Esercizi di Algebra 3, 2013

6 novembre 2013

1. Sia $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ il polinomio $P(X) = X^3 + 3X^2 + 3$. Sia K un campo di spezzamento di $P(X)$ su $\mathbb{Q}$.
   (a) Determinare il grado $[K : \mathbb{Q}]$
   (b) Descrivere il gruppo di Galois di K su $\mathbb{Q}$ e il reticolo dei sottocampi.
2. Siano date estensioni finite di campi $F \subset E_1 \subset \Omega$ ed $F \subset E_2 \subset \Omega$. Sia $E = E_1 \cdot E_2$ il campo composto. Supponiamo che E_1 sia un' estensione semplice di F ovvero $E_1 = F(\alpha)$ e sia $f(X) \in F[X]$ il polinomio minimo di α.
   (a) Mostrare che $E_2 \subset E$ ha grado $\leq [E_1 : F]$ e che ho uguaglianza se e solo se $f(X)$ è irriducibile su E_2.
   (b) Supponiamo che $F \subset E_1$ sia di Galois. Mostrare che $E_2 \subset E$ è di Galois e che $[E : E_2]$ divide $[E_1 : F]$.
   (c) Nelle ipotesi di (ii) mostrare che $[E : E_2] = [E_1 : F]$ se e solo Gal_{E/E_2} agisce in modo transitivo sulle radici di $f(X)$.
3. Sia $f(X) = X^3 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Sia K il campo di spezzamento di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$.
   (a) Determinare il grado di K su $\mathbb{Q}$;
   (b) Determinare il gruppo di Galois G di K su $\mathbb{Q}$.
4. Sia $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$. Sia $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ e $K \subset L$ una chiusura normale di K su $\mathbb{Q}$.
   (a) Determinare i gradi di K ed L su $\mathbb{Q}$;
   (b) determinare il gruppo di Galois H di L su $\mathbb{Q}$.
5. Sia $f(X) = X^4 - 2X^2 - 10 \in \mathbb{Q}[X]$. Sia K il campo di spezzamento di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$.
   1. Determinare le radici di $f(X)$
   2. Determinare il grado $[K : \mathbb{Q}]$
   3. Descrivere il gruppo di Galois G di K su $\mathbb{Q}$
6. Sia $f(X) = X^6 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$. Sia K il campo di spezzamento di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$.
   (a) Determinare il grado $[K : \mathbb{Q}]$;
   (b) Descrivere gli elementi del gruppo di Galois G di K su $\mathbb{Q}$;
   (c) Determinare il gruppo G.
7. Sia $\alpha = \zeta_8^{-1} + \sqrt{2} + \sqrt{-2}$ dove $\zeta_8 = e^{\frac{2\pi i}{8}} \in \mathbb{C}$ è una radice primitiva di ordine 8 dell'unità. Sia $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ e $K \subset L$ una chiusura normale di K su $\mathbb{Q}$.
   (a) Determinare il grado di K ed L su $\mathbb{Q}$;
   (b) Determinare il gruppo di Galois H di L su $\mathbb{Q}$;
   (c) Determinare il polinomio minimo $f(x) \in \mathbb{Q}[X]$ di α