un vettore di \mathbb{R}^9 , il teorema 4.1 con $\underline{u}_0 = (\underline{t}_0, \underline{n}_0, \underline{b}_0)$ e $\underline{f} = \underline{0}$ ci fornisce un'unica terna di applicazioni $\underline{t}, \underline{n}, \underline{b} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$, con \underline{t} di classe \mathcal{C}^{k+2} e \underline{n} e \underline{b} di classe \mathcal{C}^{k+1} , verificanti le formule di Frénet e tali che $\underline{t}(0) = \underline{t}_0$, $\underline{n}(0) = \underline{n}_0$ e $\underline{b}(0) = \underline{b}_0$.

Vogliamo dimostrare che la terna $\{\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}\}$ così ricavata è il sistema di riferimento mobile di una curva. Cominciamo col far vedere che l'aver imposto con $\underline{u}(0) = \underline{u}_0 = (\underline{t}_0, \underline{n}_0, \underline{b}_0)$ che la terna sia ortonormale in $t = 0$ implica che essa lo è in ogni punto. Poiché $(\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s))$ è soluzione di un sistema come (3) per cui la matrice A è stata dedotta dalle relazioni (2), le funzioni 1) $\underline{t} \times \underline{t}$, 2) $\underline{t} \times \underline{n}$, 3) $\underline{t} \times \underline{b}$, 4) $\underline{n} \times \underline{n}$, 5) $\underline{n} \times \underline{b}$ e 6) $\underline{b} \times \underline{b}$ soddisfano il sistema di 6 equazioni differenziali lineari ordinarie in 6 incognite

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}(\underline{t} \times \underline{t}) = 2c(\underline{t} \times \underline{n}) \\ \frac{d}{ds}(\underline{t} \times \underline{n}) = -c(\underline{t} \times \underline{t}) + \tau(\underline{t} \times \underline{b}) + c(\underline{n} \times \underline{n}) \\ \frac{d}{ds}(\underline{t} \times \underline{b}) = -\tau(\underline{t} \times \underline{n}) + c(\underline{n} \times \underline{b}) \\ \frac{d}{ds}(\underline{n} \times \underline{n}) = -2c(\underline{t} \times \underline{n}) + 2\tau(\underline{n} \times \underline{b}) \\ \frac{d}{ds}(\underline{n} \times \underline{b}) = -c(\underline{t} \times \underline{b}) - \tau(\underline{n} \times \underline{n}) + \tau(\underline{b} \times \underline{b}) \\ \frac{d}{ds}(\underline{b} \times \underline{b}) = -2\tau(\underline{n} \times \underline{b}) \end{cases}$$

con le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} (\underline{t} \times \underline{t})(0) &= 1, & (\underline{t} \times \underline{n})(0) &= 0, & (\underline{t} \times \underline{b})(0) &= 0, \\ (\underline{n} \times \underline{n})(0) &= 1, & (\underline{n} \times \underline{b})(0) &= 0, & (\underline{b} \times \underline{b})(0) &= 1. \end{aligned}$$

¹¹Cf. ad esempio [4] o [5] per la dimostrazione.

dovute al fatto che \underline{t}_0 , \underline{n}_0 e \underline{b}_0 sono versori. Abbiamo cioè un altro problema di Cauchy, come (3) ma relativo ad una nuova matrice A . Ma si verifica subito che la sestupla di funzioni costanti

$$\underline{t} \times \underline{t} \equiv \underline{n} \times \underline{n} \equiv \underline{b} \times \underline{b} \equiv 1, \quad \underline{t} \times \underline{n} \equiv \underline{t} \times \underline{b} \equiv \underline{n} \times \underline{b} \equiv 0 \quad (4)$$

è una soluzione di tale problema, e per il teorema 4.1 non possono esistere altre soluzioni. Quindi le applicazioni \underline{t} , \underline{n} e \underline{b} devono soddisfare le (4), e la terna $\{\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s)\}$ risulta ortonormale per ogni $s \in [0, L]$. Inoltre essa ha sempre l'orientazione della base canonica di \mathbb{R}^3 : infatti $(\underline{t} \wedge \underline{n}) \times \underline{b}$ è una funzione continua in $[0, L]$ a valori in $\{\pm 1\}$ e vale $+1$ in $s = 0$; quindi necessariamente $(\underline{t} \wedge \underline{n}) \times \underline{b} \equiv +1$, il che implica (il lettore dimostri il perché) che $\{\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s)\}$ ha sempre la stessa orientazione della terna canonica.

Definiamo infine la curva $\underline{P} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\underline{P}(s) = \int_0^s \underline{t}(\sigma) d\sigma.$$

La curva \underline{P} è di classe C^{k+3} con derivata $\underline{t}(s)$, perciò è regolare, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco e con versore tangente \underline{t} . Siccome le equazioni di Frénet ci danno $\dot{\underline{P}} = c\underline{n}$ con $c > 0$ sempre, ne deduciamo che c è la curvatura e \underline{n} il versore normale di \underline{P} , che risulta quindi fortemente regolare. Ne segue che \underline{b} è il versore binormale e, di nuovo grazie a Frénet, τ è la torsione di \underline{P} , come voluto.

Vediamo ora l'unicità. Sia $\underline{P}_1 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'altra curva di classe C^{k+3} fortemente regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con curvatura c e torsione τ . A meno di un movimento rigido possiamo supporre $\underline{P}(0) = \underline{P}_1(0)$ e che \underline{P} e \underline{P}_1 abbiano lo stesso sistema di riferimento mobile in 0 . Per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy dato dalle formule di Frénet segue che \underline{P} e \underline{P}_1 hanno lo stesso sistema di riferimento mobile in tutti i punti di $[0, L]$; in particolare, $\dot{\underline{P}} \equiv \dot{\underline{P}}_1$. Ma allora

$$\underline{P}(s) = \underline{P}(0) + \int_0^s \dot{\underline{P}}(\sigma) d\sigma = \underline{P}_1(0) + \int_0^s \dot{\underline{P}}_1(\sigma) d\sigma = \underline{P}_1(s),$$

e $\underline{P}_1 \equiv \underline{P}$. □

Quindi curvatura e torsione sono tutto ciò che serve per descrivere completamente una curva nello spazio.

4.2 Calcolo di curvatura e torsione

Vediamo ora come si calcolano curvatura e torsione di una data curva. La curvatura è semplice:

$$c(s) = \|\underline{P}''(s)\|.$$

La torsione un po' meno:

$$\tau(s) = \frac{\det [\underline{P}'(s) \mid \underline{P}''(s) \mid \underline{P}'''(s)]}{c(s)^2}.$$

Perché questo?

Osservazione $\det [\underline{a} \mid \underline{b} \mid \underline{c}] = \underline{a} \times (\underline{b} \wedge \underline{c})$.

Innanzitutto:

$$\begin{aligned} \underline{P}' &= \underline{t} \\ \underline{P}'' &= \underline{t}' = c\underline{n} \\ \underline{P}''' &= (c\underline{n})' = c'\underline{n} + c\underline{n}' = c'\underline{n} + c(-c\underline{t} + \tau\underline{b}) = -c^2\underline{t} + c'\underline{n} + c\tau\underline{b} \end{aligned}$$

Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} \det [\underline{P}'(s) \mid \underline{P}''(s) \mid \underline{P}'''(s)] &= \underline{t} \times \{ \underline{c}\mathbf{n} \wedge (-c^2\underline{t} + c'\underline{n} + c\tau\underline{b}) \} \\ &= \underline{t} \times \{ -c^3\underline{n} \wedge \underline{t} + c^2\tau\underline{n} \wedge \underline{b} \} \\ &= \underline{t} \times (c^2\tau\underline{t}) = c^2\tau, \end{aligned}$$

e dividendo per c^2 otteniamo la nostra formula.

Facciamo ora un piccolo passo indietro per vedere come si calcolano curvatura e torsione nel caso in cui la curva sia assegnata non attraverso un parametro naturale, ma attraverso un parametro t qualunque. Ricordiamo come si descrive il sistema di riferimento mobile:

$$\begin{cases} \underline{t}(t) = \frac{\dot{\underline{P}}(t)}{\|\dot{\underline{P}}(t)\|} \\ \underline{n}(t) = \underline{b}(t) \wedge \underline{t}(t) \\ \underline{b}(t) = \frac{\dot{\underline{P}}(t) \wedge \ddot{\underline{P}}(t)}{\|\dot{\underline{P}}(t) \wedge \ddot{\underline{P}}(t)\|} \end{cases}$$

definendo nell'ordine $\underline{t}, \underline{b}, \underline{n}$. Per curvatura e torsione valgono:

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{\|\dot{\underline{P}}(t) \wedge \ddot{\underline{P}}(t)\|}{\|\dot{\underline{P}}(t)\|^3} \\ \tau(t) &= \frac{\det [\dot{\underline{P}}(t) \mid \ddot{\underline{P}}(t) \mid \ddot{\underline{P}}(t)]}{\|\dot{\underline{P}}(t) \wedge \ddot{\underline{P}}(t)\|^2} \end{aligned}$$

Dovremmo adesso far vedere che queste due formule coincidono con quelle viste in precedenza. Mostriamo qui solo l'equivalenza delle formule per la curvatura.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{P}}(\bar{t}) &= \frac{d\underline{P}}{dt} \Big|_{\bar{t}} = \frac{d\underline{P}}{ds} \Big|_{\bar{s}} \frac{ds}{dt} \Big|_{\bar{t}} \\ \ddot{\underline{P}}(\bar{t}) &= \frac{d^2\underline{P}}{dt^2} \Big|_{\bar{t}} = \frac{d^2\underline{P}}{ds^2} \Big|_{\bar{s}} \left(\frac{ds}{dt} \Big|_{\bar{t}} \right)^2 + \frac{d\underline{P}}{ds} \Big|_{\bar{s}} \frac{d^2s}{dt^2} \Big|_{\bar{t}} \end{aligned}$$

Per calcolare $c(\bar{t})$ valutiamo:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{P}}(\bar{t}) \wedge \ddot{\underline{P}}(\bar{t}) &= \|\dot{\underline{P}}(\bar{t})\| \underline{P}'(\bar{s}) \wedge \left\{ \|\dot{\underline{P}}(\bar{t})\|^2 \underline{P}''(\bar{s}) + \frac{d^2s}{dt^2} \Big|_{\bar{t}} \underline{P}'(\bar{s}) \right\} \\ &= \|\dot{\underline{P}}(\bar{t})\|^3 \underline{P}'(\bar{s}) \wedge \underline{P}''(\bar{s}). \end{aligned}$$

A questo punto abbiamo

$$c(\bar{t}) = \frac{\|\dot{\underline{P}}(\bar{t})\|^3 \|\underline{P}'(\bar{s}) \wedge \underline{P}''(\bar{s})\|}{\|\dot{\underline{P}}(\bar{t})\|^3} = \|\underline{P}''(\bar{s})\| = c(\bar{s}).$$

Esercizio 3 Mostrare l'equivalenza delle due formule per la torsione.

Osservazione Dire che una curva è piana equivale a dire che la torsione è identicamente nulla. Infatti:

$$\tau \equiv 0 \Leftrightarrow \det [\dot{\underline{P}}(t) \mid \ddot{\underline{P}}(t) \mid \dddot{\underline{P}}(t)] = 0,$$

ovvero $\dot{\underline{P}}, \ddot{\underline{P}}, \dddot{\underline{P}}$ sono dipendenti, mentre $\dot{\underline{P}}, \ddot{\underline{P}}$ sono indipendenti per la forte regolarità. Questo ci dice che il supporto della curva sta su un piano (cf. l'osservazione a pag. 12).

5 Analisi locale

Vale la pena di vedere un altro motivo per cui è così importante la rappresentazione parametrica naturale: essa permette di descrivere molto facilmente le curve differenziabili vicino a ciascuno dei loro punti. Ovviamente sarà necessaria una certa approssimazione, e tale approssimazione si ottiene molto bene considerando le rappresentazioni parametriche naturali.

L'idea è di scrivere $\underline{P}(s)$ come sviluppo in serie di Taylor. Scegliamo un punto arbitrario sull'asse delle s ; a meno di traslazioni sull'asse possiamo sempre supporre di prendere $s = 0$. Dopodiché (sempre supponendo alta regolarità) abbiamo:

$$\underline{P}(s) = \underline{P}(0) + s\underline{P}'(0) + \frac{s^2}{2}\underline{P}''(0) + \frac{s^3}{6}\underline{P}'''(0) + \dots$$

Ora, noi possiamo in realtà sceglierci una volta per tutte un sistema di riferimento fisso nello spazio. Scegliamolo in modo tale che l'origine sia il punto $\underline{P}(0)$ e che i tre versori $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ del sistema di riferimento fisso coincidano rispettivamente con $\underline{t}(0), \underline{n}(0), \underline{b}(0)$. Iniziamo a ricavare i valori dei vettori derivati nel punto che stiamo considerando.

$$\begin{aligned} \underline{P}'(s) &= \underline{t}(s) \\ \underline{P}'(0) &= \underline{t}(0) = \underline{e}_1 \\ \underline{P}''(s) &= \underline{t}'(s) = c(s)\underline{n}(s) \\ \underline{P}''(0) &= \underbrace{c(0)}_{c>0} \underline{e}_2 \\ \underline{P}'''(s) &= (c(s)\underline{n}(s))' = c'(s)\underline{n}(s) + c(s)[-c(s)\underline{t}(s) + \tau(s)\underline{b}(s)] \\ &= -c^2(s)\underline{t}(s) + c'(s)\underline{n}(s) + c(s)\tau(s)\underline{b}(s) \\ \underline{P}'''(0) &= -c^2 \underline{e}_1 + \underbrace{c'(0)}_{c'} \underline{e}_2 + \underbrace{c \tau(0)}_{\tau} \underline{e}_3 \end{aligned}$$

Adesso che ci siamo procurati tutti gli elementi per fare il conto in questione, lo facciamo così:

$$\underline{P}(s) = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{s^2}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{s^3}{6} \begin{bmatrix} -c^2 \\ c' \\ c\tau \end{bmatrix} + \dots$$

da cui

$$\begin{aligned}x(s) &= s - \frac{c^2}{6}s^3 + o(s^3) \\y(s) &= \frac{c}{2}s^2 + \frac{c'}{6}s^3 + o(s^3) \\z(s) &= \frac{c\tau}{6}s^3 + o(s^3)\end{aligned}$$

Queste sono le coordinate del generico punto della nostra curva vicino al punto che stiamo considerando. Per capire come la curva è fatta conviene andare a considerare le proiezioni del vettore che ne individua il punto generico sui tre piani coordinati che nel punto che stiamo considerando coincidono coi tre piani del sistema di riferimento mobile. Proiettiamo sul piano osculatore xy , ovvero dimentichiamo la z :

$$\begin{cases} x = s \\ y = \frac{c}{2}s^2 \end{cases} \quad y = \frac{c}{2}x^2$$

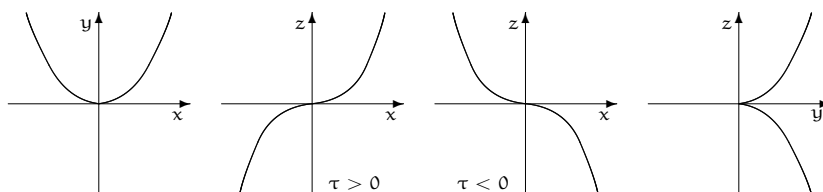
Quindi la proiezione sul piano xy non è altro che una parabola con la concavità diretta verso la direzione positiva dell'asse delle y , e l'apertura di tale parabola dipende dalla curvatura della nostra curva. Vediamo la proiezione sul piano rettificante xz , ovvero dimentichiamo la y :

$$\begin{cases} x = s \\ z = \frac{c\tau}{6}s^3 \end{cases} \quad z = \frac{c\tau}{6}x^3$$

Questo significa che sul piano xz la proiezione della nostra curva è all'incirca una cubica, con comportamento analogo a $z = \pm x^3$ a seconda che τ sia positivo o negativo; naturalmente può anche essere nullo, ma qui supponiamo che il valore della torsione nel punto che stiamo considerando sia diverso da zero.¹² Proiettiamo infine sul piano normale yz , ovvero dimentichiamo la x :

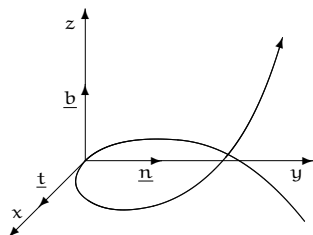
$$\begin{cases} y = \frac{c}{2}s^2 \\ z = \frac{c\tau}{6}s^3 \end{cases}$$

Questa curva è, come sappiamo, una cubica cuspidale tutta contenuta nel semipiano $y \geq 0$. Riassumendo:



Se adesso mettiamo assieme le nostre deduzioni possiamo vedere che la nostra curva si comporta in questa maniera (per $\tau > 0$):

¹²Altrimenti questa discussione non si può fare, perché bisognerebbe andare a vedere cosa succede nello sviluppo in serie di Taylor.



Quindi gli sviluppi di Taylor troncati ci danno la descrizione locale di tutte le curve differenziabili vicino a qualunque loro punto, e possono servire per esempio per calcolare la molteplicità d'intersezione di una curva differenziabile con una certa superficie dello spazio in un certo punto, oppure quando si vuole andare a porre delle condizioni particolari sul comportamento di una curva vicino ad uno dei suoi punti.

5.1 Sfere osculatrici

Un esempio di applicazione di questo tipo di ragionamento l'abbiamo con la ricerca delle cosiddette *sfere osculatrici*.

Definizione 10 La *sfera osculatrice* in un punto di una curva è una superficie sferica passante per quel punto e tale che ivi la molteplicità d'intersezione della curva con la superficie sia ≥ 4 .

Cominciamo a supporre, come sempre, che il punto in questione sia l'origine del sistema di riferimento, e che in tale punto i sistemi di riferimento fisso e mobile coincidano. Scriviamo quindi l'equazione della generica superficie sferica passante per il nostro punto, ovvero per l'origine:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Vogliamo calcolare la molteplicità d'intersezione di questa superficie con la nostra curva nell'origine. Andiamo a valutare la funzione f nei punti della curva applicando gli sviluppi in serie di Taylor; ci interessano solo i termini di grado ≤ 3 , perché vogliamo che la molteplicità d'intersezione sia almeno 4.

$$f(x(s), y(s), z(s)) = s^2 + \alpha \left(s - \frac{c^2}{6} s^3 \right) + \beta \left(\frac{c}{2} s^2 + \frac{c'}{6} s^3 \right) + \gamma \frac{c\tau}{6} s^3 + \dots$$

Vogliamo che la parte sopra scritta sia identicamente nulla, quindi ecco le nostre richieste:

- $\alpha = 0$;
- $1 + \beta \frac{c}{2} = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{2}{c}$;
- $-\frac{2}{c} \cdot \frac{c'}{6} + \gamma \frac{c\tau}{6} = 0 \Rightarrow -2c' + \gamma c^2 \tau = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{2c'}{c^2 \tau}$ siccome per ipotesi $c, \tau \neq 0$.

Vediamo che le scelte sono univoche, quindi esiste un'unica sfera osculatrice di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{c}y + \frac{2c'}{c^2\tau}z = 0.$$

Si noti che se $\tau = 0$ la sfera osculatrice non esiste!

Vale la pena di mettere in evidenza il centro e il raggio della sfera:

$$(x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(z + \frac{c'}{c^2\tau}\right)^2 = \frac{1}{c^2} + \left(\frac{c'}{c^2\tau}\right)^2 \quad (= r^2)$$

quindi le coordinate del centro e il raggio sono rispettivamente

$$C \equiv \left(0, \frac{1}{c}, -\frac{c'}{c^2\tau}\right), \quad r = \sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(\frac{c'}{c^2\tau}\right)^2}.$$

Queste coordinate del centro sono ovviamente relative al sistema di riferimento mobile, mentre il raggio è indipendentemente dalle coordinate.

Le coordinate del centro della sfera osculatrice rispetto al sistema di riferimento fisso sono invece date da

$$C(s) = \underline{P}(s) + \frac{1}{c(s)}\underline{n}(s) - \frac{c'(s)}{c(s)^2\tau(s)}\underline{b}(s).$$

Osservazione La sfera osculatrice taglia una circonferenza sul piano osculatore, detta *circonferenza osculatrice*. Il centro della sfera è situato sul cosiddetto *asse polare*, ovvero sulla retta perpendicolare al piano osculatore che incrocia la retta individuata dal versore normale nel punto di coordinate $(0, \frac{1}{c}, 0)$; questo punto è il centro della circonferenza osculatrice, e questo ci dice che il raggio di tale circonferenza è esattamente il reciproco del valore della curvatura.

Osservazione Quando passiamo dalla curva parametrizzata con parametro t qualunque alla parametrizzazione naturale conserviamo in generale inalterato il verso di percorrenza della curva. Potremmo però scegliere un altro orientamento, passando dal parametro s al parametro $\sigma = -s$. Vale la pena di vedere come si rapportano i tre nuovi versori rispetto ai precedenti. Abbiamo logicamente:

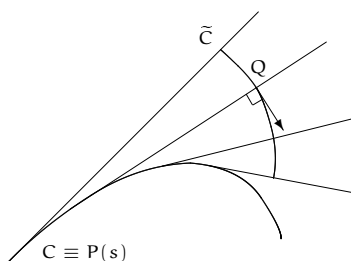
$$\underline{t}(-s) = -\underline{t}(s) \quad \underline{n}(-s) = \underline{n}(s) \quad \underline{b}(-s) = -\underline{b}(s).$$

Quindi quando cambia il verso di percorrenza cambia anche il sistema di riferimento mobile.

Esercizio 4 Fare i conti esplicitamente utilizzando le regole di derivazione per le funzioni composte e mostrare la veridicità di queste uguaglianze.

6 Evolvente ed evoluta

Data una certa curva C e una sua parametrizzazione naturale $\underline{P} = \underline{P}(s)$, consideriamo la rigata delle tangenti S di $\underline{P}(s)$.



Definizione 11 *Evolvente* (o *involuta*) di C è una qualunque curva $\tilde{C} \subseteq S$ tale che per ogni suo punto Q $\text{tg}_Q(\tilde{C})$ è perpendicolare alla retta di S per Q .

Vogliamo determinare l'equazione delle evolventi \underline{Q} . Si noti che, nonostante la scrittura $\underline{Q} = \underline{Q}(s)$, il parametro s , che scegliamo naturale per \underline{P} , non risulta in generale naturale per \underline{Q} . Consideriamo

$$\underline{Q}(s) - \underline{P}(s) = h(s)\underline{t}(s),$$

dove \underline{t} è il versore tangente alla curva data e h è la nostra incognita funzione di s ; trovata h si ricaverà l'equazione cercata come $\underline{Q} = \underline{P} + h\underline{t}$. Per determinare h applichiamo le formule di Frénet a $\underline{P}(s)$:

$$\begin{aligned} \text{tg}_Q(\tilde{C}) \equiv \underline{\dot{Q}} &= \underline{\dot{P}} + \dot{h}\underline{t} + h\underline{\dot{t}} \\ &= (1 + \dot{h})\underline{t} + c\underline{n}. \end{aligned}$$

E giungiamo a

$$\underline{\dot{Q}} \cdot \underline{t} = 0 \Leftrightarrow 1 + \dot{h} = 0,$$

equazione differenziale di semplice risoluzione:

$$\dot{h} = -1 \Leftrightarrow h = k - s,$$

ove k è un parametro. Conclusione: tutte le evolventi hanno equazione

$$\underline{Q} = \underline{P} + (k - s)\underline{t}.$$

al variare del parametro c . Chiaramente vi sono infinite evolventi, perché si può partire da qualsiasi punto della superficie rigata.

Definizione 12 *Evoluta* di C è una curva \tilde{C} t.c. la evolvente di \tilde{C} è C .

Osservazione \tilde{C} è t.c. le tangenti a \tilde{C} sono perpendicolari a C ; in altri termini, \tilde{C} è l'inviluppo delle perpendicolari di C . Questo vale solo se C è una curva piana: nello spazio vi sono infinite perpendicolari in un punto ad una curva data. Bisognerebbe allora considerare i piani normali, ma questi si tagliano lungo rette, non in punti isolati.

Poniamoci il problema, data una curva C espressa tramite un parametro naturale da $\underline{P} = \underline{P}(s)$, di determinarne un'evoluta $\underline{Q} = \underline{Q}(s)$. Vogliamo

$$\underline{Q}(s) - \underline{P}(s) \perp \underline{t}(s).$$

Questo vuol dire

$$\underline{Q} - \underline{P} = \alpha\underline{n} + \beta\underline{b},$$

e le nostre incognite sono α, β funzioni di s (che non sarà in generale parametro naturale per \tilde{C}). $\frac{dQ}{ds}$ è un vettore tangente a \tilde{C} :

$$\frac{dQ}{ds} = \underline{\dot{P}} + \dot{\alpha}\underline{n} + \alpha\dot{\underline{n}} + \dot{\beta}\underline{b} + \beta\dot{\underline{b}},$$

e usando il fatto che la parametrizzazione è rispetto alla lunghezza d'arco di C e le formule di Frénet risulta:

$$\frac{dQ}{ds} = (1 - \alpha c)\underline{t} + (\dot{\alpha} - \beta\tau)\underline{n} + (\dot{\beta} + \alpha\tau)\underline{b}.$$

Vogliamo che la tangente a \underline{Q} abbia la direzione di $\underline{Q} - \underline{P}$, ovvero sia proporzionale a $\alpha \underline{n} + \beta \underline{b}$, quindi imponiamo:

$$\begin{cases} 1 - \alpha c = 0 \\ \alpha(\dot{\beta} + \alpha\tau) - \beta(\dot{\alpha} - \beta\tau) = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{c}.$$

Supposto $c(s) \neq 0$, risolvendo rispetto a τ otteniamo

$$\tau = \frac{\beta\dot{\alpha} - \alpha\dot{\beta}}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Questa è un'equazione differenziale del I ordine, abbastanza difficile se non fosse che è pari a

$$\frac{d}{ds} \left(\operatorname{arcctg} \frac{\beta}{\alpha} \right),$$

pertanto

$$\begin{aligned} \operatorname{arcctg} \frac{\beta}{\alpha} &= \int_0^s \tau d\sigma + c \\ \beta &= \frac{1}{c} \operatorname{ctg} \left(\int_0^s \tau d\sigma + c \right). \end{aligned}$$

dove c è una costante. Quindi le evolte avranno equazione

$$\underline{Q} = \underline{P} + \frac{1}{c} \underline{n} + \frac{1}{c} \operatorname{ctg} \left(\int_0^s \tau d\sigma + k \right) \underline{b}.$$

al variare di k . Nel caso di una curva piana è $\tau = 0$, quindi l'argomento della cotangente è costante. In particolare, scegliendo $k = 0$ tutto il terzo addendo viene ad essere zero, e in tal caso \tilde{C} è la curva piana

$$\underline{Q} = \underline{P} + \frac{1}{c} \underline{n},$$

che non è altro che il luogo dei centri dei cerchi osculatori di C .¹³ In ogni caso, scegliendo una curva piana C tutte le sue evolte si trovano sul cilindro che ha come direttrice il luogo dei centri dei cerchi osculatori e generatrici parallele alla direzione \underline{b} .

Esempio [elica cilindrica] Sia $\underline{P}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$. Troviamo le involute. La parametrizzazione fornita non è naturale, quindi per applicare le nostre considerazioni dobbiamo mutare parametrizzazione. Sappiamo¹⁴ che la cosa si può fare ponendo $t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; posto allora $\alpha := \sqrt{a^2 + b^2}$,

$$\underline{t} = \frac{1}{\alpha} \left[-a \sin \frac{s}{\alpha}, a \cos \frac{s}{\alpha}, b \right].$$

Questo ci basta per calcolare un'involuta:

$$\begin{aligned} \underline{Q} &= \underline{P} + (k - s) \underline{t} \\ &= \left[a \left(\cos \frac{s}{\alpha} + \frac{s}{\alpha} \sin \frac{s}{\alpha} - \gamma \sin \frac{s}{\alpha} \right), a \left(\sin \frac{s}{\alpha} - \frac{s}{\alpha} \cos \frac{s}{\alpha} + \gamma \cos \frac{s}{\alpha} \right), b\gamma \right], \end{aligned}$$

¹³Si potrebbe considerare un luogo analogo nello spazio, ma tale luogo non sarebbe più un'evoluta.

¹⁴Vedi paragrafo B.3.

dove

$$\gamma = \frac{k}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Quello che emerge da questo conto è che tutte le evolventi dell'elica cilindrica, una curva spaziale, sono curve piane; la scelta della costante k dice in che piano esse si trovano.

A partire da questo esempio possiamo dire due parole sull'interpretazione geometrica dell'evolvente. Essa è infatti la curva che si ottiene svolgendo un filo matematico (inestensibile) supposto aderente alla nostra curva. Nel caso della circonferenza, possiamo supporre di avere un rocchetto su cui è avvolto un filo: svolgendolo si ottengono le evolventi della circonferenza, ovvero spirali di Archimede. Si noti che tra l'altro la circonferenza è il caso banale dell'elica cilindrica.

Esiste una curva le cui evolventi ed evolute sono curve dello stesso tipo. Quest'unica curva è la spirale logaritmica.¹⁵ (Cf. pag. 38.)

Esercizio 5 Verificare questa asserzione.

7 Teoria delle curve piane

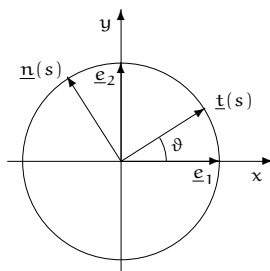
La teoria delle curve piane è diversa dalla teoria delle curve spaziali, e anche da quella delle curve iperspaziali. La teoria delle curve spaziali e quella delle curve iperspaziali sono praticamente la stessa teoria, si tratta solo di generalizzare la prima andando a scegliere invece di 3 variabili n variabili. La teoria delle curve piane, invece, presenta delle peculiarità che è bene mettere in evidenza.

La prima caratteristica saliente è che il sistema di riferimento mobile di una curva piana si definisce in maniera diversa. È chiaro che una curva piana è un caso particolare di curva spaziale, sicché si potrebbe applicare quanto già visto. Questo ragionamento si può fare, ma non è opportuno farlo, perché la teoria vista finora prevede che a due curve con pari valori di c e τ (e in questo caso $\tau \equiv 0$) corrisponda un movimento rigido dello spazio che porta la prima curva nella seconda. Questo è vero anche se applichiamo tale teoria alle curve piane, ma in tal caso ci troviamo di fronte ad un paradosso. Infatti, di fronte a due archi di curva speculari rispetto ad una certa retta, per la teoria studiata finora questi hanno la stessa torsione identicamente nulla e la stessa curvatura, perché esiste una rototraslazione dello spazio (ovviamente la rotazione rispetto alla retta appena citata) che sposta un arco di curva nell'altro; quindi dovremmo ritenere questi due archi di curva con la loro orientazione del tutto indistinguibili. Ma questi due archi di curva non possono essere ottenuti l'uno dall'altro mediante un movimento rigido del piano! È allora opportuno modificare leggermente la teoria, facendo in modo che $c(s)$ distingua i due archi di curva.

Consideriamo la curva $\underline{P} = \underline{P}(s)$ assegnata tramite un parametro naturale, e non chiediamo più che sia fortemente regolare bensì solo regolare. È opportuno fissare un sistema di riferimento mobile diverso da quello che abbiamo adottato nello spazio. Per fissare il sistema di riferimento stavolta sarà sufficiente assegnare un versore tangente $\underline{t}(s)$ e un versore normale $\underline{n}(s)$. Come prima fissiamo $\underline{t}(s) = \underline{P}'(s)$; detto questo la scelta $\underline{n}(s)$ è obbligata, perché vogliamo che la coppia $\{\underline{t}, \underline{n}\}$ sia ottenibile dalla coppia dei versori del riferimento fisso $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ tramite

¹⁵Questa proprietà fu scoperta da Jakob Bernoulli, che battezzò la spirale logaritmica *spira mirabilis* e ne volle una incisa sulla sua lapide, insieme con l'epitaffio "*Eadem mutata resurgo*". Sfortunatamente venne incisa una spirale archimedeana al suo posto.

rototraslazione, senza alcun ribaltamento. Quindi \underline{n} non è altro che il versore che si ottiene ruotando \underline{t} secondo il verso antiorario di 90° .



Chiamiamo $\vartheta = \vartheta(s)$ l'angolo che si ottiene a partire dalla direzione positiva dell'asse delle x verso il versore tangente. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\underline{P}(s) &\leftrightarrow \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} \\ \underline{P}'(s) &\leftrightarrow \begin{bmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta(s) \\ \sin \vartheta(s) \end{bmatrix} \\ \underline{P}''(s) &\leftrightarrow \begin{bmatrix} x''(s) \\ y''(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \vartheta(s) \vartheta'(s) \\ \cos \vartheta(s) \vartheta'(s) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Per nostra definizione il versore $\underline{n}(s)$ sarà quello ortogonale a $\underline{t}(s) = \underline{P}'(s)$, quindi

$$\underline{n}(s) \leftrightarrow \begin{bmatrix} -\sin \vartheta(s) \\ \cos \vartheta(s) \end{bmatrix}$$

sicché la definizione del versore normale è svincolata da quella del vettore $\underline{P}''(s)$. Naturalmente, una volta definiti $\underline{t}(s)$ e $\underline{n}(s)$ in questa maniera possiamo ricostruire le formule di Frénet nel caso del piano.

$$\underline{t}'(s) = \underline{P}''(s) = \vartheta'(s) \underline{n}(s)$$

Ma la prima formula di Frénet nel caso spaziale recita così: $\underline{t}'(s) = c(s) \underline{n}(s)$; quasi ci siamo, l'unica differenza è che nel caso delle curve piane dobbiamo porre¹⁶

$$c(s) = \frac{d\vartheta}{ds}.$$

Con questa nuova definizione di funzione di curvatura abbiamo ripristinato le formule di Frénet esattamente come nel caso dello spazio; e abbiamo potuto fare ciò proprio perché abbiamo cambiato la definizione di $\underline{n}(s)$.

$$\begin{cases} \underline{t}'(s) = & c(s) \underline{n}(s) \\ \underline{n}'(s) = & -c(s) \underline{t}(s) \end{cases}$$

Diamo infine la formula per il calcolo della curvatura di una curva piana rispetto ad un parametro t qualunque:

$$c(t) = \frac{\det \left[\begin{array}{c} \dot{\underline{P}}(t) \\ \ddot{\underline{P}}(t) \end{array} \right]}{\left\| \dot{\underline{P}}(t) \right\|^3}.$$

¹⁶Si noti che con questa definizione $c(s)$ può anche essere negativa o nulla.

Esercizio 6 Mostrare che, passando da una parametrizzazione naturale ad una qualunque (e viceversa), questa formula è quella che traduce il valore della curvatura nei punti corrispondenti rispetto alla formula già nota.

7.1 Analisi locale

Una volta scritte le formule di Frénet possiamo dare una descrizione locale di ogni curva piana vicino a ciascuno dei suoi punti. Possiamo sempre supporre che il punto in questione corrisponda al valore $s = 0$ del parametro, quindi andiamo a sviluppare la funzione in serie di Taylor:

$$\underline{P}(s) = \underline{P}(0) + s\underline{P}'(0) + \frac{s^2}{2}\underline{P}''(0) + \dots$$

Scegliamo il sistema di riferimento in modo che il punto in questione sia l'origine, e facciamo coincidere il sistema di riferimento mobile in tale punto col sistema di riferimento fisso, ovvero $\underline{t}(0) = \underline{e}_1$, $\underline{n}(0) = \underline{e}_2$.

$$\begin{aligned} \underline{P}'(s) &= \underline{t}(s) & \underline{P}'(0) &= \underline{t}(0) = \underline{e}_1 \\ \underline{P}''(s) &= c(s)\underline{n}(s) & \underline{P}''(0) &= \underbrace{c(0)}_c \underline{e}_2 \end{aligned}$$

Scriviamo ora le coordinate del generico punto della nostra curva:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} &= s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{s^2}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} + \dots \\ x(s) &= s + o(s^2) \\ y(s) &= \frac{c}{2}s^2 + o(s^2) \end{aligned}$$

La molteplicità d'intersezione tra la nostra curva e la retta tangente $y = 0$ la leggiamo dalla seconda coordinata, dove in generale possiamo raccogliere s^2 e niente di più; quindi la molteplicità d'intersezione è 2, salvo quando $c = 0$. Se dunque $c \neq 0$ il comportamento della curva sarà analogo a quello di un arco di parabola, mentre se $c = 0$ il comportamento sarà di tipo inflessionale. Conclusione: i flessi di una curva differenziale regolare sul piano sono esattamente i punti in corrispondenza dei quali la curvatura è nulla.

Osservazione Cosa succede se la curvatura è identicamente nulla? $c(s) \equiv 0$ implica $\underline{P}''(s) \equiv 0$, quindi $\underline{P}'(s) \equiv \underline{v}$ costante, quindi $\underline{P}(s) = s\underline{v} + \underline{w}$ con \underline{w} costante, quindi la curva è una retta.

Avendo scritto le formule di Frénet, si può ripristinare il teorema d'integrazione delle equazioni intrinseche, solo che qui l'unica funzione che ci dà il comportamento della curva è $c = c(s)$, e ad ogni $c(s)$ definita su un certo intervallo $[0, L]$ corrisponde una sola curva piana a meno di rototraslazioni piane.

Vediamo ora qual è il significato geometrico della funzione $c(s)$. Ricordiamo che la curvatura è la derivata $\frac{d\vartheta}{ds}$, quindi se lungo un tratto è positiva l'angolo $\vartheta(s)$ cresce. Possiamo allora distinguere gli archi di curva in due tipi. Se la curvatura è positiva la curva sta a sinistra del versore tangente, cioè "svolta" a sinistra; se è invece negativa starà a destra del versore tangente.



Attenzione però, perché quest'analisi dipende dal verso di percorrenza della curva; più precisamente, $c(-s) = -c(s)$. Questo si può vedere dalla definizione di curvatura oppure dalle formule di Frénet. Osserviamo come si calcola $c(s)$:

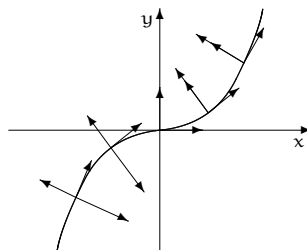
$$c(s) = \det \left[\underline{P}'(s) \mid \underline{P}''(s) \right] = \begin{vmatrix} \cos \vartheta(s) & -\sin \vartheta(s) \vartheta'(s) \\ \sin \vartheta(s) & \cos \vartheta(s) \vartheta'(s) \end{vmatrix}.$$

Cambiando il verso di percorrenza abbiamo $\underline{P}'(-s) = \underline{t}(-s) = -\underline{t}(s)$, $\underline{P}''(-s) = \underline{P}''(s)$, da cui vediamo che il determinante – e quindi la curvatura – cambia di segno. Pertanto l'interpretazione geometrica fatta prima risulta coerente quando cambiamo il verso di percorrenza.

Osservazione Un'altra conseguenza è che in una curva che presenta un flesso è facile mostrare la differenza rispetto alle due definizioni del sistema di riferimento (quella piana e quella spaziale). Consideriamo:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^3 \end{cases} \quad \underline{\dot{P}} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{bmatrix} \quad \underline{\ddot{P}} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 6t \end{bmatrix}$$

È chiaro che nell'origine il vettore derivato secondo si annulla, quindi in tale punto la curva non è fortemente regolare. Scegliamo il verso di percorrenza indotto dall'asse delle t . In ogni punto della curva avremo un versore tangente, e in ogni punto potremo definire un versore normale, anche nell'origine. Se invece trattassimo la curva come una curva spaziale giacente su un piano, il versore tangente coinciderebbe con quello della teoria piana, mentre il versore normale sarebbe $\underline{n} = \frac{\underline{P}''}{\|\underline{P}''\|}$, e sarebbe quindi diretto come \underline{P}'' (e non esisterebbe nell'origine).



Ora, siccome nella porzione di curva (in cui la curvatura è positiva) relativa a $t > 0$ si ha $\vartheta'(s)$ positivo, $\underline{P}''(s)$ e $\underline{n}(s)$ hanno la stessa direzione e lo stesso verso. Nell'arco $t < 0$, invece, dove la curvatura è negativa, $\underline{P}''(s)$ e $\underline{n}(s)$ hanno sì la stessa direzione, ma verso opposto. Quindi passando per l'origine il vecchio sistema di riferimento intrinseco non potrebbe variare con continuità. Nella teoria delle curve piane, invece, non ci sono problemi, perché inglobiamo nella teoria anche i punti di flesso: ci basta che il versore tangente vari con continuità, dopodiché il versore normale è suo succube.

7.2 Curve a curvatura costante

Vale la pena di vedere cosa succede in alcuni casi particolari per la funzione $c(s)$. Cosa succede se la curvatura è costante, $c(s) = \frac{1}{r} > 0$? Facciamo ora vedere che

in tal caso la curva è una circonferenza di raggio r . Per provare ciò mostriamo come per le curve piane esista un concetto di circonferenza osculatrice, mutuato dalle curve spaziali ma che si può ricostruire nello stesso modo anche se il sistema di riferimento locale è definito in maniera diversa.

Supponiamo come al solito che la curva passi per l'origine del sistema di riferimento e che i due versori del sistema di riferimento fisso ivi coincidano con quelli del riferimento mobile, e andiamo a cercare una circonferenza passante per l'origine la cui molteplicità d'intersezione con la curva nel punto sia almeno 3.¹⁷

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y = 0 \\ f(s) &= s^2 + \alpha s + \beta \frac{c}{2} s^2 + \dots \end{aligned}$$

Affinché l'espressione qui scritta sia identicamente nulla, chiediamo $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{2}{c}$. Abbiamo dunque la circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{c}y = 0, \quad \text{i.e.} \quad (x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{c^2}.$$

Vediamo che il centro ha coordinate $(0, \frac{1}{c})$ rispetto al sistema di riferimento mobile, e il raggio è $\frac{1}{c}$.

Osservazione Questo fatto ci dice peraltro che la curvatura dà proprio la misura di quanto la curva è... curva.

Detto questo è chiaro che se la funzione curvatura vale costantemente $\frac{1}{r}$ quello che uno si aspetta è proprio che la curva sia una circonferenza di raggio r . Per dimostrarlo bisogna fare i conti.

Siccome il teorema di integrazione ci dice che esiste un solo arco di curva con $c(s) = \frac{1}{r}$ purché fissiamo un punto da cui vogliamo che la curva parta e la posizione iniziale del sistema di riferimento intrinseco, dobbiamo fare queste scelte: scegliamo che la curva parta dall'origine e poniamo $\underline{t}(0) = \underline{e}_1$, $\underline{n}(0) = \underline{e}_2$. Abbiamo

$$c(s) = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \vartheta(s) = \frac{s}{r} + \vartheta_0$$

Per scoprire quanto vale la costante ϑ_0 valutiamo la funzione in 0: $\vartheta(0) = \vartheta_0 = 0$, perché il vettore tangente e il versore dell'asse delle x coincidono. Quindi $\vartheta(s) = \frac{s}{r}$. Ora ricordiamo

$$\underline{P}'(s) \leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos \vartheta(s) \\ \sin \vartheta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \left(\frac{s}{r}\right) \\ \sin \left(\frac{s}{r}\right) \end{bmatrix}$$

e cerchiamo le primitive di queste funzioni.

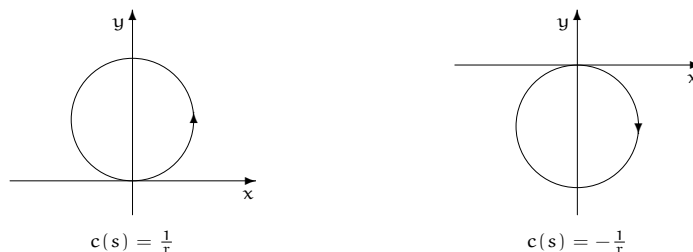
$$\begin{aligned} x'(s) &= \cos \left(\frac{s}{r}\right) & x(s) &= r \sin \left(\frac{s}{r}\right) + x_0 \\ y'(s) &= \sin \left(\frac{s}{r}\right) & y(s) &= -r \cos \left(\frac{s}{r}\right) + y_0 \end{aligned}$$

Ora sistemiamo le costanti: $x(0) = 0 = x_0$, $y(0) = 0 = -r + y_0 \Rightarrow y_0 = r$. Quindi la nostra curva sarà:

$$\begin{cases} x(s) = r \sin \left(\frac{s}{r}\right) \\ y(s) = -r \cos \left(\frac{s}{r}\right) + r \end{cases} \quad x^2 + (y-r)^2 = r^2$$

¹⁷Chiaramente escludiamo il caso $c = 0$, per cui la circonferenza osculatrice non è definita, così come con le curve spaziali escludevamo il caso $\tau = 0$.

La nostra curva è in effetti una circonferenza di centro $(0, r)$ e raggio r , orientata ovviamente concordemente al vettore tangente nell'origine, che avevamo scelto pari al versore dell'asse delle x . Cosa sarebbe successo se avessimo scelto $c(s) = -\frac{1}{r}$ ($r > 0$), con lo stesso punto di partenza e lo stesso sistema di riferimento iniziale? La curva sarebbe stata centrata in $(0, -r)$, avrebbe avuto lo stesso raggio e avrebbe avuto verso ancora concorde col vettore tangente nell'origine.



7.3 Integrazione delle equazioni intrinseche in \mathbb{E}^2

Abbiamo già visto il teorema di integrazione per curve spaziali. Procediamo ora ad adattare questo fondamentale risultato alle curve piane, fornendo inoltre un procedimento costruttivo per ottenere la nostra curva a partire dalla funzione curvatura.

Teorema 7.1 [di integrazione per curve piane] Sia $c(s)$ una funzione continua definita su $[0, L]$. A meno di rototraslazioni esiste allora un'unica curva piana C parametrizzata da $\underline{P}(s)$ su $[0, L]$ che abbia $c(s)$ come funzione curvatura.

Dimostrazione Sia la matrice delle formule di Frénet $K(s) = c(s)J$, con $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Definiamo l'esponenziale di una matrice come

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k = I + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \dots$$

per ogni matrice quadrata M . Poniamo

$$H(s) = \int_0^s K(\sigma) d\sigma = \int_0^s c(\sigma)J d\sigma = \left(\int_0^s c(\sigma) d\sigma \right) J = f(s)J,$$

allora $H'(s) = K(s)$, dove la derivazione viene intesa componente per componente. Osserviamo che $H(s)$ e $K(s)$ commutano:

$$H(s)K(s) = f(s)JK(s) = f(s)Jc(s)J = f(s)c(s)J^2$$

$$K(s)H(s) = K(s)f(s)J = f(s)K(s)J = f(s)c(s)J^2$$

Data la commutatività di $H(s)$ con la sua derivata, vale per ogni s la formula

$$(H^n)' = nH^{n-1}H' = nH^{n-1}K.$$

A causa della convergenza uniforme della serie della funzione esponenziale si ha

$$(e^H)' = H' + \frac{2HH'}{2!} + \frac{3H^2H'}{3!} + \dots = e^H H' = e^H K.$$

Inoltre $e^{H(0)} = e^0 = I$, quindi la matrice $A(s)$ soddisfacente le formule di Frénet, cioè tale che

$$\begin{cases} A'(s) = A(s)K(s) \\ A(0) = I \end{cases}$$

è proprio $A(s) = e^{H(s)} = e^{f(s)J}$. Ora, $J^0 = I$, $J^1 = J$, $J^2 = -I$, $J^3 = -J$, quindi:

$$\begin{aligned} A(s) &= I + f(s)J + \frac{f(s)^2 J^2}{2!} + \frac{f(s)^3 J^3}{3!} + \frac{f(s)^4 J^4}{4!} + \dots \\ &= I + f(s)J - \frac{f(s)^2}{2!} I - \frac{f(s)^3}{3!} J + \frac{f(s)^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

Per le formule di Frénet ricaviamo che le seguenti due entrate di A

$$\begin{aligned} a_{11}(s) &= 1 + 0 - \frac{f(s)^2}{2!} - 0 + \frac{f(s)^4}{4!} + \dots = \cos f(s) = \cos \int_0^s c(\sigma) d\sigma \\ a_{12}(s) &= 0 + f(s) + 0 - \frac{f(s)^3}{3!} + \dots = \sin f(s) = \sin \int_0^s c(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

sono le componenti di $\underline{t}(s)$, il vettore tangente alla nostra curva. Ma $\underline{t}(s) = \underline{P}'(s)$, quindi possiamo scrivere

$$\underline{P}(s) = \int \underline{t}(\sigma) d\sigma + \underline{v}$$

a meno di una traslazione \underline{v} . Non solo, perché in realtà abbiamo fatto una scelta arbitraria: quella di fissare $A(0)$ uguale alla matrice identica. Abbiamo cioè imposto che nel punto di partenza del nostro arco di curva la coppia mobile coincida con la coppia fissa. Si può mostrare che sostituendo una qualunque matrice ortogonale con determinante pari a 1 alla matrice identica si riesce comunque a trovare un'unica soluzione. Pertanto il nostro arco di curva è determinato univocamente a meno di una traslazione e una rotazione. \square

7.4 Coordinate polari

Diciamo due parole su un'altra particolare forma di $c(s)$.

Definizione 13 Se la funzione $c(s)$ è monotona, la curva si chiama *spirale*.¹⁸

Molto famose sono le curve la cui curvatura è del tipo $c(s) = \frac{1}{s}$, dette *spirali logaritmiche*; sono le spirali più comuni in natura: e.g. le braccia delle galassie e le conchiglie di parecchi molluschi sono fatte a forma di spirale logaritmica.

Esercizio 7 Integrare $c(s) = \frac{1}{s}$, $s \geq 1$; la strategia ottimale consiste nel rappresentare la curva in coordinate polari.

Invece che tramite le usuali coordinate euclidee (x, y) , possiamo assegnare una curva P tramite coordinate polari (ρ, ϑ) . Abbiamo:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Chiaramente queste formule non sono completamente invertibili. Abbiamo infatti un'applicazione

$$(\rho, \vartheta) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

che non si può invertire per $\rho = 0$.

Se abbiamo una funzione $\rho = \rho(\vartheta)$ che dà la curva in coordinate polari, determiniamo:

$$\begin{cases} x = x(\rho(\vartheta), \vartheta) = x(\vartheta) \\ y = y(\rho(\vartheta), \vartheta) = y(\vartheta) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho(\vartheta) \cos(\vartheta) \\ y = \rho(\vartheta) \sin(\vartheta) \end{cases}$$

¹⁸E in effetti tale nome si riflette nella rappresentazione grafica.

Abbiamo le formule:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho} \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta \\ \dot{y} = \dot{\rho} \sin \vartheta + \rho \cos \vartheta \\ \dot{P} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ \ddot{x} = \ddot{\rho} \cos \vartheta + 2\dot{\rho} \sin \vartheta - \rho \cos \vartheta \\ \ddot{y} = \ddot{\rho} \sin \vartheta + 2\dot{\rho} \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

da cui si può calcolare la curvatura in funzione di ϑ :

$$c(\vartheta) = \frac{2\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho} + \rho^2}{(\dot{\rho}^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Esempi

- *Circonferenza*. Notiamo subito come in questo caso le coordinate polari col polo nel centro della circonferenza semplificano la definizione della curva: $\rho = a$ invece delle coordinate euclidee

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$$

- *Ellisse*. In coordinate polari, col polo nel centro dell'ellisse e l'asse polare coincidente con l'asse maggiore dell'ellisse, l'ellisse si esprime così:

$$\rho = a\sqrt{1 - e^2 + e^2 \cos^2 \vartheta},$$

dove a è la lunghezza del semiasse maggiore ed e è l'eccentricità ($0 < e < 1$). Infatti da

$$\begin{cases} x = a \cos \vartheta \\ y = b \sin \vartheta \end{cases}$$

segue

$$\begin{aligned} \rho^2 &= a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta \\ &= a^2 \cos^2 \vartheta + (a^2 - c^2)(1 - \cos^2 \vartheta) \\ &= a^2 - a^2 e^2 + a^2 e^2 \cos^2 \vartheta \end{aligned}$$

dato che $e = \frac{c}{a}$ con $b^2 = a^2 - c^2$ ($(\pm c, 0)$ sono le coordinate dei fuochi dell'ellisse).

- *Spirali*.¹⁹

- Spirale di Archimede*. Presenta passo costante, ha equazione ($a > 0$)

$$\rho = a\vartheta.$$

- Spirale di Fermat*. Presenta passo decrescente, ha equazione

$$\rho^2 = \vartheta \Leftrightarrow \rho = \pm\sqrt{\vartheta}.$$

- Spirale logaritmica*. Presenta passo esponenzialmente crescente, ha equazione ($a > 0$)

$$\rho = ae^{\vartheta}.$$

La caratteristica che definisce queste spirali è che in ogni punto della curva il vettore tangente e il raggio vettore formano un angolo costante, dipendente da e .

¹⁹Per maggiori informazioni sulle spirali, si consulti [7].

8 Cenni sulla teoria globale delle curve piane

Siamo ora interessati a considerare quelle questioni che non attengono all'analisi di una curva vicino a ciascuno dei suoi punti (l'analisi eseguita finora), ma che tendono piuttosto a considerare una curva come un tutt'uno, cioè come immagine di un certo intervallo chiuso e limitato dell'asse reale.

La stragrande maggioranza delle considerazioni di carattere globale si fanno per curve chiuse, quindi per una nostra curva $\underline{P} = \underline{P}(s)$ parametrizzata tramite parametro naturale $s \in [0, L]$ richiederemo

$$\begin{aligned}\underline{P}(0) &= \underline{P}(L) \\ \underline{P}^{(n)}(0) &= \underline{P}^{(n)}(L)\end{aligned}$$

per ogni n per cui questa richiesta ha senso.

In realtà non ha alcuna importanza quale sia il punto di partenza o di arrivo, perché possiamo prendere un qualunque punto della curva come tale. Questo significa che in realtà la nostra funzione \underline{P} non è definita solo sull'intervallo $[0, L]$, ma su tutto l'asse reale delle s , e che è periodica di periodo L .

Definizione 14 Si dice *curvatura totale*

$$\int_0^L c(s) ds.$$

È chiaro che la curvatura totale è un invariante globale, perché non dipende dal valore della curvatura in un punto né dalla parametrizzazione scelta. Notiamo poi che questo numero è positivo o negativo a seconda del verso di percorrenza. Per fortuna questo invariante si calcola abbastanza facilmente, perché secondo la teoria delle curve piane $c(s) = \frac{d\vartheta}{ds}$; quindi per calcolare l'integrale basta calcolare

$$\vartheta(L) - \vartheta(0),$$

dove questi due valori $\vartheta(0), \vartheta(L)$ sono proprio gli angoli descritti dal versore tangente alla curva rispetto al sistema di riferimento fisso nei due istanti iniziale e finale. Non sono lo stesso valore, perché in generale quando abbiamo percorso tutti i punti della curva il versore tangente ha eseguito un certo numero di rotazioni, e tutto questo è registrato da $\vartheta(s)$. L'angolo $\vartheta(s)$ segue tutte le rotazioni del versore tangente, e quando si ritorna al punto di partenza abbiamo

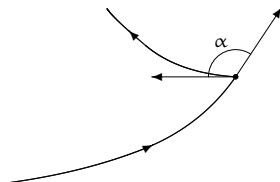
$$\vartheta(L) = \vartheta(0) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z},$$

dove k è un certo numero che dipende dal numero di giri che il versore tangente ha effettuato, e che si chiama anche *numero di rotazione della curva*. Quindi in realtà

$$\int_0^L c(s) ds = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Possiamo ora estendere la definizione di curva differenziabile introducendo quella di curva *differenziabile a tratti*. In tal caso la funzione \underline{P} , invece che essere differenziabile di una certa classe \mathcal{C}^n lungo tutto l'intervallo $[0, L]$, lo è salvo un certo numero finito di punti. I supporti di tali curve possono presentare dei punti angolosi, ed eventualmente anche punti di natura cuspidale.

Supponiamo che una curva differenziabile a tratti abbia un certo punto angoloso. Fissato un verso di percorrenza si arriverà quindi al punto con una certa tangente, e da lì si ripartirà con un'altra tangente.



Definizione 15 L'angolo dalla direzione di arrivo verso la direzione di partenza si chiama *angolo esterno* relativo al punto angoloso.

Volendo introdurre anche i punti di natura cuspidale, si deve adottare la convenzione che l'angolo esterno sia ivi π .

Il teorema che ci apprestiamo a presentare è conosciuto per lo più col nome tedesco di *Umlaufsatz*;²⁰ si può anche trovare come *teorema delle tangenti rotanti* o *delle tangenti di Hopf*. Premettiamo un lemma di natura analitica, la cui dimostrazione si può trovare in [9].

Lemma 8.1 Sia $T \subseteq \mathbb{R}^2$ stellato rispetto a $x_0 \in T$.²¹ Detta S^1 la circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine, sia $\underline{f}: T \rightarrow S^1$ una funzione continua. Allora esiste una funzione continua $\eta: T \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\underline{f}(x) = (\cos \eta(x), \sin \eta(x)).$$

Inoltre due tali funzioni differiscono per un multiplo intero di 2π .

Teorema 8.2 [Umlaufsatz] Una curva piana C differenziabile a tratti, semplice, chiusa e priva di angoli esterni pari a π in valore assoluto soddisfa

$$\int_0^L c(s) ds + \sum_i \alpha_i = \pm 2\pi,$$

dove gli α_i sono gli angoli esterni relativi ai punti angolosi della curva.

Dimostrazione Come prima cosa effettuiamo un cambio di sistema di riferimento e scegliamo una particolare parametrizzazione naturale per C ; ciò è lecito perché la curvatura totale è un'invariante rispetto a queste trasformazioni. Sia r una retta intersecante C . Almeno un punto P dell'intersezione avrà la seguente proprietà: una semiretta di r di estremo P non ha altri punti di intersezione con C . A meno di traslare leggermente r , possiamo garantire che P non sia un punto angoloso di C , perché i punti angolosi di C sono in numero finito e quindi isolati. Possiamo dunque assumere senza perdita di generalità l'esistenza di una semiretta uscente da un punto regolare P di C che interseca C solo in P ; sia \underline{h} il versore relativo alla direzione di tale semiretta. Possiamo ora riparametrizzare C usando un parametro naturale tale che $\underline{p}(0) = \underline{p}(L) \equiv P$. Inoltre, a meno di una rototraslazione di E^2 possiamo richiedere $O \equiv \underline{p}(0)$ e $\underline{e}_1 = \underline{t}(0) = \underline{h}$.

²⁰In tedesco *Umlauf* significa 'rotazione', *Satz* 'teorema'.

²¹Si dice che un insieme $T \subseteq \mathbb{R}^2$ è *stellato* rispetto a $x_0 \in \mathbb{R}^2$ se $\forall x \in T$ il segmento $\overline{x_0 x}$ è interamente contenuto in T .

Sia $\{0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{k-1} < a_k = L\}$ una partizione di $[0, L]$ tale che C sia differenziabile su ogni segmento $[a_{i-1}, a_i]$ per $i = 1, \dots, k$; i punti angolosi di C saranno allora $\underline{P}(a_j)$ per $j = 1, \dots, k-1$. Consideriamo

$$T = \left\{ (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq L \right\} \setminus \left\{ (a_j, a_j) \in \mathbb{R}^2 : j = 1, \dots, k-1 \right\}.$$

L'insieme T è stellato rispetto al punto $(0, L)$. Sia $\underline{f} : T \rightarrow S^1$ la mappa definita da

$$\underline{f}(t_1, t_2) = \begin{cases} \underline{t}(t_1) & \text{se } t_1 = t_2 \neq a_j \ \forall j = 1, \dots, k-1 \\ -\underline{t}(0) & \text{se } (t_1, t_2) = (0, L) \\ \frac{\underline{P}(t_2) - \underline{P}(t_1)}{\|\underline{P}(t_2) - \underline{P}(t_1)\|} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

È facile verificare che \underline{f} è una funzione continua. Esiste dunque una funzione continua $\eta : T \rightarrow \mathbb{R}$, detta *angolo secante*, tale che

$$(\cos \eta(t_1, t_2), \sin \eta(t_1, t_2)) = \underline{f}(t_1, t_2) \quad \forall (t_1, t_2) \in T.$$

Tale η è determinata a meno di un multiplo intero di 2π ; scegliamola in modo che soddisfi $\eta(0, L) = +\pi$.

Mostreremo ora $\eta(L, L) - \eta(0, 0) = \pm 2\pi$. Per $t \in (0, L)$, la quantità $\eta(t, L) - \eta(0, L)$ misura l'angolo tra $-\underline{e}_1$ e il vettore

$$\underline{f}(t, L) = \frac{\underline{P}(L) - \underline{P}(t)}{\|\underline{P}(L) - \underline{P}(t)\|}.$$

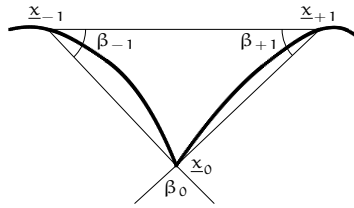
Ma $\underline{f}(t, L)$ non è mai pari a $-\underline{e}_1$, dunque $\eta(t, L) - \eta(0, L) < 2\pi$. Quindi per $t = L$ abbiamo $\eta(L, L) - \eta(0, L) = \pm\pi$. Analogamente $\eta(0, t) - \eta(0, 0)$, che rappresenta l'angolo da \underline{e}_1 a $\underline{f}(0, t)$, è pari a 0 quando $t = 0$ e non supera mai 2π . Quindi per $t \rightarrow L$ si ha $\eta(0, t) - \eta(0, 0) \rightarrow \pm\pi$, dove il segno è lo stesso di $\eta(L, L) - \eta(0, L)$. Pertanto

$$\eta(L, L) - \eta(0, 0) = \eta(L, L) - \eta(0, L) + \eta(0, L) - \eta(0, 0) = \pm 2\pi.$$

Consideriamo $\underline{P}(a_j)$, un punto angoloso di C con angolo esterno α_j , per $j = 1, \dots, k-1$. L'angolo α_j è uguale all'angolo tra $\underline{t}(a_j^-)$ e $\underline{t}(a_j^+)$, misurato in verso antiorario. Definiamo

$$\eta(a_j^\pm, a_j^\pm) = \lim_{t \rightarrow a_j^\pm} \eta(t, t).$$

Dimostriamo ora $\alpha_j = \eta(a_j^+, a_j^+) - \eta(a_j^-, a_j^-)$.



Sia Δ il triangolo di vertici $\underline{x}_{-1} := \underline{P}(a_j - \varepsilon)$, $\underline{x}_0 := \underline{P}(a_j)$, $\underline{x}_{+1} := \underline{P}(a_j + \varepsilon)$, dove ε soddisfa $a_{j-1} < a_j - \varepsilon < a_j < \varepsilon < a_{j+1}$. Supponiamo che $\underline{x}_{-1}, \underline{x}_0, \underline{x}_{+1}$ ordinino i vertici di Δ in verso antiorario (altrimenti vale una dimostrazione analoga). Senza perdita di generalità possiamo inoltre assumere Δ non-degenere. Sia $\beta_{\pm 1}$ l'angolo interno relativo al vertice $\underline{x}_{\pm 1}$, con $0 < \beta_{\pm 1} < \pi$. Allora

$$\eta(a_j, a_j + \varepsilon) - \eta(a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon) = \beta_{+1} + 2\pi k_1$$

per qualche $k_1 \in \mathbb{Z}$. Se ε è sufficientemente piccolo, per $a_j - \varepsilon < t < a_j$ si ha $\eta(a_j, a_j + \varepsilon) - \eta(t, a_j + \varepsilon) \leq 2\pi$, quindi $k_1 = 0$. Analogamente,

$$\eta(a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon) - \eta(a_j - \varepsilon, a_j) = \beta_{-1}.$$

Pertanto

$$\eta(a_j, a_j + \varepsilon) - \eta(a_j - \varepsilon, a_j) = \beta_{+1} + \beta_{-1} = \pi - \beta_0,$$

dove β_0 è l'angolo interno relativo a \underline{x}_0 . Per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ha infine $\pi - \beta_0 \rightarrow \alpha_j$, l'angolo esterno di C in a_j . Questo dimostra

$$\alpha_j = \eta(a_j^+, a_j^+) - \eta(a_j^-, a_j^-) \quad \forall j = 1, \dots, k-1.$$

Notando ora che $L = a_k$, $0 = a_0$ e $\eta(a_j^\pm, a_j^\pm) = \vartheta(a_j^\pm)$, possiamo concludere:

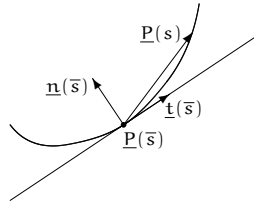
$$\begin{aligned} \pm 2\pi &= \eta(L, L) - \eta(0, 0) \\ &= \eta(L, L) - \sum_{j=1}^{k-1} \eta(a_j^+, a_j^+) + \sum_{j=1}^{k-1} \eta(a_j^-, a_j^-) + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j - \eta(0, 0) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (\vartheta(a_{j+1}^-) - \vartheta(a_j^+)) + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} c(s) ds + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j = \int_0^L c(s) ds + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j. \quad \square \end{aligned}$$

Esempio Si pensi ad un quadrato, il quale ha 4 punti angolosi e lungo i 4 lati $c(s) = 0$: segue $4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$ (percorrendo il quadrato in verso antiorario).

Questo risultato è significativo perché ha un valore topologico, e la sua applicazione non si limita quindi alle curve differenziabili. Infatti una curva chiusa e semplice, per quanto possa essere complicata, può sempre essere racchiusa all'interno di una circonferenza, perché comunque l'insieme dei punti che danno il supporto di \underline{P} è limitato.²² Si può in realtà costruire una corrispondenza biunivoca e bicontinua fra tutti i punti della circonferenza e i punti della curva, e questa corrispondenza fa sì che il supporto della curva e la circonferenza siano omeomorfi, pertanto tutte le proprietà topologiche della prima figura si trasferiscono in proprietà topologiche della seconda figura. E siccome la curvatura totale è una proprietà topologica, è chiaro che valendo l'Umlaufsatz per la circonferenza esso vale anche per la curva.

8.1 Convessità

Consideriamo un certo arco di curva e fissiamo l'attenzione su un certo punto $\underline{P}(\bar{s})$.



²²Basta considerare la distanza $\|\underline{P}(s_1) - \underline{P}(s_2)\|$ al variare di $(s_1, s_2) \in [0, L] \times [0, L]$, che è una funzione continua su un compatto e ammette quindi un massimo.

Andiamo a considerare la funzione

$$f_{\bar{s}}(s) = (\underline{P}(s) - \underline{P}(\bar{s})) \times \underline{n}(\bar{s}).$$

Definizione 16 Se per ogni punto $\underline{P}(\bar{s})$ di una curva \underline{P} e $\forall s$ vale $f_{\bar{s}}(s) \geq 0$ (o $f_{\bar{s}}(s) \leq 0$, a seconda dell'orientamento) la curva si dice *convessa*.

Osservazione Una curva convessa può essere pensata come il bordo di una regione convessa.

In pratica questo vuol dire che, comunque si scelga un punto, tutti i punti del supporto della curva stanno in uno solo dei due semipiani determinati dalla retta tangente in tale punto. Quello che non può accadere in una curva convessa è quindi la presenza di punti di flesso, dove in sostanza la tangente attraversa la curva.

Proposizione 8.3 Una curva C chiusa e semplice è convessa se e solo se $\forall s$ vale $c(s) \geq 0$ (o $c(s) \leq 0$, a seconda dell'orientamento).

Dimostrazione Supponiamo che C abbia curvatura $c(s) \geq 0$; allora ϑ , avendo derivata non negativa, è una funzione non decrescente. Se per assurdo C non fosse convessa, dovrebbero esistere $s_0, s_1, s_2 \in [0, L]$ distinti (e almeno due di loro diversi da 0 e L) tali che

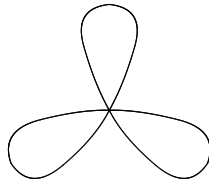
$$f_{s_0}(s_1) = (\underline{P}(s_1) - \underline{P}(s_0)) \times \underline{n}(s_0) < 0 < (\underline{P}(s_2) - \underline{P}(s_0)) \times \underline{n}(s_0) = f_{s_0}(s_2);$$

possiamo anche supporre che s_1 sia il punto di minimo e s_2 il punto di massimo di f_{s_0} . In particolare, $f'_{s_0}(s_1) = f'_{s_0}(s_2) = 0$; essendo $f'_{s_0}(s) = \underline{t}(s) \times \underline{n}(s_0)$, ne segue che $\underline{t}(s_0)$, $\underline{t}(s_1)$ e $\underline{t}(s_2)$ sono tutti paralleli, e quindi due di loro coincidono. Supponiamo senza perdita di generalità $\underline{t}(s_1) = \underline{t}(s_2)$, con $s_1 < s_2$. Allora deve essere $\vartheta(s_2) = \vartheta(s_1) + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Ma ϑ è non decrescente, e, essendo C semplice, $\vartheta(L) - \vartheta(0) = 2\pi$. Quindi è necessariamente $\vartheta(s_2) = \vartheta(s_1)$, e ϑ e (di conseguenza) \underline{t} sono costanti sull'intervallo $[s_1, s_2]$, cioè $\underline{P}|_{[s_1, s_2]}$ descrive un segmento. In particolare, si avrebbe $\underline{P}(s_2) = \underline{P}(s_1) + (s_2 - s_1)\underline{t}(s_1)$, ed essendo $\underline{t}(s_1) = \pm \underline{t}(s_0)$ seguirebbe $f_{s_0}(s_2) = f_{s_0}(s_1)$, assurdo.

Viceversa, supponiamo che C sia convessa. La funzione $f_{\bar{s}}(s)$ è continua, e di segno costante per ogni \bar{s} fissato. Se infatti ci fossero dei valori di \bar{s} per cui il segno fosse positivo e dei valori di \bar{s} per cui il segno fosse negativo, per continuità dovrebbe allora esistere un s_0 per cui $f_{s_0} \equiv 0$; ma questo implicherebbe $\underline{P}(s) = (s - s_0)\underline{t}(s_0) \forall s \in [0, L]$, e C non sarebbe chiusa. Quindi $f_{\bar{s}}(s)$ ha segno costante; a meno di invertire l'orientazione possiamo supporre $f_{\bar{s}}(s) \geq 0 \forall \bar{s}, s$. Allora ogni $\bar{s} \in [0, L]$ è un punto di minimo assoluto per $f_{\bar{s}}$, e quindi

$$c(\bar{s}) = f''_{\bar{s}}(\bar{s}) \geq 0. \quad \square$$

Osservazione Se la curva non è semplice questo risultato non è applicabile. Si osservi ad esempio la curva qui raffigurata:

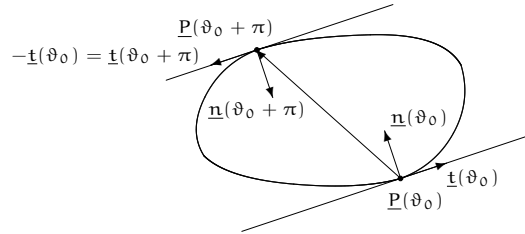


8.2 Ovali

Definizione 17 Dicesi *ovale* una curva C chiusa, semplice e t.c. $\forall s$ vale $c(s) > 0$ (o $c(s) < 0$).

Gli ovali ammettono un tipo di parametrizzazione che è ancora più comodo e semplice rispetto alle parametrizzazioni con parametro naturale. Questo perché se la curvatura è strettamente positiva allora la funzione $\vartheta(s)$ è sempre crescente, e quindi monotona; essendo la curva chiusa, $\vartheta(s)$ è peraltro suriettiva, e pertanto invertibile. Esiste dunque una funzione $s = s(\vartheta)$, e possiamo passare alla parametrizzazione $\underline{P} = \underline{P}(\vartheta) = \underline{P}[s(\vartheta)]$ su $[\vartheta_0, \vartheta_0 + 2\pi]$.

Osserviamo che, siccome il versore tangente ruota attorno all'origine senza mai indietro, vi sarà un unico punto della curva nel quale esso ha la stessa direzione di $\underline{t}(\vartheta_0)$ ma verso opposto. Questo vuol dire che esiste un punto della curva nel quale la retta tangente è parallela alla retta tangente nel punto iniziale.



Consideriamo ora i due versori normali e il vettore che sposta $\underline{P}(\vartheta_0)$ in $\underline{P}(\vartheta_0 + \pi)$. Possiamo calcolare la distanza tra le due rette tangenti con

$$\ell(\vartheta_0) = |\underline{n}(\vartheta_0) \times (\underline{P}(\vartheta_0 + \pi) - \underline{P}(\vartheta_0))|,$$

che rappresenta l'ampiezza dell'ovale rispetto al punto ϑ_0 . Questo ragionamento possiamo farlo in ogni punto della curva, quindi definiamo *ampiezza* dell'ovale nel punto $\underline{P}(\vartheta)$

$$\ell(\vartheta) = (\underline{P}(\vartheta + \pi) - \underline{P}(\vartheta)) \times \underline{n}(\vartheta).$$

Ci farà ora piacere traslare sull'asse delle ϑ l'intervallo $[\vartheta_0, \vartheta_0 + 2\pi]$, passando ad un altro asse delle ϑ (che continueremo a chiamare asse delle ϑ per non appesantire il discorso) in modo che il valore iniziale del parametro sia 0 e il valore finale sia 2π .

Vediamo ora quali sono le proprietà salienti di questa nuova parametrizzazione tramite il parametro ϑ . Consideriamo il nostro ovale e andiamo a calcolare il vettore derivato.

$$\dot{\underline{P}}(\vartheta) = \frac{d\underline{P}}{d\vartheta} = \frac{d\underline{P}}{ds} \frac{ds}{d\vartheta}$$

Quindi

$$\left\| \dot{\underline{P}}(\vartheta) \right\| = \left\| \underline{P}'(\bar{s}) \cdot \frac{1}{c(\vartheta)} \right\| = \left| \frac{1}{c(\vartheta)} \right| = r(\vartheta),$$

cioè il raggio della circonferenza osculatrice. Dunque nel caso di parametrizzazioni di ovali tramite il parametro ϑ il vettore derivato ha una norma che punto per punto riconduce esattamente al raggio della circonferenza osculatrice; è una bella comodità.

Un altro motivo per cui è comoda la parametrizzazione tramite ϑ è questo:

$$\dot{\underline{\mathbf{t}}}(\vartheta) = \underline{\mathbf{n}}(\vartheta).$$

Siccome la nostra curva è regolare, esiste un sistema di riferimento locale rispetto al parametro s , e per tale sistema valgono le formule di Frénet. In particolare ci interessa ora $\underline{\mathbf{t}}'(s) = c(s)\underline{\mathbf{n}}(s)$. Deriviamo $\underline{\mathbf{t}}$ rispetto a ϑ :

$$\frac{d\underline{\mathbf{t}}}{d\vartheta}\Big|_{\bar{\vartheta}} = \frac{d\underline{\mathbf{t}}}{ds}\Big|_{\bar{s}} \frac{ds}{d\vartheta}\Big|_{\bar{\vartheta}}.$$

Questo significa esattamente

$$\dot{\underline{\mathbf{t}}}(\bar{\vartheta}) = c(\bar{s})\underline{\mathbf{n}}(\bar{s}) \frac{1}{c(\bar{s})} = \underline{\mathbf{n}}(\bar{\vartheta}).$$

Fatte queste premesse, possiamo ora pervenire al seguente risultato.

Proposizione 8.4 $\int_0^{2\pi} \ell(\vartheta) d\vartheta = 2L$, dove L è la lunghezza della curva.

Osservazione La regola di integrazione per parti vale anche sostituendo dei vettori alle consuete variabili reali e il prodotto scalare al prodotto usuale.

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [(\underline{\mathbf{P}}(\vartheta + \pi) - \underline{\mathbf{P}}(\vartheta)) \times \underline{\mathbf{n}}(\vartheta)] d\vartheta &= [(\underline{\mathbf{P}}(\vartheta + \pi) - \underline{\mathbf{P}}(\vartheta)) \times \underline{\mathbf{t}}(\vartheta)]_0^{2\pi} + \\ &\quad - \int_0^{2\pi} (\dot{\underline{\mathbf{P}}}(\vartheta + \pi) - \dot{\underline{\mathbf{P}}}(\vartheta)) \times \underline{\mathbf{t}}(\vartheta) d\vartheta \\ &= - \int_0^{2\pi} (\dot{\underline{\mathbf{P}}}(\vartheta + \pi) - \dot{\underline{\mathbf{P}}}(\vartheta)) \times \underline{\mathbf{t}}(\vartheta) d\vartheta \end{aligned}$$

in quanto $\underline{\mathbf{P}}$ e $\underline{\mathbf{t}}$ sono periodiche di periodo 2π . Questo integrale lo scindiamo ora in due addendi. Cominciamo dal secondo; ricordando che $\underline{\mathbf{t}}(\vartheta) = \frac{\dot{\underline{\mathbf{P}}}(\vartheta)}{\|\dot{\underline{\mathbf{P}}}(\vartheta)\|}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \dot{\underline{\mathbf{P}}}(\vartheta) \times \underline{\mathbf{t}}(\vartheta) d\vartheta &= \int_0^{2\pi} (\|\dot{\underline{\mathbf{P}}}(\vartheta)\| \underline{\mathbf{t}}(\vartheta) \times \underline{\mathbf{t}}(\vartheta)) d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \|\dot{\underline{\mathbf{P}}}(\vartheta)\| d\vartheta = L. \end{aligned}$$

Passiamo ora al primo integrale:

$$\begin{aligned} - \int_0^{2\pi} (\dot{\underline{\mathbf{P}}}(\vartheta + \pi) \times \underline{\mathbf{t}}(\vartheta)) d\vartheta &= - \int_0^{2\pi} (\|\dot{\underline{\mathbf{P}}}(\vartheta + \pi)\| \underbrace{\underline{\mathbf{t}}(\vartheta + \pi) \times \underline{\mathbf{t}}(\vartheta)}_{-\underline{\mathbf{t}}(\vartheta)}) d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \|\dot{\underline{\mathbf{P}}}(\vartheta + \pi)\| d\vartheta = \int_{\pi}^{3\pi} \|\dot{\underline{\mathbf{P}}}(\varphi)\| d\varphi = L. \end{aligned}$$

Sommando i due integrali si ottiene la tesi. \square

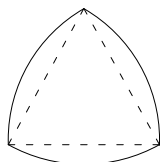
Questo risultato si applica in particolare a quegli ovali la cui ampiezza è costante. Se $\ell(\vartheta) = k$ costante, abbiamo

$$k \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2L,$$

da cui il

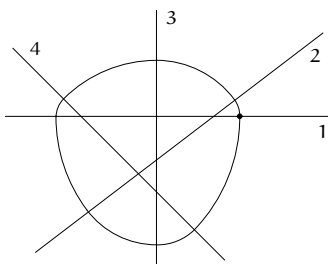
Teorema 8.5 [Cauchy] Per ovali ad ampiezza costante k vige $L = \pi k$.

Esempio Gli ovali ad ampiezza costante servono ad esempio in meccanica per fare fori quadrati. Per fare un foro quadrato si usa una punta per il trapano che abbia una sezione perpendicolare all'asse della curva stessa che sia una curva che rotola senza strisciare all'interno di un quadrato appoggiandosi a tutti i lati. Curve di questo tipo sono fatte utilizzando ovali ad ampiezza costante. Facciamo un esempio. Partendo da un triangolo equilatero, si traccino tre archi di circonferenza con l'apertura del compasso pari alla lunghezza del lato come in figura:



Tale ovale, conosciuto come *triangolo di Reuleaux*, è differenziabile solo a tratti, cioè nondimeno è un ovale ad ampiezza costante. Facendo ruotare il baricentro di questa figura lungo una particolare curva pressoché circolare, è possibile praticare un foro quasi quadrato, sebbene i vertici di tale quadrato rimangano leggermente smussati.²³

Esempio Ma è anche possibile costruirsi degli ovali di classe C^1 , e la maniera più comoda per farlo è questa. Si sceglie un certo numero di rette, le si numera secondo un certo ordine e si fissa un punto sulla prima (si veda l'esempio qui sotto per 4 rette). Con un compasso si traccia un arco di circonferenza con centro nell'intersezione tra la prima e la seconda retta e raggio la distanza tra questa intersezione e il punto fissato arbitrariamente, congiungendo così le prime due rette e determinando un punto sulla seconda retta. Dopodiché si passa a considerare il punto d'intersezione tra la seconda e la terza retta, e usando la distanza tra questo e il punto appena determinato sulla seconda retta si traccia un altro archetto che giunge sulla terza retta. Si ripete questa costruzione per ogni retta con la sua successiva (tenendo conto che all'ultima retta segue la prima). Alla fine si ritorna al punto di partenza, e la curva costituita da archi di varie circonferenze si chiude.



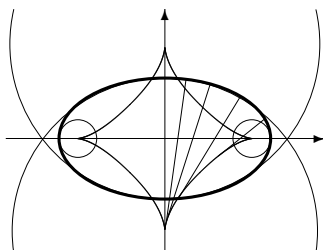
Questa è la maniera più elementare per costruire un ovale ad ampiezza costante. Non sarà molto regolare, però funziona per tutti i casi pratici in cui si necessita di una curva che abbia la stessa proprietà di ampiezza costante della circonferenza ma che non sia la circonferenza. Facendo ad esempio scorrere un asse su dei rulli che hanno come sezione una circonferenza, l'asse rimane parallelo al piano di scorrimento, ma la stessa cosa capita facendo scorrere l'asse su dei rulli che hanno come sezione un ovale ad ampiezza costante: anche in questo caso l'asse scorre parallelo al terreno, senza nessuno scossone.

²³Per ulteriori informazioni si legga l'interessante articolo [14].

Tra gli ovali di classe C^∞ c'è, oltre alla circonferenza, l'ellisse. Questa curva presenta 4 vertici, la cui definizione è di carattere euclideo: essi sono le intersezioni con la curva degli assi di simmetria. Ma esiste una definizione di vertice anche in geometria differenziale.

Definizione 18 Un *vertice* è un punto in cui $c(s)$ assume un massimo o un minimo.

Osservazione Nel caso dell'ellisse, i vertici coincidono esattamente con la definizione della geometria differenziale. Notiamo che unendo i centri delle circonferenze osculatrici otteniamo una curva chiamata *astroide*; questo succede per le simmetrie dell'ellisse, ma in generale per una curva piana si può andare a considerare il luogo dei centri delle circonferenze osculatrici, e questo costituisce l'unica evoluta piana della curva. Si può dimostrare che dove la curva ammette un vertice la sua evoluta piana ammette una cuspide.



Questi luoghi di centri di circonferenze osculatrici hanno anche altre proprietà: per esempio, tutte le rette tangenti ad un arco risultano perpendicolari all'arco di curva corrispondente.²⁴

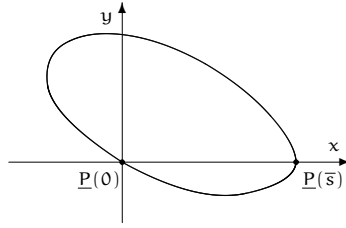
Teorema 8.6 [dei quattro vertici] Un ovale ha sempre almeno 4 vertici.

Osservazione È chiaro che il minimo non può essere più di 4, perché l'ellisse è un esempio di ovale che ha proprio 4 vertici.

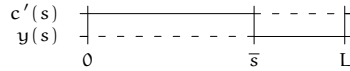
Dimostrazione Nel caso in cui la curvatura è costante, $c(s) = \frac{1}{r} > 0$, la curva è una circonferenza, quindi ha infiniti vertici.

Supponiamo quindi che $c(s)$ non sia costante. Escluso il caso 0, le uniche altre possibilità per il numero di vertici sono 1, 2, 3. Ma i casi 1 e 3 sono esclusi per una questione di carattere analitico, perché i minimi e i massimi di una funzione periodica vanno a coppie. Quindi l'unica possibilità per un ovale di farla franca sarebbe quella di avere due vertici: un semplice massimo e un semplice minimo. Vediamo di escludere anche questa eventualità. Si tratta di scegliere in maniera opportuna un sistema di riferimento nel piano: si piazza il punto in cui il nostro ovale presenta il minimo nell'origine del sistema di riferimento, e il punto in cui presenta il massimo in un punto dell'asse delle x . Siccome la curva è convessa, non presenta flessi, quindi non attraversa l'asse delle x che nei due vertici, e non può appoggiarvi, altrimenti avrebbe un tratto a curvatura zero. Il nostro ovale avrà dunque questo aspetto:

²⁴C'è un legame tra questi luoghi e la teoria delle catastrofi, che tratta famiglie continue di funzioni che presentano delle discontinuità (*catastrofi*) in corrispondenza della variazione del parametro da cui dipendono.



Se allora andiamo a considerare $c'(s)$ e $y(s)$ nell'intervallo $[0, L]$ abbiamo:



Quindi $y(s)c'(s) \leq 0 \forall s$. Ora consideriamo:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_0^L y(s)c'(s) \, ds = [y(s)c(s)]_0^L - \int_0^L y'(s)c(s) \, ds \\ &= - \int_0^L y'(s)c(s) \, ds \end{aligned}$$

per la periodicit . Ora, la prima formula di Frénet dice $\underline{t}' = c\underline{n}$. Quindi:

$$\begin{aligned} \underline{p}(s) &\leftrightarrow \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} & \underline{p}'(s) &\leftrightarrow \begin{bmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{bmatrix} & \underline{n}(s) &\leftrightarrow \begin{bmatrix} -y'(s) \\ x'(s) \end{bmatrix} \\ \underline{t}'(s) &\leftrightarrow \begin{bmatrix} x''(s) \\ y''(s) \end{bmatrix} & c(s)\underline{n}(s) &\leftrightarrow \begin{bmatrix} -y'(s)c(s) \\ x'(s)c(s) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pertanto il nostro integrale diventa

$$\int_0^L x''(s) \, ds = [x'(s)]_0^L = 0$$

per la periodicit . Allora il prodotto $y(s)c'(s)$ ci d  una funzione sempre ≤ 0 il cui integrale   0, dunque si tratta della funzione nulla. Ma $y(s)c'(s) = 0$   una contraddizione, perch    $y(s) = 0$ solo in due punti, mentre $c'(s) = 0$ implicherebbe curvatura costante, caso escluso all'inizio. Quindi un ovale non pu  neppure avere 2 vertici. \square

8.3 Disuguaglianza isoperimetrica

Vogliamo ora rispondere alla seguente domanda: quale curva chiusa e semplice di lunghezza fissata $L > 0$   il bordo della regione di area maggiore? Per rispondere a questo quesito presenteremo un risultato pi  generale che mette in relazione l'area e il perimetro di qualsiasi dominio il cui bordo sia una curva di classe \mathcal{C}^2 a tratti chiusa e semplice.

Prima di tutto ci serve una formula per calcolare l'area dell'interno di una curva. Per trovarla chiediamo in prestito all'Analisi Matematica il classico²⁵

Teorema 8.7 [Gauss-Green] Sia $\underline{p} = (x_1, x_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva di classe \mathcal{C}^2 a tratti, chiusa, semplice e orientata positivamente, e indichiamo con $D \subset \mathbb{R}^2$ l'“interno” di \underline{p} , ovvero la regione compatta di \mathbb{R}^2 che ha per bordo il supporto di

²⁵Cf. ad esempio [4] o [5].

P. Allora per ogni coppia di funzioni $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^1(D)$ definite in un intorno aperto di D si ha

$$\int_a^b [f_1(\underline{P}(t))x_1'(t) + f_2(\underline{P}(t))x_2'(t)] dt = \int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2.$$

Lemma 8.8 Sia $\underline{P} = (x_1, x_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva di classe \mathcal{C}^2 a tratti, chiusa, semplice e orientata positivamente, e indichiamo con $D \subset \mathbb{R}^2$ l'interno di \underline{P} . Allora

$$\text{area}(D) = \int_a^b x_1 x_2' dt = - \int_a^b x_1' x_2 dt.$$

Dimostrazione Siano $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ date da $f_1(\underline{x}) = -x_2$ e $f_2(\underline{x}) = x_1$. Per Gauss-Green abbiamo

$$\begin{aligned} \text{area}(D) &= \int_D dx_1 dx_2 = \frac{1}{2} \int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b (x_1 x_2' - x_1' x_2) dt. \end{aligned}$$

Siccome

$$\int_a^b (x_1 x_2' + x_1' x_2) dt = \int_a^b (x_1 x_2)' dt = x_1(b)x_2(b) - x_1(a)x_2(a) = 0,$$

concludiamo con

$$\int_a^b x_1 x_2' dt = - \int_a^b x_1' x_2 dt. \quad \square$$

Siamo ora in grado di dimostrare un importante risultato, la *disuguaglianza isoperimetrica*:

Teorema 8.9 Sia $\underline{P} = (x_1, x_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva di classe \mathcal{C}^2 a tratti, chiusa, semplice e di lunghezza $L > 0$, e indichiamo con $D \subset \mathbb{R}^2$ il suo interno. Allora

$$4\pi \text{area}(D) \leq L^2 \quad (5)$$

e vale l'uguaglianza se e solo se il supporto di \underline{P} è una circonferenza.

Dimostrazione Possiamo supporre che la curva \underline{P} abbia parametrizzazione naturale. Dato $r > 0$, la lunghezza della curva $r\underline{P}$ ottenuta applicando a \underline{P} un'omotetia di ragione r è rL , mentre l'area dell'interno di $r\underline{P}$ è $r^2 \text{area}(D)$. Quindi a meno di sostituire \underline{P} con $\frac{2\pi}{L}\underline{P}$ possiamo supporre $L = 2\pi$, e ci basta dimostrare $\text{area}(D) \leq \pi$, con uguaglianza se e solo se il supporto di \underline{P} è una circonferenza.

Possiamo supporre \underline{P} parametrizzata secondo la lunghezza d'arco, per cui $\mathbf{a} = 0$ e $\mathbf{b} = 2\pi$, e con punto di partenza scelto in modo che $\underline{P}(0)$ e $\underline{P}(\pi)$ non siano vertici di \underline{P} . Inoltre, a meno di un movimento rigido del piano possiamo anche supporre $x_1(0) = x_1(\pi) = 0$.

Per il lemma abbiamo

$$\text{area}(D) = \int_0^{2\pi} x_1 \dot{x}_2 ds;$$

ci basterà allora dimostrare che sia l'integrale da 0 a π che l'integrale da π a 2π di $x_1 \dot{x}_2$ valgono al più $\frac{\pi}{2}$, con uguaglianza se e solo se il supporto di \underline{P} è una circonferenza.

Per cominciare abbiamo

$$\int_0^\pi x_1 \dot{x}_2 \, ds \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi (x_1^2 + \dot{x}_2^2) \, ds = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + x_1^2 - \dot{x}_1^2) \, ds, \quad (6)$$

dove l'ultima uguaglianza vale perché \underline{P} è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Ora, siccome $x_1(0) = x_1(\pi) = 0$, si può sempre scrivere la $x_1(s)$ nella forma

$$x_1(s) = u(s) \sin s,$$

dove $u : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe \mathcal{C}^1 a tratti. In particolare $\dot{x}_1 = \dot{u} \sin s + u \cos s$, quindi

$$\int_0^\pi x_1 \dot{x}_2 \, ds \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \dot{u}^2 \sin^2 s + u^2 (\sin^2 s - \cos^2 s) - 2u\dot{u} \sin s \cos s) \, ds.$$

Ma

$$\int_0^\pi (u^2 (\sin^2 s - \cos^2 s) - 2u\dot{u} \sin s \cos s) \, ds = - \int_0^\pi \frac{d}{ds} [u^2 \sin s \cos s] \, ds = 0,$$

quindi

$$\int_0^\pi x_1 \dot{x}_2 \, ds \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \dot{u}^2 \sin^2 s) \, ds \leq \frac{\pi}{2}, \quad (7)$$

come voluto. Un ragionamento del tutto analogo si applica all'integrale da π a 2π , pertanto la disuguaglianza isoperimetrica risulta dimostrata.

Se il supporto di \underline{P} è una circonferenza, è immediato verificare che si ha un'uguaglianza: $4\pi \cdot \pi r^2 = (2\pi r)^2$. Viceversa, se vale l'uguaglianza nella (5), deve valere anche nelle (6) e (7). Da quest'ultima abbiamo allora $\dot{u} \equiv 0$, e dunque $x_1(s) = c \sin s$ per un opportuno $c \in \mathbb{R}$. L'uguaglianza in (6) implica invece $x_1 \equiv \dot{x}_2$, perciò $x_2(s) = -c \cos s + d$ per un opportuno $d \in \mathbb{R}$. Ma allora il supporto di \underline{P} è una circonferenza. \square

Siamo ora in grado di rispondere alla domanda con cui abbiamo iniziato.

Corollario 8.10 Tra le curve di classe \mathcal{C}^2 a tratti, semplici e chiuse con lunghezza fissata, la circonferenza è quella che ha l'interno di area massima. Viceversa, tra i domini di area fissata con bordo una curva di classe \mathcal{C}^2 a tratti, semplice e chiusa, il disco è quello di perimetro minimo.

Dimostrazione Se la lunghezza è fissata uguale a L , per la disuguaglianza isoperimetrica l'area può valere al massimo $\frac{L^2}{4\pi}$, e tale valore è raggiunto solo dalla circonferenza. Viceversa, se l'area è fissata uguale ad A , allora il perimetro deve essere almeno $\sqrt{4\pi A}$, e tale valore è raggiunto solo dal disco. \square

8.4 Cenni sulla teoria globale delle curve spaziali

Diamo infine due informazioni relative alle curve nello spazio.

Teorema 8.11 [Fenchel] Se C è una curva di \mathbb{E}^3 chiusa e semplice allora

$$\int_0^L c(s) \, ds \geq 2\pi,$$

e vale l'uguaglianza se e solo se C è piana.

Una importante variante sul tema è la seguente.

Teorema 8.12 [Fary-Milnor] Se C è una curva di \mathbf{E}^3 chiusa e semplice annodata²⁶ allora

$$\int_0^L c(s) \, ds \geq 4\pi.$$

Non vale il viceversa. Stabilire se una curva sia annodata è una questione estremamente rilevante.²⁷

La dimostrazione di entrambi questi teoremi si può trovare in [3]. In essa si ricorre ad una superficie tubolare costruita attorno alla curva, di raggio piccolo quanto basta per evitare auto-intersezioni.

²⁶Non è qui possibile dare una definizione precisa di questo concetto; approssimativamente potremmo dire che una curva è annodata se non esiste una trasformazione fisicamente eseguibile dello spazio che trasporti il supporto di questa curva nel supporto di una circonferenza.

²⁷La teoria dei nodi è stata sviluppata inizialmente perché si pensava potesse rappresentare le orbite degli elettroni attorno al nucleo degli atomi; abbandonato il modello alla Rutherford in auge cent'anni fa, la teoria dei nodi viene oggi utilizzata soprattutto in biologia per la classificazione dei tratti di DNA.

Appendici

A Classificazione delle 1-sottovarietà

Vogliamo qui discutere un altro possibile approccio al problema di come definire il concetto di curva. L'idea è di concentrarci sul supporto: il supporto di una curva dev'essere un sottoinsieme di \mathbb{R}^n fatto (almeno localmente) come un intervallo della retta reale. Il miglior modo per concretizzare il concetto di "fatto come" consiste nell'usare il concetto di omeomorfismo. Introduciamo quindi la seguente

Definizione 19 Una 1-sottovarietà di classe \mathcal{C}^k in \mathbb{R}^n (con $k \geq 1$ e $n \geq 2$) è un sottoinsieme connesso $C \subset \mathbb{R}^n$ tale che per ogni $p \in C$ esistono un intorno $U \subset \mathbb{R}^n$ di p , un intervallo aperto $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ e un'applicazione $\underline{P} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ (detta *parametrizzazione locale*) di classe \mathcal{C}^k tali che

- (i) $\text{Im } \underline{P} = C \cap U$;
- (ii) \underline{P} è un *omeomorfismo con l'immagine*, ovvero è biunivoca e bicontinua una volta ristretto il codominio della funzione alla sua immagine;
- (iii) \underline{P} è regolare, cioè $\underline{P}'(t) \neq \underline{0} \forall t \in (a, b)$.

Se $\text{Im } \underline{P} = C$, diremo che \underline{P} è una *parametrizzazione globale*. Una *parametrizzazione periodica* è invece un'applicazione $\underline{P} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe \mathcal{C}^k periodica di periodo $L > 0$ con $\underline{P}(\mathbb{R}) = C$ e tale che per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ la restrizione $\underline{P}|_{(t_0, t_0+L)}$ sia una parametrizzazione locale di C con immagine $C \setminus \{\underline{P}(t_0)\}$.

Esempio

- Il grafico $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^2$ di una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe \mathcal{C}^k è una 1-sottovarietà di classe \mathcal{C}^k . Infatti una parametrizzazione di Γ_f è la solita applicazione $\underline{P} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\underline{P}(t) = (t, f(t))$.
- Un segmento chiuso S in \mathbb{R}^n non può essere una 1-sottovarietà. Infatti, nessun intorno in S degli estremi è omeomorfo a un intervallo aperto della retta reale, perciò gli estremi non possono essere contenuti nell'immagine di una parametrizzazione locale. Per un motivo analogo, una figura a forma di "8" nel piano non può essere una 1-sottovarietà. Infatti, stavolta è il punto di autointersezione a non aver alcun intorno omeomorfo a un intervallo.
- Una circonferenza nel piano è una 1-sottovarietà, ma non può avere una parametrizzazione globale (esercizio); ha però una parametrizzazione periodica.

Le condizioni (i) e (ii) nella definizione di 1-sottovarietà ci dicono che l'insieme C è, dal punto di vista topologico, fatto come un intervallo. La condizione (iii) invece ha due scopi: fornisce un vettore tangente alla 1-sottovarietà, escludendo

la presenza di punti angolosi e altre singolarità; assicura che anche dal punto di vista differenziale la struttura sia la stessa degli intervalli.

Il fondamentale risultato che ci accingiamo ad enunciare dice in sostanza che per studiare le curve la definizione di 1-sottovarietà che abbiamo dato è eccessivamente complicata.

Teorema A.1 Ogni 1-sottovarietà non compatta ha una parametrizzazione globale, e ogni 1-sottovarietà compatta ha una parametrizzazione periodica. Più esattamente, se $C \subset \mathbb{R}^n$ è una 1-sottovarietà di classe \mathcal{C}^k allora esiste un'applicazione $\widehat{P} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe \mathcal{C}^k tale che $\widehat{P}'(t) \neq \underline{0} \forall t \in \mathbb{R}$ e

- (a) se C non è compatta allora \widehat{P} è una parametrizzazione globale di C , e C è omeomorfa a \mathbb{R} ;
- (b) se C è compatta allora \widehat{P} è una parametrizzazione periodica di C , e C è omeomorfa alla circonferenza S^1 .

Dimostrazione Vogliamo innanzitutto vedere cosa succede quando due parametrizzazioni locali rispetto alla lunghezza d'arco hanno immagini che si intersecano. Siano $\underline{P} : (a, b) \rightarrow C$ e $\underline{Q} : (c, d) \rightarrow C$ due parametrizzazioni locali rispetto alla lunghezza d'arco tali che $\text{Im } \underline{P} \cap \text{Im } \underline{Q} \neq \emptyset$; poniamo $J_1 = \underline{P}^{-1}(\text{Im } \underline{P} \cap \text{Im } \underline{Q}) \subseteq (a, b)$, $J_2 = \underline{Q}^{-1}(\text{Im } \underline{P} \cap \text{Im } \underline{Q}) \subseteq (c, d)$, e $h = \underline{Q}^{-1} \circ \underline{P} : J_1 \subseteq (a, b) \rightarrow J_2 \subseteq (c, d)$. La funzione h è un omeomorfismo di aperti di \mathbb{R} di classe (almeno) \mathcal{C}^1 . Infatti, fissiamo $t_0 \in J_1$: da $\underline{Q} \circ h = \underline{P}$ otteniamo

$$\frac{\underline{P}(t) - \underline{P}(t_0)}{t - t_0} = \frac{\underline{Q}(h(t)) - \underline{Q}(h(t_0))}{h(t) - h(t_0)} \cdot \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} \quad \forall t \in J_1.$$

Facendo tendere $t \rightarrow t_0$ il primo quoziente converge a $\underline{P}'(t_0)$, il secondo a $\underline{Q}'(h(t_0))$. Siccome \underline{Q} è una parametrizzazione locale, esiste un indice $j \in \{1, \dots, n\}$ per cui si abbia $\underline{Q}'_j(h(t_0)) \neq 0$; quindi

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \frac{\underline{P}'_j(t_0)}{\underline{Q}'_j(h(t_0))}$$

esiste, e dunque h è derivabile. Inoltre, lo stesso ragionamento funziona con lo stesso indice j per tutti i t in un intorno di t_0 , dunque abbiamo

$$h' = \frac{\underline{P}'_j}{\underline{Q}'_j \circ h}$$

in un intorno di t_0 , e quindi h' è continua. Da $\underline{Q} \circ h = \underline{P}$ deduciamo anche $(\underline{Q}' \circ h)h' = \underline{P}'$, e quindi $|h'| \equiv 1$ in quanto \underline{P} e \underline{Q} sono parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco. Pertanto il grafico Γ di h è costituito da segmenti di pendenza ± 1 , tanti quante sono le componenti connesse di J_1 (e quindi di J_2). In ciascuna di queste componenti avremo allora $h(t) = \pm t + a$, cioè $\underline{P}(t) = \underline{Q}(\pm t + a)$, per un certo $a \in \mathbb{R}$. Sappiamo poi che il grafico Γ di h è contenuto nel rettangolo $(a, b) \times (c, d)$; dimostreremo ora che gli estremi dei segmenti di Γ sono necessariamente sul bordo di questo rettangolo. Prima di tutto, notiamo che $(s_0, s) \in \Gamma$ se e solo se $s = h(s_0)$, per cui

$$(s_0, s) \in \Gamma \implies \underline{Q}(s) = \underline{P}(s_0).$$

Sia ora, per assurdo, $(t_0, t) \in (a, b) \times (c, d)$ un estremo di un segmento di Γ contenuto nell'interno del rettangolo; in particolare, esistano $\underline{P}(t_0)$ e $\underline{Q}(t)$. Poiché (t_0, t) è un estremo di Γ , deduciamo $t_0 \in \partial J_1$; d'altra parte il punto $\underline{Q}(t) = \underline{P}(t_0)$ risulta interno a

$\text{Im } \underline{P} \cap \text{Im } \underline{Q}$, e quindi, se t_0 è interno a (a, b) , deve essere $\underline{Q}(t') = \underline{P}(t'_0)$ per ogni (t', t'_0) in un opportuno aperto di $(a, b) \times (c, d)$. Ma allora t_0 sarebbe interno a J_1 , assurdo. Ora, Γ è il grafico di una funzione iniettiva; quindi ciascun lato del rettangolo $(a, b) \times (c, d)$ può essere toccato da al più un estremo di Γ . Ma questo implica che Γ , e quindi J_2 , ha al più 2 componenti connesse; e se ne ha due, entrambe hanno la stessa pendenza.

Riassumendo, abbiamo dimostrato che se $\text{Im } \underline{P} \cap \text{Im } \underline{Q} \neq \emptyset$ allora si possono verificare solo tre eventualità:

- (i) $\text{Im } \underline{Q} \subseteq \text{Im } \underline{P}$ oppure $\text{Im } \underline{P} \subseteq \text{Im } \underline{Q}$, nel qual caso Γ consiste di un unico segmento di pendenza ± 1 che congiunge due lati opposti del rettangolo $(a, b) \times (c, d)$;
- (ii) $\text{Im } \underline{P} \cap \text{Im } \underline{Q}$ consiste di un'unica componente connessa distinta sia da $\text{Im } \underline{P}$ che da $\text{Im } \underline{Q}$, e Γ consiste di un unico segmento di pendenza ± 1 che congiunge due lati adiacenti del rettangolo $(a, b) \times (c, d)$;
- (iii) $\text{Im } \underline{P} \cap \text{Im } \underline{Q}$ consiste di due componenti connesse, e Γ consiste di due segmenti di uguale pendenza ± 1 che congiungono due lati adiacenti del rettangolo $(a, b) \times (c, d)$.

Notiamo infine che se Γ ha pendenza -1 , ponendo $\underline{P}_1(t) = \underline{P}(-t)$ otteniamo una parametrizzazione locale rispetto alla lunghezza d'arco \underline{P}_1 di C con la stessa immagine di \underline{P} ma tale che il grafico di $h_1 = \underline{Q}^{-1} \circ \underline{P}_1$ abbia pendenza $+1$ (esercizio).

Supponiamo ora che esistano due parametrizzazioni locali rispetto alla lunghezza d'arco $\underline{P} : (a, b) \rightarrow C$ e $\underline{Q} : (c, d) \rightarrow C$ per cui $\text{Im } \underline{P} \cap \text{Im } \underline{Q}$ abbia effettivamente due componenti connesse; vogliamo dimostrare che allora siamo necessariamente nel caso (b) del teorema. Per quanto detto poc'anzi possiamo supporre che il cambiamento di parametro $h = \underline{Q}^{-1} \circ \underline{P}$ abbia pendenza 1 in entrambe le componenti connesse J_1^1 e J_1^2 di J_1 . Quindi esistono $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$h(t) = \begin{cases} t + q_1 & t \in J_1^1 \\ t + q_2 & t \in J_1^2 \end{cases}$$

Ora notiamo che $(a, b) \cap (c - q_2, d - q_2) = J_1^2$, perché

$$\begin{aligned} J_1 &= \underline{P}^{-1}(\text{Im } \underline{P} \cap \text{Im } \underline{Q}) = (a, b) \cap \underline{P}^{-1}(\text{Im } \underline{Q}) = (a, b) \cap h^{-1}((c, d)) \\ &= [(a, b) \cap (c - q_1, d - q_1)] \cup [(a, b) \cap (c - q_2, d - q_2)]. \end{aligned}$$

Definiamo allora $\tilde{\underline{P}} : (a, b) \cup (c - q_2, d - q_2) \rightarrow C$ ponendo

$$\tilde{\underline{P}} = \begin{cases} \underline{P}(t) & t \in (a, b) \\ \underline{Q}(t + q_2) & t \in (c - q_2, d - q_2) \end{cases}$$

Siccome $\underline{P}(t) = \underline{Q}(t + q_2)$ su $(a, b) \cap (c - q_2, d - q_2)$, la $\tilde{\underline{P}}$ è ben definita e di classe \mathcal{C}^k . Inoltre, se $t \in J_1^1$ si ha

$$\tilde{\underline{P}}(t) = \underline{P}(t) = \underline{Q}(h(t)) = \underline{Q}(t + q_1) = \tilde{\underline{P}}(t + L),$$

dove $L = q_1 - q_2$. Possiamo perciò estendere $\tilde{\underline{P}}$ ad un'applicazione $\hat{\underline{P}} : \mathbb{R} \rightarrow C$ di classe \mathcal{C}^k e periodica di periodo L . Ora, $\hat{\underline{P}}(\mathbb{R}) = \text{Im } \underline{P} \cup \text{Im } \underline{Q}$ è aperto in C . Ma $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ si ha $\hat{\underline{P}}(\mathbb{R}) = \hat{\underline{P}}([t_0, t_0 + L])$, quindi $\hat{\underline{P}}(\mathbb{R})$ è compatto e pertanto chiuso in C , dato che quest'ultimo è uno spazio topologico di Hausdorff. Essendo C connesso, otteniamo $\hat{\underline{P}}(\mathbb{R}) = C$, cioè $\hat{\underline{P}}$ è suriettiva e C è compatta. Inoltre, dal fatto che \underline{P} e \underline{Q} sono parametrizzazioni locali si deduce subito (esercizio) che $\hat{\underline{P}}|_{(t_0, t_0 + L)}$ è una parametrizzazione locale $\forall t_0 \in \mathbb{R}$; quindi $\hat{\underline{P}}$ è una parametrizzazione periodica.

Rimane da far vedere che C è omeomorfa a S^1 . Realizziamo S^1 come lo spazio quoziente ottenuto identificando i due estremi dell'intervallo $[0, L]$. Essendo $\hat{\underline{P}}(0) = \hat{\underline{P}}(L)$,

la $\widehat{\underline{P}}$ induce un'applicazione continua suriettiva $f: S^1 \rightarrow C$. Siccome $\widehat{\underline{P}}|_{(0,L)}$ è iniettiva, la f risulta essere biunivoca; essendo S^1 compatto e C di Hausdorff, la f è un omeomorfismo, come voluto.

Supponiamo ora che non succeda mai che l'intersezione delle immagini di due parametrizzazioni locali rispetto alla lunghezza d'arco abbia due componenti connesse; vogliamo dimostrare che siamo nel caso (a) del teorema. Sia $\underline{P}: (a, b) \rightarrow C$ una parametrizzazione locale *massimale*, cioè tale che non sia possibile estenderla a una parametrizzazione locale definita su un intervallo aperto strettamente più grande di (a, b) . Supponiamo, per assurdo, che $\text{Im } \underline{P}$ non sia tutto C , e prendiamo un punto p appartenente al bordo di $\text{Im } \underline{P}$ in C . Siccome C è una 1-sottovarietà, esiste una parametrizzazione locale rispetto alla lunghezza d'arco $\underline{Q}: (c, d) \rightarrow C$ la cui immagine contiene p . In particolare, $\text{Im } \underline{Q} \cap \text{Im } \underline{P} \neq \emptyset$, in quanto p sta nella chiusura di $\text{Im } \underline{P}$; e $\text{Im } \underline{Q} \not\subset \text{Im } \underline{P}$ in quanto $p \in \text{Im } \underline{Q} \setminus \text{Im } \underline{P}$; e $\text{Im } \underline{P} \not\subset \text{Im } \underline{Q}$ per la massimalità di \underline{P} . Siamo dunque nel caso (ii); possiamo inoltre supporre che $h = \underline{Q}^{-1} \circ \underline{P}: J_1 \rightarrow J_2$ sia della forma $h(t) = t + q$ per qualche $q \in \mathbb{R}$. Definiamo $\widetilde{\underline{P}}: (a, b) \cup (c - q, d - q)$ ponendo

$$\widetilde{\underline{P}} = \begin{cases} \underline{P}(t) & t \in (a, b) \\ \underline{Q}(t + q) & t \in (c - q, d - q) \end{cases}$$

Si verifica facilmente che $\widetilde{\underline{P}}$ è una parametrizzazione locale rispetto alla lunghezza d'arco di C definita su un intervallo aperto strettamente più grande di (a, b) , assurdo. La contraddizione deriva dall'aver supposto che \underline{P} non fosse suriettiva. Quindi si deve avere $\text{Im } \underline{P} = C$, cioè C ha una parametrizzazione globale, ed è omeomorfa all'intervallo (a, b) . Siccome tutti gli intervalli aperti sono omeomorfi a \mathbb{R} , abbiamo la tesi. \square

B Alcuni esercizi

In questa appendice passiamo in rassegna alcuni tra i più importanti concetti introdotti nella teoria, riproponendoli da un punto di vista più pratico e sintetico. Ci auguriamo che negli esercizi svolti il lettore possa trovare un valido punto di partenza per comprendere come si possano applicare nell'atto pratico le tecniche fin qui introdotte.

Proprio da quanto appreso finora partiremo infine per estendere i nostri risultati ad una classe più ampia di curve, che non saranno più a valori in un semplice spazio vettoriale, bensì in uno spazio di matrici.

B.1 Retta tangente e piano osculatore

Siamo interessati a studiare curve della forma

$$\underline{P}: t \in (a, b) \rightarrow \underline{P}(t) \in \mathbb{E}^3$$

con $\underline{P} \in \mathcal{C}^1(a, b)$. In realtà non ci interessa proprio questo, bensì delle classi di equivalenza, dimodoché andremo ad identificare due curve equivalenti \underline{P} e \underline{Q} qualora commuti il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\underline{P}} & \mathbb{E}^3 \\ \varphi \downarrow & \nearrow \underline{Q} & \\ J & & \end{array}$$

I, J intervalli chiusi
 $\varphi: I \rightarrow J$ diffeomorfismo

Detto ciò si definiscono:

- retta tangente in $\underline{P}(t_0)$ (se la curva è regolare),

$$\underline{R}(\lambda) = \underline{P}(t_0) + \lambda \dot{\underline{P}}(t_0) \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

- piano osculatore in $\underline{P}(t_0)$ (se la curva è fortemente regolare),

$$\underline{Q}(\lambda, \mu) = \underline{P}(t_0) + \lambda \dot{\underline{P}}(t_0) + \mu \ddot{\underline{P}}(t_0).$$

Questa è l'equazione parametrica del piano. L'equazione implicita è data dalla richiesta di lineare dipendenza di $\underline{Q} - \underline{P}(t_0)$, $\dot{\underline{P}}(t_0)$, $\ddot{\underline{P}}(t_0)$, ovvero

$$\begin{vmatrix} \underline{Q} - \underline{P}(t_0) \\ \dot{\underline{P}}(t_0) \\ \ddot{\underline{P}}(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si noti che per avere una curva non solo regolare, ma fortemente regolare, si chiede essenzialmente l'esistenza del piano osculatore.

Esempio Sia C la curva definita da

$$\underline{P}(t) = [t + 1, \quad t^2 + t + 1, \quad t^3 + t^2 + t + 1].$$

Osserviamo che

$$\dot{\underline{P}}(t) = [1, \quad 2t + 1, \quad 3t^2 + 2t + 1] \neq 0 \quad \forall t,$$

quindi C è regolare.

$$\ddot{\underline{P}}(t) = [0, \quad 2, \quad 6t + 2]$$

C è fortemente regolare se e solo se $\dot{\underline{P}} \wedge \ddot{\underline{P}} \neq 0 \forall t$, e questo è vero in quanto si verifica che

$$\text{rk} \begin{bmatrix} \dot{\underline{P}} \\ \ddot{\underline{P}} \end{bmatrix} = 2.$$

Calcoliamo il piano osculatore in $\underline{P}(t)$.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \underline{Q} - \underline{P} \\ \dot{\underline{P}} \\ \ddot{\underline{P}} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x - t - 1 & y - t^2 - t - 1 & z - t^3 - t^2 - t - 1 \\ 1 & 2t + 1 & 3t^2 + 2t + 1 \\ 0 & 2 & 6t + 2 \end{vmatrix} \\ &= 3t^2x - (3t + 1)y + z - t^3 + 3t = 0. \end{aligned}$$

Infine ci chiediamo se $\exists t \neq u : \underline{P}(t) = \underline{P}(u)$, ovvero se C è semplice oppure no.

$$\underline{P}(t) = \underline{P}(u) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t + 1 = u + 1 \\ t^2 + t + 1 = u^2 + u + 1 \\ t^3 + t^2 + t + 1 = u^3 + u^2 + u + 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t = u,$$

quindi questa curva è semplice.

Esercizio 8 Calcolare la retta tangente in ogni punto della curva C .

B.2 Lunghezza d'arco

Data $\underline{P} = \underline{P}(t)$, la lunghezza d'arco infinitesima²⁸ è data da

$$|ds| = \|d\underline{P}\| = \|\dot{\underline{P}}\| dt, \quad s = \int_{t_0}^t \|\dot{\underline{P}}(\vartheta)\| d\vartheta.$$

Esempio [cicloide] Sia

$$\underline{P}(t) = a[t - \sin t, \quad 1 - \cos t].$$

Questa è una curva famosa, la cosiddetta *cicloide*. Corrisponde pressapoco alla curva descritta andando in bicicletta dalla valvola di una ruota.²⁹



Geometricamente a è il raggio della circonferenza rotante. Scegliamo per semplicità $t_0 = 0$ e calcoliamo

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^t \|\dot{\underline{P}}(\vartheta)\| d\vartheta = \int_0^t \|\dot{\underline{P}}(\vartheta)\| d\vartheta = a\sqrt{2} \int_0^t \sqrt{1 - \cos \vartheta} d\vartheta & \vartheta = 2u \\ & & d\vartheta = 2 du \\ &= 2a\sqrt{2} \int_0^{\frac{t}{2}} \sqrt{1 - \cos 2u} du = 2a\sqrt{2} \int_0^{\frac{t}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 u + \sin^2 u} du \\ &= 4a \int_0^{\frac{t}{2}} \sin u du & \text{per } \frac{t}{2} \leq \pi \Leftrightarrow t \leq 2\pi \\ &= 4a[-\cos u]_0^{\frac{t}{2}} = 4a\left(1 - \cos \frac{t}{2}\right) = s(t). \end{aligned}$$

Da questo ricaviamo

$$t = 2 \arccos\left(1 - \frac{s}{4a}\right),$$

e la parametrizzazione naturale della cicloide sarà data da

$$\underline{P}\left(2 \arccos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\right).$$

B.3 Curvatura e torsione

Data $\underline{P} = \underline{P}(t)$ con t parametro qualsiasi, ricordiamo che i versori del sistema di riferimento mobile sono:

$$\underline{t} = \frac{\dot{\underline{P}}}{\|\dot{\underline{P}}\|}, \quad \underline{n} = \underline{b} \wedge \underline{t}, \quad \underline{b} = \frac{\dot{\underline{P}} \wedge \ddot{\underline{P}}}{\|\dot{\underline{P}} \wedge \ddot{\underline{P}}\|}.$$

Curvatura e torsione di \underline{P} sono dati dalle formule:

$$c = \frac{\|\dot{\underline{P}} \wedge \ddot{\underline{P}}\|}{\|\dot{\underline{P}}\|^3}, \quad \tau = \frac{\dot{\underline{P}} \wedge \ddot{\underline{P}} \cdot \ddot{\underline{P}}}{\|\dot{\underline{P}} \wedge \ddot{\underline{P}}\|^2}.$$

²⁸Quello che nei vecchi testi viene chiamato *elemento d'arco*.

²⁹Si può anche considerare come punto solidale alla circonferenza un punto non appartenente ad essa. Se tale punto viene preso all'interno della circonferenza si parla di *cicloide oblata*, se viene preso all'esterno di *cicloide prolata*.

Nel caso speciale delle curve piane si ha costantemente $\tau = 0$. La curvatura è invece computabile mediante la formula

$$c = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right)^3}$$

per una curva $\underline{P}(t) = [x(t), y(t)]$.

Esempio [elica circolare] Sono dette *eliche circolari* (o *eliche cilindriche*) tutte le curve della forma:

$$\underline{P}(t) = [a \cos t, a \sin t, bt],$$

con $a > 0$, $b \neq 0$. Cominciamo il nostro studio calcolando le derivate di $\underline{P}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{P}}(t) &= [-a \sin t, a \cos t, b] \\ \ddot{\underline{P}}(t) &= [-a \cos t, -a \sin t, 0] \\ \dddot{\underline{P}}(t) &= [a \sin t, -a \cos t, 0] \end{aligned}$$

A partire da questo si ricava che $\|\dot{\underline{P}}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ è costante. Perciò è facile calcolare la lunghezza d'arco:

$$\int_0^t \|\dot{\underline{P}}\| d\vartheta = \sqrt{a^2 + b^2} t.$$

Facendo i conti abbiamo poi

$$\begin{aligned} \dot{\underline{P}} \wedge \ddot{\underline{P}} &= [ab \sin t, -ab \cos t, a^2] \\ \|\dot{\underline{P}} \wedge \ddot{\underline{P}}\| &= |a| \sqrt{a^2 + b^2} = a \sqrt{a^2 + b^2} \\ \dot{\underline{P}} \wedge \ddot{\underline{P}} \cdot \dddot{\underline{P}} &= a^2 b \end{aligned}$$

da cui seguono

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Le eliche circolari sono caratterizzate dal fatto che curvatura e torsione (non nulle) risultano costanti; per il teorema di integrazione possiamo anzi affermare che sono le uniche curve di \mathbf{E}^3 con tale proprietà. Ricordiamo che ogni curva può approssimarsi localmente con un'elica circolare: se approssimiamo in sviluppo di Taylor la curva al primo ordine otteniamo la retta tangente alla curva; al secondo ordine tangente e curvatura; al terzo ordine tangente, curvatura e torsione.

B.4 Curve su spazi di matrici

È ben noto come sia possibile identificare uno spazio di matrici $\text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ con uno spazio vettoriale \mathbb{R}^{mn} . Si può ad esempio far corrispondere ad ogni matrice il vettore individuato dall'accodamento delle sue colonne. Grazie ad una tale biiezione, sia i vettori che le matrici vengono ad acquisire proprietà che erano loro finora estranee. In primo luogo, lo spazio matriciale guadagna un concetto di prodotto interno; d'altra parte, limitando la propria tolleranza nei confronti delle matrici, i vettori possono venire a costituire un gruppo algebrico.

Detto ciò, potrebbe essere interessante considerare curve differenziabili a valori in uno spazio di matrici, della forma

$$P : (a, b) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R}).$$

Per le osservazioni appena viste, tutta la teoria finora affrontata risulta automaticamente trasportabile a tale caso.

Come già accennato, l'interesse nei confronti di questo studio si accresce se consideriamo dei veri e propri gruppi di matrici, in modo da poter analizzare come le proprietà algebriche si riflettano su quelle geometriche.

In quanto segue ci limiteremo a presentare qualche esempio, e per non appesantire l'analisi considereremo solo matrici quadrate 2×2 .

Cominciamo considerando le curve

$$P : (a, b) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}_2(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}.$$

Siccome il nostro studio geometrico si basa su un'analisi di tipo differenziale, è senz'altro una questione di fondamentale importanza comprendere quale aspetto abbia lo spazio tangente in un punto di tale gruppo di matrici. Per ragioni che qui non sarebbe possibile spiegare, è sufficiente determinare lo spazio tangente $T_1(\text{GL}_2(\mathbb{R}))$ in corrispondenza della matrice I che funge da unità del gruppo. Ebbene, si può mostrare che $T_1(\text{GL}_2(\mathbb{R})) = \text{Mat}_2(\mathbb{R})$. È ovvio che $T_1(\text{GL}_2(\mathbb{R})) \subseteq \text{Mat}_2(\mathbb{R})$; per provare il viceversa, consideriamo la generica matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \text{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

È immediato verificare che la curva P definita in un qualsiasi intorno reale di 0 da

$$P(t) = \begin{bmatrix} 1 + \alpha t & \beta t \\ \gamma t & 1 + \delta t \end{bmatrix}$$

soddisfa $\dot{P}(0) = A$, e $P(0) = I$. Ora,

$$\det \underline{P}(t) = (1 + \alpha t)(1 + \delta t) - \beta \gamma t^2 = 1 + (\alpha + \delta)t + (\alpha\delta - \beta\gamma)t^2$$

può annullarsi in al più due punti discosti da $t = 0$, quindi la curva \underline{P} è, in un opportuno intorno di $t = 0$, a valori in $\text{GL}_2(\mathbb{R})$. Pertanto A è un elemento di $T_1(\text{GL}_2(\mathbb{R}))$, che ha così dimensione 4 su \mathbb{R} .

Uno spazio tangente così vasto non è però comune a tutti i gruppi di matrici che possiamo considerare. Prendiamo ad esempio $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, e proviamo che

$$T_1(\text{SL}_2(\mathbb{R})) = \{A \in \text{Mat}_2(\mathbb{R}) : \text{Tr } A = 0\},$$

e quindi lo spazio tangente ha dimensione 3 su \mathbb{R} . Consideriamo una curva

$$P : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}_2(\mathbb{R}) : \det A = 1\},$$

con $\varepsilon > 0$ e tale che $\underline{P}(0) = I$. Sia

$$P(t) = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{bmatrix}.$$

Poiché \underline{P} è una curva in $SL_2(\mathbb{R})$, varrà

$$\det P(t) = a(t)d(t) - b(t)c(t) = 1 \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

da cui, valutando la derivata prima per $t = 0$,

$$0 = \dot{a}(0)d(0) + a(0)\dot{d}(0) - \dot{b}(0)c(0) - b(0)\dot{c}(0) = \dot{a}(0) + \dot{d}(0) = \text{Tr } \dot{P}(0).$$

Quindi ogni matrice $A \in T_1(SL_2(\mathbb{R}))$ ha traccia nulla. Viceversa, si consideri la generica matrice a traccia nulla

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Orbene, è facile verificare che per realizzare A come vettore tangente in I ad una curva in $SL_2(\mathbb{R})$ è sufficiente considerare

$$P(t) = \begin{bmatrix} 1 + \alpha t + (\alpha^2 + \beta\gamma)t^2 & \beta t - \frac{\alpha^3 + \alpha\beta\gamma}{\gamma}t^2 \\ \gamma t & 1 - \alpha t \end{bmatrix}$$

se $\gamma \neq 0$, ovvero

$$P(t) = \begin{bmatrix} 1 + \alpha t + \alpha^2 t^2 & \beta t \\ -\frac{\alpha^3}{\beta}t^2 & 1 - \alpha t \end{bmatrix}$$

se $\gamma = 0$ e $\beta \neq 0$, ovvero

$$P(t) = \begin{bmatrix} 1 + \alpha t + \frac{\alpha^2}{2}t^2 & \frac{\alpha^2}{2}t^2 \\ \frac{\alpha^2}{2}t^2 & 1 - \alpha t + \frac{\alpha^2}{2}t^2 \end{bmatrix}$$

se $\beta = \gamma = 0$. Ciascuna di queste curve appartiene a $SL_2(\mathbb{R}) \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, perciò possiamo infine concludere

$$T_1(SL_2(\mathbb{R})) = \{A \in \text{Mat}_2(\mathbb{R}) : \text{Tr } A = 0\}.$$

Una riduzione ancora più significativa dello spazio tangente si ha considerando i gruppi ortogonali $O(2)$ e $SO(2)$. Prendiamo una generica curva di $O(2)$

$$P : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow O(2) = \{A \in \text{Mat}_2(\mathbb{R}) : A^T A = I\},$$

e come prima riferiamoci alle sue componenti usando

$$P(t) = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{bmatrix}$$

tale che $P(0) = I$. La condizione da cui nasce il gruppo ortogonale impone dunque

$$\begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(t) & c(t) \\ b(t) & d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

cioè

$$\begin{cases} [a(t)]^2 + [b(t)]^2 = 1 \\ a(t)c(t) + b(t)d(t) = 0 \\ [c(t)]^2 + [d(t)]^2 = 1 \end{cases}$$

Derivando queste condizioni otteniamo

$$\begin{cases} 2a(t)\dot{a}(t) + 2b(t)\dot{b}(t) = 0 \\ a(t)\dot{c}(t) + \dot{a}(t)c(t) + b(t)\dot{d}(t) + \dot{b}(t)d(t) = 0 \\ 2c(t)\dot{c}(t) + 2d(t)\dot{d}(t) = 0 \end{cases}$$

Poiché $\underline{P}(0) = I$,

$$\begin{cases} \dot{a}(0) + 0 = 0 \\ \dot{c}(0) + \dot{b}(0) = 0 \\ \dot{d}(0) + 0 = 0 \end{cases}$$

Ne consegue che la matrice tangente ha nell'origine la forma

$$\dot{P}(0) = \begin{bmatrix} 0 & \dot{b}(0) \\ -\dot{b}(0) & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque ogni matrice di $T_1(O(2))$ è emisimmetrica. Viceversa, data la matrice emisimmetrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -h \\ h & 0 \end{bmatrix},$$

la curva

$$P(t) = \begin{bmatrix} \cos ht & -\sin ht \\ \sin ht & \cos ht \end{bmatrix}$$

ha valori in $O(2) \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e soddisfa $\dot{P}(0) = A$. In definitiva, lo spazio tangente è in questo caso quello delle matrici emisimmetriche,

$$\{A \in \text{Mat}_2(\mathbb{R}) : A^T = -A\},$$

che ha dimensione 1 su \mathbb{R} .

Bibliografia

- [1] M. Abate, F. Tovena. *Curve e superfici*. Springer-Verlag, Milano 2006.
- [2] M.L. Curtis. *Matrix Groups*. Springer-Verlag, New York 1979.
- [3] M.P. Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1976.
- [4] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone. *Analisi Matematica due*. Liguori, Napoli 1996.
- [5] G. Gilardi. *Analisi due*. McGraw-Hill Italia, Milano 1996.
- [6] A. Goetz. *Introduction to differential geometry*. Addison-Wesley, Reading 1970.
- [7] A. Gray. *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*. CRC Press, Boca Raton 1998.
- [8] H.W. Guggenheimer. *Differential Geometry*. McGraw-Hill, New York 1963.
- [9] W. Klingenberg. *A Course in Differential Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 51, Springer-Verlag, New York 1978.
- [10] M.M. Lipschutz. *Geometria differenziale*. Etas, Milano 1984.
- [11] A.S. Mishchenko, A. Fomenko. *A course of differential geometry and topology*. Mir Publishers, Moscow 1968.
- [12] B. O'Neill. *Elementary differential geometry*. New York Academic Press, New York 1966.
- [13] J. Oprea. *Differential geometry and its applications*. Prentice Hall, Upper Daddle River 1997.
- [14] S. G. Smith. Drilling Square Holes. *Mathematics Teacher*, **86**, No. 7 (1993): 579–583. Reperibile in rete all'indirizzo <http://upper.us.edu/faculty/smith/reuleaux.htm>.
- [15] J.J. Stoker. *Differential geometry*. Wiley-Interscience, New York 1969.
- [16] I. Vaisman. *A First Course in Differential Geometry*. Marcel Dekker, New York 1984.