III Appello di Geometria 1 per Fisica – 15 Luglio 2010 - Compito A

NOME, COGNOME e MATRICOLA.....

Data orale: Appello 20/07(M-Z) 21/07 (A-L) ☐ Appello Settembre ☐

Accetto che i risultati degli esami siano esposti in rete. *Firma*.....

1. Consideriamo $\mathbb{R}^5$ con il prodotto scalare standard. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori ${}^t(1,0,1,1,0)$, ${}^t(-1,1,0,0,1)$ e ${}^t(0,0,0,1,-1)$. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori ${}^t(0,1,1,1,1)$, ${}^t(1,1,2,2,1)$ e ${}^t(1,0,1,1,1)$.

(i) Calcolare la dimensione ed una base di V e di W;

(ii) Calcolare la dimensione ed una base di $V \cap W$.

(iii) Trovare una base ortogonale di $V^\perp$.

(iv) Sia $\alpha\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ la proiezione ortogonale su $V^\perp$. Calcolare la matrice di α rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5$.

(v) Mostrare che esiste un'unica isometria f di $\mathbb{R}^5$ tale che $f(v) = v$ per ogni $v \in V$ e l'angolo fra z e $f(z)$ sia $\frac{\pi}{2}$ per ogni $z \in V^\perp$ non nullo.

2. Si consideri l'operatore dipendente dal parametro $t \in \mathbb{R}$, $f_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tale che

$$f_t({}^t(1,0,0,-1)) = {}^t(1,1,-1,-1), \quad f_t({}^t(0,-2,1,0)) = {}^t(0,-2,1,0)$$
$$f_t({}^t(0,0,1,1)) = {}^t(-6,-4,4,t+6), \quad f_t({}^t(1,1,1,1)) = {}^t(t-9,-6,6,t+9).$$

(a) Verificare che f_t esiste ed è unico. Trovare la matrice A_t associata a f_t rispetto alla base canonica.

(b) Dire per quali valori di $t \in \mathbb{Z}$ la matrice A_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$.

(c) Trovare gli autovalori e gli autovettori di A_1.

(d) Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ l'operatore f_t è invertibile.

3. Sia dato il seguente sistema lineare

$$\Sigma_k := \begin{cases} 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + kx_3 = -1 \\ 4kx_1 - 4kx_2 = 1. \end{cases}$$

(a) Discutere, al variare di k in $\mathbb{R}$, la risolubilità del sistema Σ_k. Per i valori di k per cui Σ_k sia risolubile determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni.

(b) Per i valori di k per cui Σ_k sia risolubile e l'insieme delle soluzioni sia infinito, trovare l'insieme delle soluzioni.

4. Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ lo spazio dei polinomi di grado al piú due a coefficienti reali nella variabile X. Si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}_{\leq 2}[X] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ tale che $f(1) = 1$, $f(X) = X^2$ e $f(X^2) = -1 + 2X + 2X^2$. Sia $\langle\,,\rangle_{(a,b,c)}$ il prodotto scalare su $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ associato, rispetto alla base $\{1, X, X^2\}$, alla matrice

$$G_{(a,b,c)} := \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Trovare a, b, c reali tali che f risulti autoaggiunto rispetto a $\langle\,,\rangle_{(a,b,c)}$ e $\langle\,,\rangle_{(a,b,c)}$ sia definito positivo.

(ii) Dire se f ammette una base ortogonale di autovettori rispetto al prodotto scalare $\langle\,,\rangle_{(a,b,c)}$ ove $\langle\,,\rangle_{(a,b,c)}$ è come al punto (i).

(iii) Determinare tutti e soli i numeri reali ℓ, m, n ed r tali che $L_R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, associata a $R := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ell & m \\ 0 & n & r \end{pmatrix}$, sia un' isometria per il prodotto scalare $\langle\,,\rangle_{(a,b,c)}$ ove $\langle\,,\rangle_{(a,b,c)}$ è come al punto (i).