PARZIALE DI ALGEBRA 3, 17/11/2015

COGNOME e Nome .....

MATRICOLA .....

Esercizio 1. Si consideri il polinomio $f(X) = X^3 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$ e sia E il suo campo di spezzamento.

(1) Determinare il grado $[E : \mathbb{Q}]$. Esibire una base di E come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale.
(2) Dimostrare che E è una estensione di Galois di $\mathbb{Q}$. Descrivere tutti gli elementi del gruppo di Galois $G_{E/\mathbb{Q}}$.
(3) Trovare $\eta \in E$ tale che $E = \mathbb{Q}(\eta)$.

Esercizio 2. Sia $\zeta := \exp\left(\frac{2\pi i}{11}\right) \in \mathbb{C}$ radice primitiva undicesima dell'unità e sia $f(X) = X^5 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

(1) Si trovi una $\mathbb{Q}$-base $\mathcal{B}_\zeta$ di $\mathbb{Q}(\zeta)$.
(2) Detta $\alpha \in \mathbb{C}$ una radice di $f(X)$ si trovi una $\mathbb{Q}$-base $\mathcal{B}_\alpha$ di $\mathbb{Q}(\alpha)$ e si mostri che $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ non è una estensione normale.
(3) Si trovi una $\mathbb{Q}$-base $\mathcal{B}$ del sottocampo $\mathbb{Q}(\zeta, \alpha)$ di $\mathbb{C}$. Si scriva $\frac{\zeta}{\alpha}$ in questa base.

Esercizio 3. (*Teoria*) Siano F ed Ω due campi e sia $\mathcal{F} \subset F[X]$ una famiglia di polinomi.

(1) Se $F \subset \Omega$ mostrare che sono equivalenti le seguenti affermazioni.
   (*i*) Per ogni estensione finita semplice $F(x)/F$ tale $f_x(X) \in \mathcal{F}$, dove $f_x(X)$ è polinomio minimo di x su F, esiste una immersione di campi $\delta : F(x) \hookrightarrow \Omega$ tale che $\delta_{|F} = 1_F$.
   (*ii*) Per ogni $f(X) \in \mathcal{F}$, esiste una radice di $f(X)$ in Ω.
(2) Se $\sigma\colon F \hookrightarrow \Omega$ è un omomorfismo di campi, riformulare l'equivalenza in (1) e dimostrarla.