I Appello di Geometria 1 per Fisica – 16 Giugno 2010 - Compito A

NOME, COGNOME e MATRICOLA.....

Data orale: Appello 18/06 □ Appello 12/07 □ Appello 21/07 □ Appello Settembre □
Avendo passato la I Prova di esonero, NON svolgo gli esercizi contrassegnati con (+): □

1.(+) Sia dato il seguente sistema lineare

$$\Sigma_k := \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + (k+2)x_2 + (2k+1)x_3 = 2 \\ (k+1)x_1 + (2-k)x_2 + (k+1)x_3 = k-2. \end{cases}$$

(a) Discutere, al variare di k in $\mathbb{R}$, la risolubilità del sistema Σ_k. Per i valori di k per cui Σ_k sia risolubile determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni.
(b) Per i valori di k per cui Σ_k sia risolubile e l'insieme delle soluzioni sia infinito, trovare l'insieme delle soluzioni.

2.(+) Sia V il K-spazio vettoriale $K[X]_{\leq 3}$ dei polinomi di grado minore o uguale a 3. Sia $W \subset V$ il sottoinsieme dei polinomi $P(X) \in V$ tali che $P(1) = P(0) = 0$.
(a) Sia $Z \subset V$ il sottospazio generato da $X^3 + X^2 + X$, $2X^3 + X$ e $X^3 + 3X^2 + 2X$. Calcolare la dimensione ed una base di Z.
(b) Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di V. Calcolarne la dimensione ed una base.
(c) Calcolare dimensioni e basi di $W + Z$ e $W \cap Z$.

3. Si consideri l'endomorfismo dipendente dal parametro $t \in \mathbb{R}$, $f_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tale che

$$f_t({}^t(1,t,0,0)) = {}^t(3-3t, 3-3t, 0, 0), \quad f_t({}^t(0,1,1,0)) = {}^t(0, -t-1, 1, -1)$$
$$f_t({}^t(0,1+t,t,0)) = {}^t(-2, -2-t-t^2, t, -t), \quad f_t({}^t(0,0,0,1)) = {}^t(-1, 0, t-1, 1).$$

(a) Verificare che f_t esiste ed è unico. Trovare la matrice A_t associata a f_t rispetto alla base canonica.
(b) Dire per quali valori interi di t la matrice A_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
(c) Trovare gli autovalori e gli autovettori di A_1.
(d)(*) Calcolare gli autovalori di $A_0^2 - 3A_0$.

4. Dati $u_1 := {}^t(1,1,0,0)$, $u_2 := {}^t(0,1,1,0)$ e $u_3 := {}^t(0,0,3,1)$, sia V il sottospazio $\mathcal{L}(u_1, u_2, u_3)$ di $\mathbb{R}^4$ su cui consideriamo il prodotto scalare standard.
(a) Trovare una base ortonormale di V ed una base di $V^\perp$.
(b) Determinare la matrice della proiezione ortogonale $\pi_V : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ su V rispetto alla base canonica.
(d)* Sia W il sottospazio $\mathcal{L}(u_1, u_2, u_3)$ di $\mathbb{C}^4$ e $W^\perp$ l'ortogonale rispetto al prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^4$. Sia $s_\kappa : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, con $\kappa \in \mathbb{C}$, l'operatore definito come segue. Dato $z \in \mathbb{C}^4$ e scritto come $z = v + w$ con $v \in W$ e $w \in W^\perp$ allora $s_\kappa(z) = v + \kappa w$. Dire per quali κ l'operatore s_κ è normale, per quali κ è autoaggiunto e per quali κ è unitario.

5. Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici due per due a coefficienti reali. Al variare del parametro reale k si consideri la forma quadratica $q_k : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che

$$q_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 4ab + 4kad + 4ac + 2kbd.$$

i) Dire se esistono valori di k per cui il prodotto scalare g_k associato a q_k è definito positivo.
ii) Sia G_k la matrice associata a g_k rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$. Si consideri l'applicazione lineare associata a G_k su $M_2(\mathbb{R})$ fissata la base canonica. Dimostrare che ogni matrice A nel nucleo di G_k soddisfa $q_k(A) = 0$.
iii) Sia $L : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'operatore definito ponendo $L(A) = 2A - {}^tA$. Dire se esistono valori di k tali che L sia autoaggiunto rispetto a g_k.