II Appello di Geometria 1 per Fisica – 28 Giugno 2010 - Compito A

NOME, COGNOME e MATRICOLA.....

Data orale: Appello 12/07 □ Appello 21/07 □ Appello Settembre □

Accetto che i risultati degli esami siano esposti in rete. *Firma*.....

1. Si considerino i vettori $\mathcal{B} := \{u_1 := {}^t(-1,1,1), u_2 := {}^t(1,0,1), u_3 := {}^t(0,1,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$.
(a) Mostrare che è una base di $\mathbb{R}^3$ e trovare la matrice di cambio di base $B := {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{C}}(\mathrm{id})$ dalla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}$.
(b) Mostrare che per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste ed è unico un endomorfismo $f_t\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f_t(u_1) = {}^t(-2t-1, -5t-1, -6t), \quad f_t(u_2) = {}^t(2t+2, 4t+2, 5t), \quad f_t(u_3) = {}^t(0, -t, -t).$$

(c) Trovare la matrice $A_t := {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}}(f_t) \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ associata a f_t rispetto alla base canonica.
(d) Dire per quali valori di t la matrice A_t, considerata in $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
(e) Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice A_t, considerata in $M_{3\times 3}(\mathbb{C})$, è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.
(f) Trovare gli autovalori e gli autovettori di A_1 considerata in $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

2. Sia dato il seguente sistema lineare

$$\Sigma_k := \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ k^2x_1 - x_2 + (3k^2-3)x_3 - 3k^2x_4 = k^2. \end{cases}$$

(a) Discutere, al variare di k in $\mathbb{R}$, la risolubilità del sistema Σ_k. Per i valori di k per cui Σ_k sia risolubile determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni.
(b) Trovare l'insieme delle soluzioni per $k = 1$ e $k = 0$.

3. Consideriamo $\mathbb{R}^5$ con il prodotto scalare standard. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ soluzione delle equazioni $X_1 + X_3 + 3X_4 = 0$, $X_1 - 2X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 = 0$ e $X_5 - X_2 = 0$. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori ${}^t(0,2,2,1,2)$, ${}^t(2,0,1,-1,0)$, ${}^t(1,1,1,1,1)$ e ${}^t(0,4,6,-2,4)$.

(i) Calcolare la dimensione ed una base di V e di W;
(ii) Calcolare la dimensione ed una base di $V \cap W$ e $V + W$.
(iii) Trovare una base ortogonale di $V^\perp$.
(iv) Sia $\pi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ la proiezione ortogonale su $V^\perp$. Calcolare la matrice di π rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5$. Calcolare la matrice di $\pi^3 - \pi$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5$.
(v) Mostrare che esiste un unico operatore $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tale che le seguenti condizioni sono soddifatte: (a) $V^\perp \subset \mathrm{Ker}(f)$, (b) per ogni $z \in V \cap W$ si ha $f(z) = z$, (c) per ogni $v \in V$ si ha $f(v) \in V$ e l'operatore indotto $f|_V\colon V \to V$, definito da $v \mapsto f(v)$, è una isometria diversa dall'identità dello spazio euclideo V (considerando il prodotto scalare definito positivo indotto da $\mathbb{R}^5$). Si dica se f è diagonalizzabile e se è autoaggiunto.

4. Sia $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici due per due a coefficienti reali. Si consideri l'insieme di vettori $\mathcal{B} = \{E_{11} - E_{22}, E_{11} - E_{12}, E_{21} + E_{11}, E_{22}\}$, dove E_{ij} sono le matrici elementari che formano la base canonica $\mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
(i) Dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
(ii) Verificare che $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$, dove $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}+a_{22}$ è la traccia, definisce un prodotto scalare su $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Dire se è definito positivo o meno.
(iii) Scrivere la matrice H associata al prodotto scalare $\langle\,,\rangle$ rispetto alla base $\mathcal{C}$. Scrivere la matrice G associata al prodotto scalare $\langle,\rangle$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
(iv)* Quanto vale $\det(G^{150})$?