Geometria 1 per Fisica – 28 Gennaio 2008

NOME e COGNOME....., MATRICOLA.....

Accetto che i risultati degli esami siano esposti in rete. *Firma*.....

Appello orale: Gennaio ☐ Febbraio ☐

1. Sia dato il seguente sistema lineare

$$\Sigma_k := \begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 - X_4 + 3X_5 = 1 - k \\ X_1 - 2X_2 + X_3 + X_5 = 1 \\ -X_2 + (-k+1)X_4 + (-k-2)X_5 = 0 \\ X_1 - 2X_2 + X_3 + kX_4 + (k^2+1)X_5 = 2k+1. \end{cases}$$

a) Discutere, al variare di k in $\mathbb{R}$, la risolubilità del sistema Σ_k.

b) Trovare l'insieme delle soluzioni per $k = 2$.

2. Sia data la matrice $A_t := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & t \end{pmatrix}$.

a) Studiare la diagonalizzabilità di A_t al variare di $t \in \mathbb{R}$ e verificare che per $t = 0$ la matrice A_t è diagonalizzabile.

b) Per $t = 0$ si trovi una base di autovettori di A_t ortonormali rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.

c) Si dica per quali valori del parametro reale t la matrice A_t rappresenta un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^4$.

3. Si consideri $V := \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale euclideo delle matrici 2×2 dotato del prodotto scalare $\langle A, B\rangle := \mathrm{Tr}\big(A \cdot {}^tB\big)$ con A e $B \in V$. Si consideri il sottospazio vettoriale

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ a-b & 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Si determini la dimensione ed una base di S.

b) Trovare la dimensione ed una base di $S^\perp$.

c) Determinare una base di V ripetto alla quale la proiezione ortogonale di V su S sia rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ dato da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+y+z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Si dica, motivando la risposta, se f è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$.

b) Si determini un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^3$ rispetto al quale f risulti autoaggiunto.