COMPITO DI ALGEBRA 3, 27/07/2016

COGNOME e Nome .....

MATRICOLA .....

Esercizio 1. Si considerino i polinomi $f(X) := X^3 + 9X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ e $g(X) = X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ ed i relativi campi di spezzamento $E_f/\mathbb{Q}$ e $E_g/\mathbb{Q}$.

(1) Si calcolino $G_{E_f E_g/E_g}$ ed $G_{E_f E_g/E_f}$.
(2) Si calcoli $G_{E_f E_g/\mathbb{Q}}$.

Esercizio 2. Si consideri il polinomio $f(X) := X^{17} - 13 \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Si presenti il suo campo di spezzamento E (su $\mathbb{Q}$) nella forma $E = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ per opportuni $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$.
(b) Si calcoli $[E : \mathbb{Q}]$.
(c) Si mostri che $G_{E/\mathbb{Q}}$ è un prodotto semidiretto.
(d) Si fornisca una presentazione di $G_{E/\mathbb{Q}}$ come prodotto semidiretto.

Esercizio 3.[Teo. Gal.] Sia E/F una estensione algebrica in caratteristica $p \neq 0$ e si definisca

$$\sqrt[p^{-\infty}]{F} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\alpha \in E : \alpha^{p^n} \in F\right\}.$$

Dato un campo K, sia

$$\mathcal{F}_K := \left\{X^{p^n} - a : n \in \mathbb{N}, a \in K^\times\right\}$$

e, data una estensione L/K, si consideri la seguente proprietà di L/K:

$$\left(P_{L/K}\right) : f(X) \in \mathcal{F}_K \Rightarrow \exists l \in L : f(l) = 0.$$

(1) Si mostri che $F \subset \sqrt[p^{-\infty}]{F} \subset E$ è una estensione di campi con la proprietà che, se $\beta^{p^m} \in \sqrt[p^{-\infty}]{F}$, allora $\beta \in \sqrt[p^{-\infty}]{F}$.
(2) Si mostri che, se $F \subset E' \subset E$ è una estensione di campi con E' campo perfetto, allora $\sqrt[p^{-\infty}]{F} \subset E'$.
(3) Si mostri che, se vale $\left(P_{E/F}\right)$, allora $F \subset \sqrt[p^{-\infty}]{F} \subset E$ è una estensione di campi con $\sqrt[p^{-\infty}]{F}$ campo perfetto.
(4) Si mostri che, se vale $\left(P_{E/F}\right)$, allora E è perfetto.
(5) Si mostri che, se E è perfetto, allora è soddisfatta l'equivalenza: ogni polinomio non costante in $F[X]$ ha una radice in $E \Leftrightarrow$ ogni polinomio non costante in $\left(\sqrt[p^{-\infty}]{F}\right)[X]$ ha una radice in E.

Esercizio 4. Siano $K = \mathbb{Q}(\zeta_3)$ ed $L = \mathbb{Q}(\zeta_{12})$ il 3^o e il 12^o campo ciclotomico. Siano $\mathcal{O}_K$ e $\mathcal{O}_L$ i ripettivi anelli degli interi.

(1) Determinare i gradi delle estensioni $\mathbb{Q} \subset K$ e $K \subset L$.
(2) Determinare α tale che $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\alpha]$ e determinare il polinomio minimo di α su K.
(3) Determinare il discriminante di L su K.
(4) Determinare i primi $\mathfrak{P}$ di $\mathcal{O}_K$ che ramificano in L e per tali primi descrivere la decomposizione di $\mathfrak{P}\mathcal{O}_L$ come prodotto di ideali primi.

Esercizio 5.[Teo. Num.] Sia $K \subset L$ un'estensione di campi di numeri con anelli di interi $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_L$.

(1) Dimostrare che dato un ideale massimale $\mathfrak{P}$ di $\mathcal{O}_L$ l'intersezione $\mathcal{O}_K \cap \mathfrak{P}$ è un ideale massimale di $\mathcal{O}_K$.
(2) Dimostrare che dato un ideale massimale $\mathfrak{Q}$ di $\mathcal{O}_K$ esiste un ideale massimale $\mathfrak{P}$ di $\mathcal{O}_L$ tale che $\mathcal{O}_K \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$. Dire se $\mathfrak{P}$ è necessariamente unico.