Indice

1 Introduzione **1**

2 Gruppi affini e gruppi formali **3**
2.1 Definizioni 3
2.2 Dualità di Cartier 8
2.2.1 Caratteristica p 8
2.2.2 Caratteristica 0 8
2.3 Frobenius e Vershiebung 9
2.4 Gruppi étale e connessi 9
2.4.1 Caratteristica p 10
2.4.2 Caratteristica 0 11
2.5 Spazi tangente e cotangente 11

3 Vettori e covettori di Witt **11**
3.1 Vettori di Witt 11
3.2 Covettori di Witt 14
3.3 Topologia naturale dei covettori di Witt 15
3.4 Gruppo formale dei covettori di Witt 15
3.5 Relazione tra componente étale e unipotente nel gruppo formale dei covettori 16
3.6 Anello di Dieudonné 17
3.7 Struttura del gruppo formale dei covettori come modulo sull'anello di Dieudonné 17

4 Classificazione dei p-gruppi formali **18**

1 Introduzione

Sia R un anello di valutazione discreta, completo, di ideale massimale $\mathfrak{m}$, campo residuo k di caratteristica $p > 0$ e campo delle frazioni K di caratteristica 0. Sia A/R uno schema abeliano di dimensione d, di cui indico con $A[p^n]$ il nucleo (schematico) della moltiplicazione per p^n. Definisco il gruppo p-divisibile associato ad A come il limite diretto rispetto alle mappe canoniche di inclusione $i_n : A[p^n] \hookrightarrow A[p^{n+1}]$:

$$A(p) := \varinjlim_n A[p^n].$$

Lo schema in gruppi $A(p)$ è un *gruppo p-divisibile di altezza* $h = 2d$, isomorfo al gruppo costante $(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^h$. Definisco il *modulo di Tate* associato ad A/R

come:

$$T(p) := \varprojlim_n A[p^n],$$

dove il limite inverso è calcolato rispetto alle mappe $[p] : A[p^{n+1}] \to A[p^n]$ di moltiplicazione per p. Si denoti con $\mathbb{D}(A(p))$ il duale di Cartier di $A(p)$ definito in §2.2 oppure in [2, §2.3], e con $t_{\mathbb{D}(A(P))}$ (rispettivamente, $t^*_{A(p)}$) lo spazio tangente di $\mathbb{D}(A(p))$ (rispettivamente, spazio cotangente di $A(p)$) definiti in §2.5 oppure in [2, §2.4].

Indico con $\mathbb{C}_p$ il completamento di una chiusura algebrica di K e pongo $A_{\mathbb{C}_p} := A \otimes_R \mathbb{C}_p$. Definisco $\mathcal{G} := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ come il gruppo di Galois assoluto di K. Per ogni $\mathcal{G}$-modulo M, denoto con $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{C}_p)$ lo $\mathbb{Z}_p$-modulo degli omomorfismi di $\mathbb{Z}_p$-moduli. Lo $\mathbb{Z}_p$-modulo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{C}_p)$ è dotato di una struttura canonica di $\mathcal{G}$-modulo: se $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{C}_p)$ e $g \in \mathcal{G}$,

$$(g\varphi)(x) := g(\varphi(g^{-1}x)).$$

Sia $\mathbb{G}_m$ is gruppo moltiplicativo di cui indico con

$$\mu_{p^n} := \mathrm{Ker}([p^n] : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m)$$

is sottoschema in gruppi delle radici p^n-esime dell'unità, dove $[p^n]$ è la moltiplicazione per p^n in $\mathbb{G}_m$. Definisco

$$H := \varprojlim_n \mu_{p^n}$$

dove il limite inverso è calcolato rispetto alle mappe $[p] : \mu_{n+1} \to \mu_n$ di moltiplicazione per p.

Theorem 1.1 (Decomposizione di Hodge-Tate)**.** *Vale il seguente isomorfismo di $\mathcal{G}$-moduli:*

$$H^1_{\text{ét}}(A_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p \simeq H^1(A_{\mathbb{C}_p}, \Omega^0_{A_{C_p}}) \oplus H^0(A_{\mathbb{C}_p}, \Omega^1_{A_{\mathbb{C}_p}}) \otimes_{\mathbb{C}_p} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H, \mathbb{C}_p),$$

dove $H^1_{\text{ét}}$ indica la coomologia ètale di $A_{\mathbb{C}_p}$ mentre $\Omega^0_{A_{\mathbb{C}_p}} \to \Omega^1_{A_{\mathbb{C}_p}} \to \dots$ è il complesso di De Rham.

Il teorema precedente può essere riformulato nel seguente modo: vale il seguente isomorfismo di $\mathcal{G}$-moduli:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T(p), \mathbb{C}_p) \simeq t_{\mathbb{D}(A(p))}(\mathbb{C}_p) \oplus t^*_{A(p)}(\mathbb{C}_p) \otimes_{\mathbb{C}_p} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H, \mathbb{C}_p). \qquad (1)$$

La dimostrazione di questi risultati si trova in [2, §4.1, Corollario 2 e successivo Remark].

Lo scopo dei lavori di Fontaine è quello di raffinare la decomposizione (1) in modo da riuscire ad ottenere una classificazione più fine che tenga conto della struttura di $\mathcal{G}$-modulo di $A(p)$ e non solo di quella di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T(p), \mathbb{C}_p)$. Notiamo che tale struttura è in effetti povera, in quanto, come $\mathcal{G}$-modulo, lo spazio tangente e quello cotangente sono banali, essendo entrambi copie di $\mathbb{C}_p$. Lo scopo del lavoro di Fontaine sui gruppi p-divisibili su anelli di valutazione discreta completi R come sopra è dunque quello di raffinare la decomposizione (1) in modo da ottenere un oggetto che generalizzi il lato destro di (1) e permetta di classificare i gruppi p-divisibili, recuperando in particolare la loro struttura di $\mathcal{G}$-modulo.

2 Gruppi affini e gruppi formali

2.1 Definizioni

Indico con il simbolo k un corpo perfetto di caratteristica $p > 0$, dotato della topologia discreta, oppure un anello di valutazione completo con campo residuo perfetto di caratteristica $p > 0$ e campo delle frazioni di caratteristica 0, dotato della topologia indotta dalla valutazione.

Remark 2.1. Si potrebbe lavorare più in generale come in [1] con un anello pseudocompatto k, ovvero un anello commutativo linearmente topologizzato (cioè dotato di una topologia che rende continue le operazioni di anello e tale che un sistema fondamentale Ω_k di intorni di 0 sia formato da ideali) separato e completo e tale che, per ogni ideale aperto $\mathfrak{a} \in \Omega_k$, il quoziente $R/\mathfrak{q}$ sia artiniano.

Definition 2.2. Un *k-gruppo affine* G è un funtore contravariante dalla categoria delle k-algebre alla categoria dei gruppi abeliani che sia rappresentato da una k-algebra B. Questo vuol dire che esiste una k-algebra B tale che per ogni k-algebra R si ha:

$$G(R) = \mathrm{Hom}_k(B, R)$$

dove Hom_k indica l'insieme degli omomorfismi di k-algebre. Indicheremo un tale funtore come $G = \mathrm{Sp}_k B$. Un k-gruppo affine è detto *finito* (oppure *algebrico*) se la sua algebra affine B è un k-modulo piatto finitamente generato. In questo caso, si definisce *l'ordine di* G come il rango di B come k-modulo: $\mathrm{ord}(G) := \mathrm{rank}_k(B)$.

Sia $G = \mathrm{Sp}_k B$ un k-gruppo affine. Il fatto che, per ogni k-algebra R, l'insieme $G(R)$ abbia una struttura di gruppo abeliano equivale a richiedere

che B sia una k-*bialgebra*, cioè esistano morfismi di k-algebre

$$\mu_B : B \to B \otimes_k B \text{ (comoltiplicazione)}$$

$$\epsilon_B : B \to k \text{ (augmentazione)}$$

$$\sigma_B : B \to B \text{ (antipodismo)}$$

che soddisfino ai seguenti diagrammi, ciascuno dei quali esprime una propietà dei gruppi abeliani:

B_1 (associatività): Il seguente diagramma è commutativo, dove id_B è l'identità di B:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\mu_B} & B \otimes_k B \\ {\scriptstyle \mu_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_B} \\ B \otimes_k B & \xrightarrow{\mu_B \otimes \mathrm{id_B}} & B \otimes_k B \otimes_k B \end{array}$$

B_2 (esistenza dell'elemento neutro): Il diagramma seguente è commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & B \otimes_k B & \xrightarrow{\mathrm{id}_B \otimes \epsilon_B} & B \otimes_k k \\ & \nearrow^{\mu_B} & & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ B & & \xrightarrow{\mathrm{id}_B} & & B \\ & \searrow_{\mu_B} & & & \uparrow{\scriptstyle \simeq} \\ & & B \otimes_k B & \xrightarrow{\epsilon_B \otimes \mathrm{id}_B} & B \otimes_k k \end{array}$$

B_3 (esistenza di un inverso): Il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & B \otimes_k B & \xrightarrow{\mathrm{id}_B \otimes \sigma_B} & B \otimes_k B & & \\ & \nearrow^{\mu_B} & & & & \searrow^{\pi} & \\ B & & \xrightarrow{\epsilon_B} & k & \xrightarrow{\mathrm{id}_B} & & B \\ & \searrow_{\mu_B} & & & & \nearrow_{\pi} & \\ & & B \otimes_k B & \xrightarrow{\sigma_B \otimes \mathrm{id}_B} & B \otimes_k B & & \end{array}$$

dove $\pi : B \otimes_k B \to B$ è la mappa di multiplicazione definita da $a \otimes b \mapsto ab$.

I morfismi di k-algebre μ_B, ϵ_B e σ_B definiscono altrettanti morfismi di funtori $\mu_G : G \times G \to G$, $\epsilon_G : \mathrm{Sp}_k k \to G$ e $\sigma_G : G \to G$. I diagrammi scritti in precedenza inducono diagrammi analoghi che coinvolgono G e $\mathrm{Sp}_k k$. La categoria di k-gruppi affini ha per oggetti i k-gruppi affini e per morfismi i

morfismi di funtori che rispettano la struttura di gruppo: se G ed H sono due k-gruppi affini, $\mathrm{Hom}_{k\mathrm{gr-aff}}(G,H)$ è l'insieme dei morfismi di funtori $F : G \to H$ tali che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\mu_G} & G \\ {\scriptstyle F\times F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ H \times H & \xrightarrow{\mu_G} & H. \end{array}$$

Proposizione 2.3. *La categoria dei k-gruppi affini è abeliana. In particolare, essa ha nuclei e conuclei.*

Dimostrazione. Si veda [1, Proposition 6.5]. □

Una k-algebra R è detta *profinita* (rispettivamente, *proartiniana* se lo è come k-modulo, cioè se R e un k-modulo linearmente topologizzato (cioè dotato di una topologia che rende continue le operazioni che rendono R un k-modulo e tale che un sistema fondamentale Ω_R di intorni di 0 sia formato da sotto-k-moduli) separato e completo e tale che, per ogni sotto-k-modulo aperto $\mathfrak{a} \in \Omega_R$, il quoziente $R/\mathfrak{q}$ è un k-modulo di lunghezza finita (rispettivamente, artiniano). In questo caso, vista la completezza,

$$R \simeq \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Omega_R} R/\mathfrak{a}.$$

Una k-algebra profinita R che ha lunghezza finita come k-modulo sarà detta *finita*. I morfismi nelle categorie delle k-algebre profinite, finite o proartiniane sono morfismi di k-algebre continui.

Vale un teorema di decomposizione del tutto analogo a quello degli anelli artiniani:

Proposizione 2.4. *Una k-algebra profinito R si decompone canonicamente nel prodotto finito di anelli profiniti locali $R = \prod_{\mathfrak{m}} R_{\mathfrak{m}}$, dove $\mathfrak{m}$ varia nell'insieme finito degli ideali massimali di R e $R_{\mathfrak{m}}$ indica il completamento di R lungo $\mathfrak{m}$, cioè $R_{\mathfrak{m}} = \varprojlim_{\mathfrak{a}}(R/\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}/\mathfrak{a}}$ dove il limite inverso è calcolato su tutti gli ideali aperti di R contenuti in $\mathfrak{m}$.*

Dimostrazione. Se veda [1, Chapitre I, 3.3 e 3.7]l □

Definition 2.5. Un *k-gruppo formale* G è un funtore contravariante dalla categoria delle k-algebre finite alla categoria dei gruppi abeliani che sia rappresentato da una k-algebra profinita B. Questo vuol dire che esiste una k-algebra profinita B tale che per ogni k-algebra finita R si ha:

$$G(R) = \mathrm{Hom}_k^{\mathrm{cont}}(B, R)$$

dove $\mathrm{Hom}_k^{\mathrm{cont}}$ indica l'insieme degli omomorfismi continui di k-algebre. Indicheremo un tale funtore come $G = \mathrm{Spf}_k B$.

Il fatto che $G(R)$ sia un gruppo abeliano per ogni k-algebra finita R equivale a richiedere che B sia una k-*bialgebra formale*, cioè esistano morfismi di k-algebre profinite

$$\mu_B : B \to B\widehat{\otimes}_k B \text{ (comoltiplicazione)}$$

(dove si è indicato con $B\widehat{\otimes}_k B$ il completamento della k-algebra $B \otimes_k B$ rispetto alla topologia una cui base fondamentale di intorni di 0 è data dagli ideali $I \otimes B + B \otimes J$ con I, J che variano nel filtro degli intorni di 0 in B)

$$\epsilon_B : B \to k \text{ (augmentazione)}$$

$$\sigma_B : B \to B \text{ (antipodismo)}$$

che soddisfino ai seguenti diagrammi, ciascuno dei quali esprime una propietà dei gruppi abeliani:

B_1 (associatività): Il seguente diagramma è commutativo, dove id_B è l'identità di B:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\mu_B} & B\widehat{\otimes}_k B \\ {\scriptstyle \mu_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_B} \\ B\widehat{\otimes}_k B & \xrightarrow{\mu_B\widehat{\otimes}\mathrm{id_B}} & B\widehat{\otimes}_k B\widehat{\otimes}_k B \end{array}$$

B_2 (esistenza dell'elemento neutro): Il diagramma seguente è commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & B\widehat{\otimes}_k B & \xrightarrow{\mathrm{id}_B\widehat{\otimes}\epsilon_B} & B\widehat{\otimes}_k k \\ & \nearrow^{\mu_B} & & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ B & & \xrightarrow{\mathrm{id}_B} & & B \\ & \searrow_{\mu_B} & & & \uparrow{\scriptstyle \simeq} \\ & & B \otimes_k B & \xrightarrow{\epsilon_B\widehat{\otimes}\mathrm{id}_B} & B\widehat{\otimes}_k k \end{array}$$

B_3 (esistenza di un inverso): Il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & B\widehat{\otimes}_k B & \xrightarrow{\mathrm{id}_B\widehat{\otimes}\sigma_B} & B\widehat{\otimes}_k B \\ & \nearrow^{\mu_B} & & & \searrow^{\pi} \\ B & & \xrightarrow{\epsilon_B} & k & \xrightarrow{\mathrm{id}_B} & B \\ & \searrow_{\mu_B} & & & \nearrow_{\pi} \\ & & B\widehat{\otimes}_k B & \xrightarrow{\sigma_B\widehat{\otimes}\mathrm{id}_B} & B\widehat{\otimes}_k B \end{array}$$

dove $\pi : B\widehat{\otimes}_k B \to B$ è la mappa di multiplicazione definita da $a \otimes b \mapsto ab$.

I morfismi di k-algebre formali μ_B, ϵ_B e σ_B definiscono altrettanti morfismi di funtori $\mu_G : G \times G \to G$, $\epsilon_G : \mathrm{Spf}_k k \to G$ e $\sigma_G : G \to G$. I diagrammi scritti in precedenza inducono diagrammi analoghi che coinvolgono G e $\mathrm{Spf}_k k$. La categoria di k-gruppi formali ha per oggetti i k-gruppi formali e per morfismi i morfismi di funtori che rispettano la struttura di gruppo: se G ed H sono due k-gruppi formali, $\mathrm{Hom}_{k\mathrm{gr}-\mathrm{for}}(G, H)$ è l'insieme dei morfismi di funtori $F : G \to H$ tali che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\mu_G} & G \\ {\scriptstyle F\times F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ H \times H & \xrightarrow{\mu_G} & H. \end{array}$$

Proposizione 2.6. *La categoria dei k-gruppi formali è abeliana. In particolare, essa ha nuclei e conuclei.*

Dimostrazione. Si veda [1, Proposition 6.5]. □

Sia G un k-gruppo formale. Allora G può essere prolungato in modo unico alla categoria delle k-algebre profinite ponendo, per ogni algebra profinita R,

$$G(R) := \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Omega_R} G(R/\mathfrak{a}).$$

La struttura di k-bialgebra formale di B mostra che $G(R)$ così definito è un gruppo anche per ogni algebra profinita R.

Sia $G = \mathrm{Spf}_k B$ un k-gruppo formale ed R una k-algebra finita. Poiché $B \simeq \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Omega_B} B/\mathfrak{a}$ ed ogni morfismo continuo di B in R fattorizza attraverso un quoziente $B/\mathfrak{a}$, che ha topologia discreta,

$$\mathrm{Hom}_k^{\mathrm{cont}}(B, R) = \varinjlim_{a\in\Omega_R} \mathrm{Hom}_k(B/\mathfrak{a}, R).$$

Segue

$$\mathrm{Spf}_k B \simeq \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Omega_B} \mathrm{Sp}_k B/\mathfrak{a}.$$

Definition 2.7. Un k-gruppo affine (rispettivamente, formale) G è detto *liscio* se per ogni k-algebra (rispettivamente, per ogni k-algebra finita) R e per ogni ideal $I \subseteq R$ tale che $I^2 = 0$, la mappa canonical $G(R) \to G(R/I)$ è suriettiva.

Se G è un k-gruppo affine o formale, indico con $[p^n]$ per ogni n numero naturale la moltiplicazione per p^n in G.

Definition 2.8. Un k-gruppo affine (rispettivamente, formale) è un *p-gruppo* se $G \simeq \varinjlim_n G_n$, dove $G_n := \mathrm{Ker}[p^n]$ è il nucleo della moltiplicazione per p^n.

Definition 2.9. Un p-gruppo formale è detto di *Barsotti-Tate* (o *p-divisibile*) di altezza h se $\mathrm{Ker}[p^n]$ è un gruppo finito e piatto di ordine p^{nh}.

2.2 Dualità di Cartier

2.2.1 Caratteristica p

Suppongo che la caratteristica di k sia p (dunque, k è un campo perfetto). Sia $G = \mathrm{Spf}_k B$ un k-gruppo formale. Pongo

$$B^* := \mathrm{Hom}_k^{\mathrm{cont}}(B, k)$$

e definisco il *duale di Cartier di G* come:

$$\mathbb{D}(G) := \mathrm{Sp}_k B^*.$$

Si dimostra che $\mathbb{D}$ induce una antiequivalenza tra la categoria dei k-gruppi formali e quella dei k-gruppi affini. Un quasi inverso di $\mathbb{D}$ è il funtore $\widehat{\mathbb{D}}$ definito da:

$$\widehat{\mathbb{D}}(\mathrm{Sp}_k B) := \mathrm{Spf}_k B^*$$

dove $B^* := \mathrm{Hom}_k(B, k)$ è dotato della topologia della convergenza semplice.

2.2.2 Caratteristica 0

Se la caratteristica di k è 0 (dunque, k è un anello di valutazione discreta completo, con campo residuo k di caratteristica p e campo delle frazioni di caratteristica 0), e $G = \varinjlim_n G_n$ è un gruppo p-divisibile, con $G_n = \mathrm{Sp}_k B$, pongo $\mathbb{D}(G_n) := \mathrm{Sp}_k B_n^*$ con $B_n^* := \mathrm{Hom}_k(B_n, k)$. La moltiplicazione per p induce mappe $G_n \to G_{n-1}$, dunque per dualità ottengo mappe

$$j_n : \mathbb{D}(G_{n-1}) \to \mathbb{D}(G_n).$$

Definisco il *duale di Cartier di G* come

$$\mathbb{D}(G) := \varinjlim_n \mathbb{D}(G_n)$$

dove il limite diretto è calcolato rispetto alle mappe j_n.

2.3 Frobenius e Vershiebung

Suppongo che k abbia caratteristica p e denoto con $\sigma : k \to k$ il Frobenius di k definito da $x \mapsto x^p$. Sia $G = \mathrm{Sp}_k B$ un k-gruppo affine oppure $G = \mathrm{Spf}_k B$ un k-gruppo formale. Definisco $B^{\sigma^n} := B \otimes_{\sigma^n} k$ dove il prodotto tensoriale è calcolato rispetto alla mappa $\sigma^n : k \to k$. La mappa $b \mapsto b^p$ induce dunque un morfismo k-lineare

$$F_B^n : B^{\sigma^n} \to B$$

e dunque un morfismo di k-gruppi (affini o formali)

$$F_G^n : G \to G^{\sigma^n}$$

dove G^{σ^n} denota il k-gruppo $\mathrm{Sp}_k B^{\sigma^n}$ oppure $\mathrm{Spf}_k B^{\sigma^n}$ a seconda che G sia $\mathrm{Sp}_k B$ oppure $\mathrm{Spf}_k B$.

Analogamente, se $G = \mathrm{Sp}_k B$, ho una mappa

$$F^n_{\widehat{\mathbb{D}}(G)} : \widehat{\mathbb{D}}(G) \to \mathbb{D}(G)^{\sigma^n}.$$

Per dualità, ottengo una mappa, chiamata Vershiebung:

$$V^n_{G^{\sigma^n}} : G^{\sigma^n} \to G.$$

Proposizione 2.10. *$V_{G^\sigma} F_G = [p]$ in G e $F_G V_G = [p]$ in G^σ.*

Dimostrazione. [1, pagina 50]. □

Definition 2.11. Definisco la *componente unipotente* G^{u} di un k-gruppo formale o affine G come:

$$G^{\mathrm{u}} := \varinjlim \mathrm{Ker} V^n_{G^{\sigma^n}}.$$

2.4 Gruppi étale e connessi

Sia $G = \mathrm{Spf}_k B$ un k-gruppo formale, che supporremo un gruppo p-divisibile se k ha caratterstica 0.

Definition 2.12. G è *connesso* (rispettivamente, *étale*) se B è un anello locale (rispettivamente, una k-algebra étale).

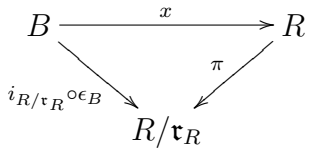
Per ogni k-algebra finita R, denoto con $\mathfrak{r}_R$ il suo radicale. Definisco dei funtori dalla categoria delle k-algebre finite a quella degli insiemi:

$$G^{\text{ét}}(R) := G(R/\mathfrak{r}_R) \quad \text{e} \quad G^{\mathrm{c}}(R) := \mathrm{Ker}(G(R) \to G^{\text{ét}}(R)).$$

Definisco l'*ideale di augmentazione di* B come $B^+ := \mathrm{Ker}(\epsilon_B : B \to k)$. Sia B^{c} la componente locale di B corrispondente all'unico ideale massimale di B contenente B^+.

Proposizione 2.13. *$G^{\mathrm{c}} = \mathrm{Spf}_k B^{\mathrm{c}}$ è un k-gruppo formale connesso.*

Dimostrazione. Per prima cosa noto che G^{c} è rappresentato da B^{c}: un punto $x \in \mathrm{Hom}_k^{\mathrm{cont}}(B, \mathfrak{r}_R)$ se e solo se x rende commutativo il seguente diagramma:



dove π è la proiezione canonica e $i_{R/\mathfrak{r}_R}$ è il morfismo strutturale della k-algebra $R/\mathfrak{r}_R$. Dunque, $x(B^+) \subseteq \mathfrak{r}_R$ e questo per continuità corrisponde a richiedere che x sia un morfismo continuo di B^{c} in $\mathfrak{r}_R$. Si mostra che le mappe μ_B, ϵ_B e σ_B definiscono altrettante mappe in B^{c}. Dunque $\mathrm{Spf}_k B^{\mathrm{c}}$ è un gruppo formale, evidentemente connesso. □

2.4.1 Caratteristica p

Suppongo che k abbia caratteristica p. In questo caso ogni k-algebra finita R si decompone nella somma diretta di due k-algebre

$$R \simeq R^{\text{ét}} \oplus \mathfrak{r}_R,$$

dove $R^{\text{ét}}$ è la massima sottoalgebra étale di R. (Nel caso in cui C è un campo, una C-algebra è étale se e solo se è isomorfa ad un prodotto finito di estensioni finite e separabili di C.) Risulta dunque che $G^{\text{ét}}(R) \simeq G(R^{\text{ét}})$ e dunque, per ogni k-algebra finita R, abbiamo una sequenza esatta spezzante:

$$0 \to G^{\mathrm{c}}(R) \to G(R) \to G^{\text{ét}}(R) \to 0,$$

da cui si vede che G si spezza canonicamente nel prodotto della sua componente locale e di $G^{\text{ét}}$:

$$G \simeq G^{\mathrm{c}} \oplus G^{\text{ét}}.$$

Indico con $\mathfrak{r}_B$ il radicale di B.

Proposizione 2.14. *$G^{\text{ét}} = \mathrm{Spf}_k B/\mathfrak{r}_B$ è un k-gruppo formale étale.*

Dimostrazione. $x \in \mathrm{Hom}_k^{\mathrm{cont}}(B, R/\mathfrak{r}_R)$ se e solo se $x \in \mathrm{Hom}_k^{\mathrm{cont}}(B, R)$ e $x(\mathfrak{r}_B) \subseteq \mathfrak{r}_R$. Le mappe μ_B, ϵ_B e σ_B definiscono altrettante mappe in $B^{\text{ét}}$. Dunque $\mathrm{Spf}_k B^{\text{ét}}$ è un gruppo formale, evidentemente étale. □

Proposizione 2.15. *Ogni k-gruppo formale connesso è il limite diretto dei propri nuclei delle potenze di Frobenius:*

$$G = \varinjlim_n \mathrm{Ker} F_G^n \qquad \textit{se } G \textit{ è connesso.}$$

Dunque, ogni k-gruppo formale connesso è un p-gruppo.

Dimostrazione. [1, pag. 49]. □

Proposizione 2.16. *Un k-gruppo formale G è étale se e solo se F_G è un monomorfismo. Questo è equivalente a richiedere che F_G sia un isomorfismo.*

Dimostrazione. [1, pag. 49]. □

2.4.2 Caratteristica 0

Nel caso di caratteristica 0, denotato con $\overline{k}$ il campo residuo di k, si può mostrare che il funtore $G \rightsquigarrow G_{\overline{k}}$ dalla categoria dei k-gruppi formali étale alla categoria dei $\overline{k}$-gruppi formali étale induce un'antiequivalenza; ogni k-gruppo formale è dunque a meno di isomorfismi il rialzamento di un $\overline{k}$-gruppo formale étale. Segue da questo che esiste sempre una sequenza esatta di k-gruppi formali

$$0 \to G^{\mathrm{c}} \to G \to G^{\text{ét}} \to 0.$$

2.5 Spazi tangente e cotangente

Sia $G = \mathrm{Spf}_k B$ un k-gruppo formale. Sia B^+ l'ideale di augmentazione ed indichiamo con $\overline{B_2^+}$ la chiusura di $(B^+)^2$ in B. Pongo per ogni k-anello finito R:

$$\mathrm{tg}_G(R) := \mathrm{Hom}_k^{\mathrm{cont}}(B^+/\overline{B_2^+}, R) \quad \text{(spazio tangente a } G \text{ in } R)$$

$$\mathrm{ctg}_G(R) := B^+/\overline{B_2^+}\widehat{\otimes}_k R \quad \text{(spazio cotangente a } G \text{ in } R).$$

3 Vettori e covettori di Witt

3.1 Vettori di Witt

Per ogni intero $n \geq 0$, definisco

$$\phi_n(X_0, \ldots, X_n) = X_0^{p^n} + pX_1^{p^{n-1}} + \cdots + p^n X_n.$$

Abbrevierò nel seguito $\phi(X_0, \ldots, X_n)$ con $\phi(X)$. E' noto che esistono due e due sole sequenza di polinomi

$$S_n(X_0, \ldots, X_n; Y_0; \ldots, Y_n)$$

e

$$P_n(X_0, \ldots, X_n; Y_0; \ldots, Y_n),$$

che denoterò per convenienza con $S_n(X;Y)$ e $P_n(X;Y)$, tali che

$$\phi_n(X) + \phi_n(Y) = \phi_n(S_0(X;Y), \dots, S_n(X;Y))$$

$$\phi_n(X) \cdot \phi_n(Y) = \phi_n(P_0(X;Y), \dots, P_n(X;Y)).$$

Le S_n, P_n definiscono su $\mathbb{Z}[X] := \mathbb{Z}[X_0, X_1, \dots]$ (anello in infinite determinate) una struttura di $\mathbb{Z}$-schema in anelli (commutativi) detto lo $\mathbb{Z}$-schema dei *Vettori di Witt* $\mathbb{W}$ ponendo per ogni anello R:

$$\mathbb{W}(R) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[X], R)$$

dove se $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[X], R)$, posto $x^{(n)} := x(\phi_n(X))$, allora la struttura di anello di $\mathbb{W}(R)$ è data da:

$$(x+y)^{(n)} = x^{(n)} + y^{(n)}; \quad (xy)^{(n)} = x^{(n)} y^{(n)}.$$

Le $x^{(n)}$ sono dette *componenti fantasma* di x. Indico $x \in \mathbb{W}(R)$ con la notazione $x = (x_0, x_1, \dots)$ dove $x_n := x(X_n)$.

Si definiscono anche i *vettori di Witt di lunghezza finita* $\mathbb{W}_n$ considerando solo un numero finito di variabili e con le stesse S_n e P_n.

Ho tre operatori standard:

Frobenius: $Fx(X_n) := x_n^p$ per ogni $x \in \mathbb{W}(R)$;

Verchiebung (slittamento): $Vx(X_n) = x_{n-1}$ per ogni $x \in \mathbb{W}(R)$;

Troncamento: $\rho_n : \mathbb{W}_n(R) \to \mathbb{W}_{n-1}(R)$ definita per ogni $n \geq 1$ da

$$\rho_n((x_0, \dots, x_n)) := (x_0, \dots, x_{n-1}).$$

Notiamo che dalla definizione delle mappe di troncamento ρ_n segue immediatamente che

$$\mathbb{W}(R) \simeq \varprojlim_n \mathbb{W}_n(R) \tag{2}$$

dove il limite inverso è calcolato rispetto alle mappe ρ_n.

Sia R un dominio d'integrità di caratteristica 0.

1. In $\mathbb{W}(R)$ vale la relazione $px = (0, x_0^p, x_1^p, \dots)$. In particolare, se k è un campo perfetto di caratteristica p:

$$FV = VF = p. \tag{3}$$

   Per la (3) si veda [1, (2) pag 79].

2. $\mathbb{W}_n(R)$ ha caratteristica p^n e $\mathbb{W}(R)$ è un anello integro di caratteristica 0.

3. I sottogruppi $V^n\mathbb{W}(R)$ sono ideali e formano un sistema fondamentale di intorni dello 0 di una topologia rispetto alla quale $\mathbb{W}(R)$ è completo.

4. $x = (x_0, x_1, \dots)$ è invertibile in $\mathbb{W}(R)$ se e solo se x_0 lo è in R.

5. Posto $K := \mathrm{Frac}(\mathbb{W}(R))$ (campo delle frazioni di $\mathbb{W}(R)$), posso definire una valutazione v in K ponendo per ogni $x \in \mathbb{W}(R)$:

$$v(x) := \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{N} : x \in V^n\mathbb{W}(R)\} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $\mathbb{W}(R)$ è l'anello di valutazione di v se e solo se R è un campo perfetto. In questo caso, denotato con $\mathfrak{m}$ l'ideale di valutazione di v, si ha che

$$\mathbb{W}(R)/\mathfrak{m}\mathbb{W}(R) \simeq R.$$

Sia ora K un corpo di caratteristica 0 completo rispetto ad una valutazione discreta v il cui corpo residuo k sia perfetto di caratteristica p. Sia A l'anello di valutazione di v e $\pi : A \to k$ la mappa di riduzione modulo l'ideale di valutazione. E' noto che esiste un unico sistema moltiplicativo $T_K \subseteq A$ tale che π sia una biezione se ristretta a T_K; esplicitamente, T_K può essere descritto come

$$T_K := \cap_n A^{p^n}.$$

Gli element di T_K sono detti *rappresentanti moltiplicativi* o di *Teichmüller*. Esiste allora un isomorfismo bicontinuo:

$$\Theta : \mathbb{W}(k) \to A$$

definito da

$$\Theta((\xi_0, \xi_1, \dots)) := \sum_{j=0}^{\infty} p^j x_j^{p^{-j}},$$

dove $x_j \in T_K$ sono tali che $\pi(x_j) = \xi_j$. Questo isomorfismo permette di introdurre un'ulteriore notazione: posto $[x] := (x, 0, 0, \dots)$, allora $\{[x] : x \in k\}$ coincide con l'insieme $T_{\mathbb{W}(k)}$, quindi ogni elemento $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots)$ può essere scritto nella forma:

$$\xi = \sum_{j=0}^{\infty} p^j [\xi_j]^{p^{-j}}.$$

Noto infine che

$$\mathfrak{m} = \{x \in \mathbb{W}(R) : v(x) > 0\} = p\mathbb{W}(R)$$

dunque $\mathbb{W}(k)$ è un'estensione di $\mathbb{Z}_p$ assolutamente non ramificata.

3.2 Covettori di Witt

Definisco lo $\mathbb{Z}$-funtore in insiemi dei *covettori di Witt unipotenti* $\mathbb{CW}^{\mathrm{u}}$ come il limiti diretto

$$\mathbb{CW}^{\mathrm{u}} := \varinjlim_{n} \mathbb{W}_n$$

rispetto alle mappe $V : \mathbb{W}_n \to \mathbb{W}_{n+1}$ indotte da V. Gli elementi di $\mathbb{CW}^{\mathrm{u}}(R)$ per ogni anello R sono dunque successioni

$$(\dots, 0, 0, x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0)$$

di elementi in R in cui le code sono identicamente nulle. Definisco poi lo $\mathbb{Z}$-funtore in insieme dei *covettori di Witt* ponendo, per ogni anello R:

$$\mathbb{CW}(R) := \{(\dots, x_{-n}, \dots, x_0) \in R^{\mathbb{N}} | \exists r \geq 0 \text{ tale che } (x_{-r}, x_{-r-1}, \dots) \in \mathfrak{r}_R\}.$$

In altre parole, $\mathbb{CW}(R)$ è formato dalle sequenze $(\dots, x_{-n}, \dots, x_0) \in R^{\mathbb{N}}$ in cui le code $(\dots, x_{-r})$ sono nilpotenti per un indice $r \geq 0$.

Per ogni intero $r \geq 0$, definisco l'ideale

$$I_r := (X_{-r}, X_{-r-1}, \dots).$$

Pongo

$$\mathbb{Z}[\![X]\!] := \varprojlim_{r,s} \mathbb{Z}[X]/I_r^s; \qquad \mathbb{Z}^{\mathrm{u}}[\![X]\!] := \varprojlim_{r} \mathbb{Z}[X]/I_r.$$

Proposizione 3.1. *Gli $\mathbb{Z}$-funtori in insiemi $\mathbb{CW}$ e $\mathbb{CW}^{\mathrm{u}}$ sono rappresentabili da $\mathbb{Z}[\![X]\!]$ e $\mathbb{Z}^{\mathrm{u}}[\![X]\!]$ rispettivamente. Più precisamente:*

$$\mathbb{CW}(R) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{cont}}(\mathbb{Z}[\![X]\!], R)$$

$$\mathbb{CW}^{\mathrm{u}}(R) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{cont}}(\mathbb{Z}^{\mathrm{u}}[\![X]\!], R).$$

Dimostrazione. [1, Chapitre I, §3]. □

Proposizione 3.2. *Per ogni $\mathbb{Z}$-algebra R, l'insieme $\mathbb{CW}(R)$ ha una struttura di gruppo abeliano che contiene $\mathbb{CW}^{\mathrm{u}}(R)$ come sottogruppo e che varia funtorialmente in R. In particolare, $\mathbb{CW}$ e $\mathbb{CW}^{\mathrm{u}}$ sono $\mathbb{Z}$-gruppi affini.*

Dimostrazione. La somma in $\mathbb{CW}(R)$ si definisce nel modo seguente: dati $x = (\dots, x_0)$ e $y = (, \dots, y_0)$ elementi di $\mathbb{CW}(R)$, si pone $x + y := z = (, \dots, z_0)$ dove per ogni n,

$$z_n := \lim_{m} S_m(x_{-m-n}, \dots, x_{-n}; y_{-m-n}, \dots, y_{-n})$$

(si dimostra che la successione precedente converge). Per i dettagli, si veda [1, Proposition 1.4]. □

3.3 Topologia naturale dei covettori di Witt

Sia $\mathfrak{a} \subseteq R$ in ideale nilpotente di un anello R. Per ogni intero $r \geq 0$ poniamo:

$$\mathbb{CW}(R, \mathfrak{a}, r) := \{a = (\dots, a_0) \in \mathbb{CW}(R) : a_{-r-n} \in \mathfrak{a}, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Si noti che $\mathbb{CW}(R) = \varinjlim_{\mathfrak{a},r} \mathbb{CW}(R, \mathfrak{a}, r)$, dove il limite diretto è calcolato su tutti gli ideali nilpotenti $\mathfrak{a}$ e tutti gli interi non negativi r. Doto tutti i $\mathbb{CW}(R, \mathfrak{a}, r)$ della topologia discreta e pongo su $\mathbb{CW}(R)$ la topologia del limite induttivo. Chiamo questa topologia la *topologia naturale* di $\mathbb{CW}(R)$.

Proposizione 3.3. *Per ogni anello R, lo spazio topologico $\mathbb{CW}(R)$ è separato e completo e contiene $\mathbb{CW}^{\mathrm{u}}(R)$ come sottogruppo denso.*

Dimostrazione. [1, Chapitre I, §1.6]. □

3.4 Gruppo formale dei covettori di Witt

Sia ora k un campo perfetto di caratteristica positiva p. Restringendo gli $\mathbb{Z}$-funtori in insiemi $\mathbb{CW}$ e $\mathbb{CW}^{\mathrm{u}}$ alla categoria delle k-algebre finite, ottengo due k-gruppi formali che denoto con $\widehat{\mathbb{CW}}_k$ e $\widehat{\mathbb{CW}}_k^{\mathrm{u}}$ rispettivamente. Noto che

$$\widehat{\mathbb{CW}}_k^{\mathrm{u}} = \varinjlim_{n} \mathrm{Ker}(V^n)$$

dunque $\widehat{\mathbb{CW}}^{\mathrm{u}}$ è la componente unipotente di $\widehat{\mathbb{CW}}$ secondo la Definizione 2.11. Il gruppo $\widehat{\mathbb{CW}}_k$ è il *gruppo formale dei covettori di Witt*.

Proposizione 3.4. *Per ogni k-algebra finita R l'insieme $\widehat{\mathbb{CW}}_k(R)$ ha una struttura naturale di $\mathbb{W}(k)$-modulo.*

Dimostrazione. La struttura di $\mathbb{W}(k)$-modulo si definisce nel modo seguente: dati $x = (\dots, x_0) \in \mathbb{CW}(R)$ e $a = (a_0, a_1, \dots) \in \mathbb{W}(k)$, si pone $ax := u = (, \dots, u_0)$ dove per ogni n,

$$u_{-n} := \lim_{m} P_m(a_0^{p^{-n-m}}, \dots, a_m^{p^{-m-n}}; y_{-m-n}, \dots, y_{-n})$$

(si dimostra che la successione precedente converge). Per i dettagli, si veda [1, Proposition 1.4] □

3.5 Relazione tra componente étale e unipotente nel gruppo formale dei covettori

Sia k'/k un'estensione finita di campi. Posto $A' := \mathbb{W}(k')$ e $K' := \mathrm{Frac}(A')$ (campo delle frazioni di A') abbiamo un isomorfismo continuo:

$$\Theta : K'/A' \to \widehat{\mathbb{CW}}_k^{\mathrm{u}}(k')$$

definito nel modo seguente: se $a = \sum_{i=-m}^{0} p^i [a_i]^{p^{-i}} \in K'/A'$ con m intero positivo è un elemento di K'/A', si pone:

$$\Theta(a) := (\ldots, 0, a_{.m}, \ldots, a_0).$$

Notare in particolare che $\widehat{\mathbb{CW}}_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$.

Ricordo che ogni k-algebra finita R è isomorfa al prodotto della sua parte étale e della sua parte connessa:

$$R \simeq R^{\text{ét}} \oplus \mathfrak{r}_R$$

dove $R^{\text{ét}}$ è la massima sottoalgebra étale di R (dunque, un prodotto finito di estensioni finite di k, essendo k perfetto). Segue:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{CW}}_k(R) &\simeq \widehat{\mathbb{CW}}(R^{\text{ét}}) \oplus \widehat{\mathbb{CW}}(\mathfrak{r}_R) && (4) \\ &\simeq \widehat{\mathbb{CW}}_k(R^{\text{ét}}) \oplus \widehat{\mathbb{CW}}_k^{\mathrm{c}}(R). && (5) \end{aligned}$$

Poiché $R^{\text{ét}}$ è ridotto, segue che

$$\widehat{\mathbb{CW}}(R^{\text{ét}}) = \widehat{\mathbb{CW}}^{\mathrm{u}}(R).$$

D'altra parte, $R^{\text{ét}} = \prod_{j=1}^{n} k_j$, dove k_j è un'estensione finita di k. Segue che $\widehat{\mathbb{CW}}_k^{\mathrm{u}}(R^{\text{ét}}) \simeq \oplus_{j=1}^{n} K_j/A_j$, dove si è posto $A_j := \mathbb{W}(k_j)$ e $K_j := \mathrm{Frac}(A_j)$. Quindi:

$$\widehat{\mathbb{CW}}_k(R) \simeq \oplus_{j=1}^{n} K_j/A_j \oplus \widehat{\mathbb{CW}}_k^{\mathrm{c}}(R). \qquad (6)$$

Proposizione 3.5. *Il gruppo formale dei covettori di Witt è un p-gruppo.*

Dimostrazione. Segue dalla (6) ricordando che ogni gruppo connesso è un p-gruppo. □

3.6 Anello di Dieudonné

Sia come sopra k un corpo perfetto di caratteristica p.

Definition 3.6. Definisco l'*anello di Dieudonné* $\mathbb{D}_k$ come l'anello $A[F,V]$ dove F e V sono indeterminate soggette alle seguenti relazioni: per ogni $a \in A$:

$$Fa = a^\sigma F; \quad aV = Va^\sigma; \quad VF = FV = p.$$

Poniamo per ogni k-algebra finita R e per ogni $x = (\dots, x_{-1}, x_0) \in \widehat{\mathbb{CW}}_k(R)$:

$$Fx := (\dots, x_{-1}^p, x_0^p); \quad Vx := (, \dots, x_{-2}, x_{-1}).$$

Questo rende $\widehat{\mathbb{CW}}_k(R)$ un $\mathbb{D}_k$-modulo.

3.7 Struttura del gruppo formale dei covettori come modulo sull'anello di Dieudonné

Definition 3.7. Un $\mathbb{D}_k$-modulo profinito (rispettivamente, proartiniano) è detto $A[F]$-*profinito* (rispettivamente, $A[F]$-*proartiniano*) se possiede un sistema fondamentale di intorni di 0 formato da sotto-$A[F]$-moduli.

Proposizione 3.8. *Sia R una k-algebra finita o profinita.*

1. *Parte étale: $\widehat{\mathbb{CW}}_k^{\text{ét}}(R)$ è un $\mathbb{D}_k$-modulo $A[F]$-proartiniano. Rispetto alla topologia naturale del gruppo formale dei covettori di Witt, $\widehat{\mathbb{CW}}_k^{\text{ét}}(R)$ è chiuso in $\widehat{\mathbb{CW}}_k(R)$ e può essere descritto nel seguente modo:*

$$\widehat{\mathbb{CW}}_k^{\text{ét}}(R) = \cap_n p^n \widehat{\mathbb{CW}}_r(R) = \cap_n F^n \widehat{\mathbb{CW}}_k(R)$$

2. *Parte connessa: $\widehat{\mathbb{CW}}_k^{\text{c}}(R)$ è un $\mathbb{D}_k$-modulo $A[F]$-profinito. Rispetto alla topologia naturale del gruppo formale dei covettori di Witt, $\widehat{\mathbb{CW}}_k^{\text{ét}}(R)$ è aperto in $\widehat{\mathbb{CW}}_k(R)$ e può essere descritto nel seguente modo:*

$$\widehat{\mathbb{CW}}_k^{\text{ét}}(R) = \{a \in \widehat{\mathbb{CW}}_k(R) : \lim_n F^n a = 0\}.$$

3. *$\widehat{\mathbb{CW}}_k(R)$ è un $\mathbb{D}_k$-modulo $A[F]$-proartiniano.*

Dimostrazione. [1, Chapitre II, Proposition 4.1]. □

4 Classificazione dei p-gruppi formali

Definisco un funtore $\mathbb{M}$ dalla categoria dei p-gruppi formali alla categoria dei $\mathbb{D}_k$-moduli $A[F]$-profiniti ponendo, per ogni p-gruppo formale $G = \mathrm{Spf}_k B$,

$$\mathbb{M}(G) := \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{gr}-\mathrm{for}}(G, \widehat{\mathbb{CW}}_k)$$

dove $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{gr}-\mathrm{for}}$ sono gli omomorfismi nella categoria dei k-gruppi formali. Sui morfismi di p-gruppi formali il funtore $\mathbb{M}$ si definisce nel modo ovvio per composizione. La verifica del fatto che $\mathbb{M}(G)$ sia un $\mathbb{D}_k$-modulo $A[F]$-profinito si può trovare in [1, Chapitre III, §1]. Noto in particolare che

$$\mathbb{M}(G) \subseteq \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{fun}}(G, \widehat{\mathbb{CW}}_k)$$

dove $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{fun}}$ indica l'insieme dei morfismi nella categoria dei funtori dalla categoria dei k-anelli a quella degli insiemi. Dunque, applicando il Lemma di Joneda, ottengo l'inclusione:

$$\mathbb{M}(G) \subseteq \widehat{\mathbb{CW}}_k(B).$$

Definisco poi un funtore $\mathbb{G}$ dalla categoria dei $\mathbb{D}_k$-moduli $A[F]$-profiniti a quella dei p-gruppi formali ponendo, per ogni $\mathbb{D}_k$-modulo $A[F]$-profinito M e per ogni k-algebra finita R:

$$\mathbb{G}(M)(R) := \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{D}_k}(M, \widehat{\mathbb{CW}}_k(R))$$

dove ho indicato con $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{D}_k}$ gli omomorfismi continui di $\mathbb{D}_k$-moduli.

Theorem 4.1. *I funtori $\mathbb{M}$ e $\mathbb{G}$ sono l'uno il quasi inverso dell'altro ed inducono un'antiequivalenza tra la categoria dei p-gruppi formali e la categoria dei $\mathbb{D}_k$-moduli $A[F]$-profiniti. Inoltre, fissato un p-gruppo G e posto $M := \mathbb{M}(G)$, valgono le seguenti relazioni:*

1. *G è un k-gruppo finito di ordine p^r se e solo se M è un A-modulo di lunghezza r.*
2. *G è liscio se e solo se F è iniettivo su M.*
3. *G è p-divisibile di altezza h se e solo se M è un A-modulo libero di rango h.*
4. *G è étale se e solo se M è étale, cioé $FM = M$.*
5. *G è connesso se e solo se M è connesso, cioé $\lim_n F^n a = 0$ per ogni $a \in M$.*

6. *G è unipotente se e solo se M è unipotente, cioé* $\lim_n V^n a = 0$ *per ogni* $a \in M$.

Dimostrazione. [1, §2,§3, §4]. I passi fondamentali sono i seguenti:

Passo 1. Mostrare che $\widehat{\mathbb{CW}}_k$ è un oggetto iniettivo nella categoria dei k-gruppi formali (notare che il teorema precedente implica che $\widehat{\mathbb{CW}}_k$ sia un oggetto iniettivo della categoria dei p-gruppi formali). Per quanto riguarda la parte étale di $\widehat{\mathbb{CW}}_k$, questo discende immediatamente dai seguenti due fatti:

1. Posto $\mathcal{G} := \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, la categoria dei k-gruppi formali étale è antiequivalente a quella dei $\mathcal{G}$-moduli discreti. L'antiequivalenza è realizzata tramite il funtore dei punti $G \rightsquigarrow G(\overline{k})$.
2. Sia K^{un} la massima estensione non ramificata di K, di cui indichiamo con A^{un} l'anello degli interi. Allora $K^{\mathrm{un}}/A^{\mathrm{un}}$ è un oggetto iniettivo nella categoria dei $\mathcal{G}$-moduli discreti.

Passo 2. Nel caso di un p-gruppo étale, si mostra che $\mathrm{Ker}(V) \simeq \mathrm{tg}_{\mathbb{D}(G)}(k)$. La struttura di $\mathbb{M}(G)$ si deduce allora da questo isomorfismo.

Passo 3. Nel caso di un gruppo formale connesso, di mostra che

$$\mathbb{M}(G)/F\mathbb{M}(G) \simeq \mathrm{ctg}_{\mathbb{D}(G)}(k) \simeq B^+/\overline{B}_2^+ \tag{7}$$

tramite la seguente mappa: noto che

$$\mathbb{M}(G)/F\mathbb{M}(G) \subseteq \widehat{\mathbb{CW}}_k(B)/F\widehat{\mathbb{CW}}_k(B).$$

La mappa naturale $\widehat{\mathbb{CW}}_k(B) \to B^+$ che manda un elemento $(, \ldots, x_0)$ in $x_0 \in B^+$ induce allora l'isomorfismo (7). La struttura di $\mathbb{M}(G)$ si deduce allora da questo isomorfismo.

□

Riferimenti bibliografici

[1] Fontaine, Jean-Marc. *Groupes p-divisibles sur les corps locaux.* (French) Astérisque, No. 47-48. Société Mathématique de France, Paris, 1977.

[2] Tate, J. T. *p-divisible groups.* 1967 Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966) pp. 158–183