I Appello di Geometria 1 per Fisica – 24 Settembre 2010 (A)

NOME, COGNOME e MATRICOLA.....

Data orale: Appello 1/10 □ Appello Gennaio □

Accetto che i risultati degli esami siano esposti in rete. *Firma*.....

1. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+y+z-2t \\ -4x+2z-2t \\ -6x+2y+3z-5t \\ -8x+4z-4t \end{pmatrix}$$

(i) Calcolare la dimensione ed una base di imf di $kerf$ e di $imf \cap kerf$;

(ii) Trovare una base ortogonale di $kerf$.

(iii) Calcolare la dimensione dello spazio degli endomorfismi $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che $kerg = kerf$ e l'autospazio di g relativo all'autovalore 1 è generato da ${}^t(1,0,0,0)$ ($V_1(g) = \mathcal{L}({}^t(1,0,0,0))$.

2. Si consideri l'endomorfismo dipendente dal parametro $t \in \mathbb{R}$, $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che

$$f_t({}^t(1,1,1)) = {}^t(-t+2, 2t+t^2, 0), \quad f_t({}^t(1,0,1)) = {}^t(-t+1, t+t^2, 0)$$
$$f_t({}^t(1,1,0)) = {}^t(-t+1, 2t, 0), \quad .$$

(i) Verificare che f_t esiste ed è unico. Trovare la matrice A_t associata a f_t rispetto alla base canonica.

(ii) Dire per quali valori di t la matrice A_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$.

(iii) Trovare gli autovalori e gli autovettori di A_{-1}.

(iv) Dire se esistono valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui f_t ammette una base ortonormale di autovettori rispetto al prodotto scalare standar su $\mathbb{R}^3$.

3. Dati i vettori

$$\overrightarrow{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 := \begin{pmatrix} k \\ 2-k \\ 2+k^2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k-1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k^2+k-1 \\ 2k^2-5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} := \begin{pmatrix} k \\ 1-k \\ k^2+1 \\ k+1 \end{pmatrix},$$

(a) Dire per quali k in $\mathbb{R}$ $\overrightarrow{b}$ è combinazione lineare di $\overrightarrow{v}_1$,... $\overrightarrow{v}_4$.

(b) Per $k = 1$ trovare tutti i possibili coefficienti di tali combinazioni lineari.

4. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche di ordine tre (${}^tA = -A$). Indichiamo con $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito positivo dato da $< A, B >= Tr({}^tBA)$.

i) Trovare una base di V.

ii) Sia $L : V \to V$ l'endomorfismo $L(X) = AX + XA$, dove

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dire se L è autoaggiunto rispetto a $<,>$ e determinare una base ortonormale di autovettori per L.