III Appello di Geometria 1 per Fisica – 23 Settembre 2009 —- Compito A

NOME e COGNOME.....

Accetto che i risultati degli esami siano esposti in rete. *Firma*.....

Data orale: 25/09/09 □ 02/10/09 □ gennaio 2010 □

1. Sia dato il sistema lineare

$$\Sigma_k := \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -k \\ 2x_1 + x_2 + kx_3 + (-k+4)x_4 = 2k - 5 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -k. \end{cases}$$

(a) Si discuta, al variare di k in $\mathbb{R}$, la risolubilità del sistema Σ_k. Per i valori di k per cui Σ_k sia risolubile determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni.
(b) Si trovi l'insieme delle soluzioni per $k = 1$.

2. Si discuta, per $k = 0$ e $k = 3$, la diagonalizzabilità della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4k-3 & 3k-3 \\ 0 & k & k-1 \\ 0 & -k+2 & -k+3 \end{pmatrix}.$$

3. Sia $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ lo spazio euclideo standard. Sia $f_{(a,b,c)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito dalle sequenti condizioni:

$$f_{a,b,c}(1,1,0) = (\sqrt{2}/\sqrt{3}, \sqrt{2}/\sqrt{3}, \sqrt{2}/\sqrt{3}),$$
$$f_{a,b,c}(1,-1,0) = (2/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}),$$
$$f_{a,b,c}(0,0,1) = (a,b,c)$$

dove a, b, c sono numeri reali.

a) Si determinino tutte le terne (a, b, c) per le quali $f_{a,b,c}$ risulta un'isometria.

b) Si scriva la matrice dell'endomorfismo $F := 2\sqrt{3} f_{0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}}$ rispetto alla base canonica. Sia poi g l'endomorfismo definito rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1+\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} & \sqrt{6}-1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Si ponga $\phi := F - g$ e si determini la matrice rappresentativa di ϕ rispetto alla base canonica. Si dimostri che ϕ è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare standard e si esibisca una base ortonormale di autovettori.

c) (Facoltativo) Si verifichi che 1 è autovalore per $f_{0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}}$

4. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori $u_1 := {}^t(1,1,0,0,0)$, $u_2 := {}^t(0,1,1,0,0)$, $u_3 := {}^t(0,0,1,1,0)$, $u_4 = (1,2,2,1,0)$. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito come l'insieme delle soluzioni delle equazioni $X_1 - X_2 + X_3 = 0$, $X_4 = 0$, $X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = 0$.
(i) Si determini la dimensione ed una base di V,di W, di $V \cap W$ e di $V + W$.
(ii) Si determini una base ortogonale di $V \cap W$, si scriva la matrice della proiezione ortogonale su $V \cap W$ rispetto alla base canonica.