A.A. 2010/2011 - Primo foglio di esercizi di Algebra 3

1. Mostrare che i campi $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbf{Q}(\sqrt{7})$ non sono isomorfi.

2. Sia $\alpha := 2 - \sqrt{3}$.

(i) Trovare il grado dell'estensione $\mathbf{Q}(\alpha)$ di $\mathbf{Q}$.

(ii) Trovare un polinomio monico irriducibile in $\mathbf{Q}[X]$ di cui α sia una radice.

Rispondere ai quesiti (i) e (ii) ponendo $\alpha := \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ oppure $\alpha = \beta^{-1}$ con β radice del polinomio $X^3 + 3X - 3$.

3. Sia $K \subset L = K(\alpha)$ una estensione di grado dispari. Fare vedere che $L = K(\alpha^2)$.

4. Sia K un campo e sia α un elemento trascendente su K. Sia $\beta \in K(\alpha)$ tale che $\beta \notin K$. Mostrare che α è algebrico su $K(\beta)$ e che β è trascendente su K.

5. Sia α una radice del polinomio $X^4 + 2$ a coeffcienti in $\mathbf{F}_5$.

(i) Trovare il grado dell'estensione $\mathbf{F}_5 \subset \mathbf{F}_5(\alpha)$.

(ii) Trovare il campo di spezzamento di $X^4 + 2$ su $\mathbf{F}_5$.

6. (i) Far vedere che non esistono a e $b \in \mathbf{Q}$ tali che $\left(a + b\sqrt{2}\right)^2 = 3$. Dedurre che il polinomio $X^2 - 3$ è irriducibile in $\mathbf{Q}(\sqrt{2})[X]$.

(ii) Provare che $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ è un campo, di grado 4 come estensione di $\mathbf{Q}$.

(iii) Trovare tutte le estensioni di $\mathbf{Q}$ contenute in $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

7. Sia ζ_4 una radice primitiva dell' unità di ordine 4. Sia $K := \mathbf{Q}(\zeta_4, \sqrt[4]{2})$.

(i) Mostrare che K è il campo di spezzamento del polinomio $X^4 - 2$ su $\mathbf{Q}$. Trovare il grado di K su $\mathbf{Q}$.

(ii) Mostrare che il coniugio complesso manda elementi di K in elementi di K e deficisce quindi un automorfismo non banale σ di K tale che $\sigma^2 = \mathrm{Id}$. Trovare gli elementi $K^+ := \{k \in K | \sigma(k) = k\}$ e mostrare che $K^+ \subset K$ è un sottocampo. Trovare il grado di K^+ su $\mathbf{Q}$.

(iii)* Trovare tutti i sottocampi di K.

8. Mostrare che ogni omomorfismo di anelli $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, che manda $1 \mapsto 1$, induce una biezione su $\mathbf{R}$.

9. (i) Sia F un campo di caratteristica positiva p. Mostrare che se il polinomio $X^p - X - a \in F[X]$ ha una radice in F, allora F è il campo di spezzamento di $X^p - X - a$.

(ii) Dire per quali a e $b \in F$ il polinomio $X^p - bX - a \in F[X]$ ha radici multple in una chiusura algebrica di F.

(iii) Mostrare che per ogni primo p il polinomio $X^p - X - 1$ è irriducibile su $\mathbf{Q}$.

10. (i) Trovare il campo di spezzamento di $(X^3 - 5)(X^3 - 7)$ su $\mathbf{Q}$. Che grado ha come estensione di $\mathbf{Q}$?

(ii) Sia p un primo. Trovare il campo di spezzamento di $(X^3 - 5)(X^3 - 7)$ su $\mathbf{F}_p$.

11. Sia F un campo di caratteristica 0. Sia $f(X) \in F[X]$ un polinomio non costante e poniamo $f'(X) := \frac{\partial f(X)}{\partial X}$. Poniamo $d(X) := \mathrm{mcd}(f, f')$. Mostrare che

$g(X) := f(X)d(X)^{-1}$ ha le stesse radici di $f(X)$ e che queste sono radici semplici di $g(X)$.

12. Sia F un campo di caratteristica positiva p.

(i) Mostrare che $\varphi\colon F \to F$, che manda $x \mapsto x^p$, è un omomorfismo di campi. Tale omomorfismo è chiamato *Frobenius*.

(ii) Mostrare che $\{x \in F | \varphi^n(x) = x\}$ è un sottocampo di F di cardinalità al più p^n.

(iii) Ricordiamo che se Se Frobenius è suriettivo, allora F è detto campo *perfetto*. Mostrare che se F ha cardinalità finita allora è perfetto. Mostrare che il campo delle funzioni razionali $\mathbf{F}_p(T)$, a coefficienti in $\mathbf{F}_p$ nella variabile T, non è perfetto.

13. Sia F un campo di caratteristica positiva p. Sia $f(X) \in F[X]$ un polinomio irriducibile. Mostrare che esistono un polinomio irriducibile e separabile $g(X)$ e un $e \in \mathbf{N}$ tali che $f(X) = g\big(X^{p^e}\big)$. Dedurre che ogni radice di $f(X)$ ha la stessa molteplicità p^e.