ESERCIZIO 14/11/2013

Esercizio 1. Sia $f(X) \in F[X]$ un polinomio monico cubico irriducibile e separabile di grado 3, con radici $R_f = \{x_1, x_2, x_3\}$ e sia la caratteristica di F diversa da 2. Per $i = 1, 2, 3$, poniamo

$$f_i(X) := \frac{f(X)}{(X - x_i)} \in F(x_i)[X].$$

Per ogni $a, b \in F$ tale che $ab \neq 0$ sia

$$\alpha_{a,b} := ax + b\sqrt{D}$$

dove $x \in R_f$ e D è il discriminante di f. Mostrare che, se

$$f_i(x_i) \neq \pm\frac{a}{2b} \text{ for } i = 1, 2, 3,$$

allora $F(x_1, x_2, x_3) = F(\alpha_{a,b})$.

Soluzione: Posto $E := F(x_1, x_2, x_3)$ possiamo avere $G_{E/F} \simeq A_3$ o S_3.

Il primo caso accade se e solo se $\sqrt{D} \in F$ e allora ($ab \neq 0$):

$$F \subset F\left(ax + b\sqrt{D}\right) = F(x) \subset E$$

dove $[E : F(x)] = [E : F] = \#G_{E/F} = 3$. Segue che $F\left(ax + b\sqrt{D}\right) = F(x) = E$.

Supponiamo ora che $G_{E/F} \simeq S_3$ (possiamo supporre $x = x_1$). Si ha che $G_{E/F(\sqrt{D})} \simeq \langle(123)\rangle$, che agisce transitivamente su R_f. Si ha $(123)^2 = (132)$ e pertanto, se τ corrisponde a (123) nell'isomorfismo, τ^2 corrisponde a (132). Segue che $\tau(x_1) = x_2$ e $\tau^2(x_1) = x_3$. Poichè $\tau\left(\sqrt{D}\right) = \sqrt{D}$ otteniamo

$$\tau(\alpha_{a,b}) = ax_2 + b\sqrt{D} \text{ e } \tau(\alpha_{a,b}) = ax_3 + b\sqrt{D}.$$

Consideriamo ora il gruppo $G_{E/F(x)}$, che ha ordine 2. Poichè l'unico elemento $\sigma \neq 1$ di $G_{E/F(x)}$ fissa $x = x_1$, si ha $\sigma(x_2) = x_3$: infatti corrisponde al 2-ciclo che fissa x_1. Inoltre, l'azione sulla radice $\sqrt{D}$ del discriminante è data dal segno (alternativamente $G_{E/F(x)} \to G_{F(\sqrt{D})/F}$ è un isomorfismo perchè $F(x) \cap F\left(\sqrt{D}\right) = F$ per ragioni di grado). Dunque

$$\begin{aligned}
&\sigma(\alpha_{a,b}) = ax_1 - b\sqrt{D}, \\
&\sigma(\tau(\alpha_{a,b})) = \sigma\left(ax_2 + b\sqrt{D}\right) = ax_3 - b\sqrt{D} \text{ e} \\
&\sigma\left(\tau^2(\alpha_{a,b})\right) = \sigma\left(ax_3 + b\sqrt{D}\right) = ax_2 - b\sqrt{D}.
\end{aligned}$$

In altre parole l'orbita di $\alpha_{a,b}$ sotto l'azione del gruppo di Galois $G_{E/F}$ è data dai sequenti elementi:

$$\begin{array}{lll}
ax_1 + b\sqrt{D}, & ax_2 + b\sqrt{D}, & ax_3 + b\sqrt{D}, \\
ax_1 - b\sqrt{D}, & ax_2 - b\sqrt{D}, & ax_3 - b\sqrt{D}.
\end{array}$$

Mostriamo che questi sono tutti distinti, da cui segue che $F(x_1, x_2, x_3) = F(\alpha_{a,b})$. Elementi che compaiono nella stessa riga sono tutti a due a due distinti, perchè altrimenti si otterrebbe che $x_i = x_j$ con $i \neq j$; similmente elementi che compaiono nelle colonne sono distinti perchè si avrebbe $\sqrt{D} = -\sqrt{D}$. Dunque le possibilità da escudere sono che un elemento delle prima

riga sia uguale ad un elemento della seconda riga non nella stessa colonna, ovvero che non si verifica:

$$ax_i + b\sqrt{D} = ax_j - b\sqrt{D}$$

con $i \neq j$. Ma ciò accade se e solo se

$$2b\sqrt{D} = a\left(x_j - x_i\right).$$

In tal caso, detto x_k l'unico elemento di $R_f - \{x_i, x_j\}$, si ha

$$4b^2\left(x_k - x_j\right)^2\left(x_k - x_i\right)^2\left(x_j - x_i\right)^2 = 4b^2D = a^2\left(x_j - x_i\right)^2,$$

ovvero

$$4b^2\left(x_k - x_j\right)^2\left(x_k - x_i\right)^2 = 4b^2D = a^2.$$

Ma notiamo che $f_k\left(X\right) = \left(X - x_j\right)\left(X - x_i\right)$ e $f_k\left(x_k\right) = \left(x_k - x_j\right)\left(x_k - x_i\right)$, da cui

$$4b^2 f_k\left(x_k\right)^2 = a^2 \;\Leftrightarrow\; \pm\frac{a}{2b}.$$

Per ipotesi ciò non può accadere.