I Appello di Geometria 1 per Fisica – 18 Giugno 2009
Compito B

NOME e COGNOME.....

Accetto che i risultati degli esami siano esposti in rete. *Firma*.....

Data orale: I Appello 01/07 □ II Appello 14/07 □ III Appello 25/09 □

1. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi di grado minore o uguale a 2. Denotiamo con $\mathcal{B}$ la base canonical $\mathcal{B} := \{1, X, X^2\}$ di V. Sia $q : V \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da:

$$q(a + bX + cX^2) := a^2 + b^2 + 2ac + 2c^2.$$

Sia infine f l'endomorfismo di V definito da

$$f(1) = 1; \qquad f(X) = X + X^2; \qquad f(X^2) = 2X + X^2.$$

i) Si trovi la matrice rappresentativa del prodotto scalare $\langle , \rangle$ associato a q rispetto alla base $\mathcal{B}$.
ii) Si provi che $\langle , \rangle$ è definito positivo.
iii) Si dimostri che f è autoaggiunto rispetto a $\langle , \rangle$.
iv) Si trovi una base di autovettori di f ortonormale rispetto a $\langle , \rangle$.

2. Si consideri su $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare la dimensione di V ed esibire una base ortogonale $\mathcal{B}_1$ di V.
(b) Determinare l'ortogonale $V^\perp$ di V ed esibirne una base ortogonale $\mathcal{B}_2$.
Sia $\pi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^4$ su $V^\perp$. Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^4$ ottenuta come l'unione di $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.
(c) Determinare la matrice di π rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ (del dominio e del codominio).
Sia $s\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la simmetria di asse $V^\perp$ e direzione V.
(d) Dire se s è una isometria. Dire se è un operatore autoaggiunto.

3. Si consideri l'endomorfismo dipendente dal parametro $t \in \mathbb{R}$, $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che

$$f_t({}^t(1,1,1) = {}^t(1 + t^2, t, -1 + t - t^2), \quad f_t({}^t(t,0,1) = {}^t(t + t^2, 0, -t^3 - 1), \quad f_t({}^t(1,0,0) = {}^t(1,0,-t^2).$$

(a) Trovare la matrice A_t associata a f_t rispetto alla base canonica.
(b) Dire per quali valori del parametro reale A_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
(c) Calcolare autovalori e autovettori di A_1.
(d) Calcolare per quali quali valori del parametro reale $G_t := A_t + {}^tA_t$ rappresenta la matrice di un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica (cioè $<,>_{G_t}$ è definito positivo).

4. Sia dato il seguente sistema lineare

$$\Sigma_k := \begin{cases} x + ky + 2z + t = -1 \\ x + (k-1)y + z + (k+1)t = -1 \\ 2x - y + (k+3)z + (k+2)t = k - 2 \\ y + z + (k^2 - 3k)t = k. \end{cases}$$

(a) Discutere, al variare di k in $\mathbb{R}$, la risolubilità del sistema Σ_k. Per i valori di k per cui Σ_k sia risolubile determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni
(b) Trovare l'insieme delle soluzioni per $k = 0$ e per $k = 1$.