Geometria 1 per Fisica – 15 Settembre 2008

NOME e COGNOME....., MATRICOLA.....

Accetto che i risultati degli esami siano esposti in rete. *Firma*.....

Data orale: Settembre ☐ Gennaio ☐

1. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i due sottospazi

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad | \quad 2x - t = y - z = 0 \right\} \quad T := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad | \quad x - y = 2z - t = 0 \right\}.$$

a) Determinare la dimensione e una base per S e T.
b) Determinare la dimensione e una base per $S \cap T$ e $S + T$.

2. Siano S e T is sottospazi di $\mathbb{R}^4$ definiti nell'esercizio 2. Si consideri l' insieme W costituito dagli endomorfismi F di $\mathbb{R}^4$ tali che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ siano autovettori di F e $F(S) \subseteq T$.

(a) Mostrare che per ogni $F \in W$ i vettori ${}^t(1,0,0,0)$ e ${}^t(0,0,0,1)$ stanno nel medesimo autospazio relativo all' autovalore $\lambda = 0$.
(b) Si verifichi che W è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ e se ne calcoli la dimensione.
(c) Dire se esistono $F \in W$ tali che $F(S) = T$.

3. Sia dato il seguente sistema lineare

$$\Sigma_\lambda := \begin{cases} X_1 - X_2 + 2X_3 = 0 \\ 2\lambda X_1 - \lambda X_2 + (\lambda - 1)X_3 + 2X_4 = -1 \\ -2X_1 + (\lambda + 2)X_2 - (\lambda + 1)X_3 - \lambda X_4 = -1 \\ -\lambda X_2 + 2X_3 + (\lambda - 2)X_4 = 2\lambda. \end{cases}$$

a) Discutere, al variare di λ in $\mathbb{R}$, la risolubilità del sistema Σ_λ.
b) Quando il sistema è risolubile, ma la soluzione non è unica, trovare l'insieme delle soluzioni.

4. Sia data la matrice $A_h := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & h \end{pmatrix}$.

a) Studiare la diagonalizzabilità di A_h al variare di $h \in \mathbb{R}$ e verificare che per $h = -1$ la matrice A_h è diagonalizzabile.
b) Per $h = -1$ si trovi una base di autovettori di A_h ortonormali rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.
c) Si dica per quali valori del parametro reale h la matrice A_h rappresenta un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^4$.

5. Si consideri l'endomorfismo $g\colon \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ dello spazio delle matrici 2×2, a coefficienti reali, definito da $g(A) := 2A - {}^tA$.
(a) Determinare la matrice di g rispetto alla base

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Stabilire se g è diagonalizzabile. In caso affermativo si calcoli una base di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ composta da autovettori per g.