II Appello di Geometria 1 per Fisica – 8 Luglio 2009
Compito A

NOME e COGNOME.....

Accetto che i risultati degli esami siano esposti in rete. *Firma*.....

Data orale: Appello 14/07 □ Appello 25/09 □

1. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata X di grado minore o uguale a due. Sia $q : V \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da:

$$q(a + bX + cX^2) := a^2 - 2ab + 2b^2 + 2bc + 2c^2.$$

a) Si scriva la matrice rappresentativa del prodotto scalare $\langle , \rangle$ associato a q rispetto alla base $\mathcal{C} = \{1, X, X^2\}$ di V. Si dica se tale prodotto scalare è definito positivo.
b) Si dimostri che esiste ed è unico un endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(1 - X + X^2) = -1 + 3X + X^2; \qquad f(1 + X) = 4 + 2X; \qquad f(1 + X + X^2) = 7 + 3X + X^2.$$

Si scriva la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathcal{C}$ di V.
c) Si provi che f è autoaggiunto rispetto a $\langle , \rangle$ e si trovi una base di autovettori per f che sia ortonormale rispetto a $\langle , \rangle$.

2. Sia dato il seguente sistema lineare

$$\Sigma_k := \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ (k+1)x_1 + (2k+3)x_2 + x_3 + (k+2)x_4 = k+1 \\ x_1 + (k+2)x_2 + 2kx_3 + (k+2)x_4 = 2 \\ kx_1 + kx_2 + (k^2-k)x_3 + k^2x_4 = 3k. \end{cases}$$

(a) Discutere, al variare di k in $\mathbb{R}$, la risolubilità del sistema Σ_k. Per i valori di k per cui Σ_k sia risolubile determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni.

(b) Per i valori di k per cui Σ_k sia risolubile e l'insieme delle soluzioni si di dimensione infinita, trovare l'insieme delle soluzioni.

3. Si consideri l'endomorfismo dipendente dal parametro $t \in \mathbb{R}$, $f_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tale che

$$f_t({}^t(1,0,t,0)) = {}^t(1,1,3t^2-1,1), \quad f_t({}^t(0,1,0,0)) = {}^t(1,1,-1,1)$$
$$f_t({}^t(0,t,0,1)) = {}^t(1+t,1+t,-1-t,1+t), \quad f_t({}^t(-t,-1,1,1)) = {}^t(-t,-t,4t,-t).$$

(a) Verificare f_t esiste unico.

(b) Trovare la matrice A_t associata a f_t rispetto alla base canonica.

(c) Dire per quali valori di t A_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

(d) Calcolare gli autovalori di $A_0^3 - 3A_0^2$.

4. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 := {}^t(1,2,1,0)$, $u_2 := {}^t(0,1,0,2)$ e $u_3 := {}^t(1,1,1,-2)$. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito come l'insieme delle soluzioni delle equazioni $2X_1 - X_4 = 0$, $X_1 - X_2 + X_4 = 0$ e $X_1 + X_2 - 2X_4 = 0$.

(i) Determinare la dimensione ed una base di V e di W.

(ii) Determinare la dimensione ed una base di $V \cap W$ e di $V + W$.

(iii) Determinare una base ortogonale di $V \cap W$ e completarla ad una base ortogonale di $V + W$ (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$).

5. (FACOLTATIVO) Sia $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ lo spazio euclideo standard e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo autoaggiunto rispetto a $\langle , \rangle$. Supponiamo che il nucleo di f sia $\ker(f) = L\big({}^t(1,1,0), {}^t(1,-1,1)\big)$. Dimostrare che l'immagine di f è $L\big({}^t(1,-1,-2)\big)$.