Appello di Geometria 1 per Fisica – 22 Febbraio 2010

NOME, COGNOME, Numero di matricola .....

Accetto che i risultati degli esami siano esposti in rete. *Firma*.....

1. Si consideri la forma quadratica $q(X_1, X_2, X_3) = 2X_1^2 + 2X_2^2 - X_3^2 - 2X_1X_2 + 4X_1X_3 + 4X_2X_3$.

i) Si scriva la matrice rappresentativa A del prodotto scalare associato a q rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si dica se tale prodotto scalare è definito positivo.

ii) Si dimostri che A è diagonalizzabile e si trovi una base di autovettori per A, ortonormale rispetto al prodotto scalare *standard* di $\mathbb{R}^3$.

2. Sia dato il seguente sistema lineare

$$\Sigma_k := \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ kx_1 + kx_3 + 2x_4 = 0 \\ -3kx_1 + 6x_2 + (3k-1)x_4 = 0. \end{cases}$$

i) Discutere, al variare di k in $\mathbb{R}$, la risolubilità del sistema Σ_k. Per i valori di k per cui Σ_k sia risolubile determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni.

ii) Per i valori di k per cui Σ_k sia risolubile e la soluzione non sia unica, trovare l'insieme delle soluzioni.

3. Si dimostri che per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste un unico endomorfismo $f_a \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che

$$f_a({}^t(1,1,0)) = {}^t(1,1,0), \quad f_a({}^t(0,1,1)) = {}^t(2+a, 2, 1+a), \quad f_a({}^t(1,1,-1)) = {}^t(a,a,-a).$$

(a) Trovare la matrice A_a associata a f_a rispetto alla base canonica.

(b) Dire per quali valori di a l'endomorfismo f_a è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

(c) Dire se esiste a tale che f_a è una simmetria. In tale caso trovare una base dell'asse ed una base della direzione.

4. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 := {}^t(2,1,-1,-1)$, $u_2 := {}^t(6,3,-2,-2)$ e $u_3 := {}^t(-4,-2,2,2)$. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito come l'insieme delle soluzioni delle equazioni $X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = 0$, $2X_1 + 2X_2 + 2X_3 - 2X_4 = 0$ e $X_1 + X_2 + X_3 - X_4 = 0$.

(i) Determinare la dimensione ed una base di U e di W.

(ii) Determinare la dimensione ed una base di $U \cap W$ e di $U + W$.

Consideriamo su $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard e sia $U^\perp \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio ortogonale ad U rispetto a tale prodotto scalare. Sia $\pi_U \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale su $U^\perp$.

(iii) Determinare la matrice di π_U rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(iv) Determinare una base del sottospazio $\pi_U(W) \subset \mathbb{R}^4$ definito dall' immagine di W tramite π_U.