Definizione di topologia (Def 3.1). Chiusi (Def 3.4). Topologia discreta, indiscreta, cofinita. Ordinamento di topologie. Def. 3.8. Topologia su $\mathbf{R}$.

Spazi Metrici (Def. 3.29). Topologia associata a metriche e proprietà (Prop. 3.38). Metriche che danno uguali topologie.

Base (Def. 3.5), Intorni (Def 3.15). Proprietà necessarie e sufficienti affinchè un sottoinsieme di $P(X)$ sia base per una topologia (Teo. 3.7)

Parte interna, chiusura, frontiera di un insieme (Def. 3.12), es $U = (a, b)$ o $U = [a, b)$ in R (con la topologia euclidea). Insiemi densi, es $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$. Caratterizzazione della chiusura, Lemma 3.17.

Funzioni continue, Def. 3.20, Caratterizzazione di app. continue usando i chiusi, basi per le topologie. Teorema 3.24. Continuità per spazi metrici, Teo. 3.42. Composizione di funzioni continue è continua, Teo. 3.2.2. Omeomorfismi, Def. 3.25. Caratterizzazione degli omemorfismi con applicazioni aperte e chiuse (Def 3.26, Lemma 3.27).

Topologia indotta su un sottoinsieme. Sottospazi. Caratterizzazione come la topologia meno fine che rende l'inclusione continua. Sottospazi discreti. Caratterizzazoni dei chiusi e di basi di sottospazi usando chiusi e basi dello spazio ambiente. Proposizione 3.52 e Lemma 3.53. Dimostrazione che la circonferenza unitaria in $\mathbf{R}^2$, con la topolgia indotta da quella euclidea, è omeomorfa al quadrato di lato 1 e centrato in $(0, 0)$ in $\mathbf{R}^2$, con la topolgia indotta da quella euclidea. Lemma di incollamento.

Prodotto di due spazi topologici e caratterizzazione della topologia prodotto (Teo 3.59). Prodotti di n spazi topologici e caratterizzazione della topologia, es. $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{C}^n$ con topologia euclidea = topologia prodotto. $S_1 \times \mathbf{R}_{>0}$ è omeomorfo a $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Prodotto di funzioni continue è continuo.

Def 7.31: spazi T0, T1, T2 e dimostrazione T2 $\Longrightarrow$ T1 $\Longrightarrow$ T0. Spazi che non sono T0, spazi che sono T1 ma non sono T2. Prop. 3.66: sottospazi e prodotti di spazi di Hausdorff sono di Hausdorff. Teo. 3.67, caratterizzazione di essere di Hausdorff usando la diagonale. Spazi metrici sono di Hausdorff Es. 3.64. Esempi di spazi non di Haudorff (topologia indiscreta, cofinita). Oss: esistono spazi top. non metrizzabili. Cor. 3.68.

Def 4.1, connessione. Esempi di spazi non connessi (la retta reale meno punti). Teo. 4.1. l'intervallo $[0, 1]$ è connesso. Teo 4.7: immagine di connesso tramite applicazione continua è connesso. Lemma 4.20: unione di sottospazi connessi che contengono un punto in comune è connesso.

Def 4.8: connessione per archi. Lemma 4.9: connesso per archi implica connesso, Cor. 4.11: convesso in $\mathbf{R}^n$ implica connesso per archi. Esercizio: $\mathbf{R}^2$ ed $\mathbf{R}$ non sono omeomeorfi.

Def. 4.27: ricoprimenti, Def. 4.32: Compattezza. Es: $\mathbf{R}^n$, $(a,b) \subset \mathbf{R}$ (topologia euclidea) non sono compatti, Teo. 4.35: immagine di compatto tramite applicazione continua è compatto. Teo. 4.36: l'intervallo $[a,b]$ è compatto. Teo. 4.44 di Wallace. Cor. 4.45: Compatto in spazio di Hausdorff è chiuso. Prop. 4.38: chiuso in compatto è compatto. Unione finita di compatti è compatta. Caratterizzazione dei compatti in $\mathbf{R}^n$. Teo. 4.41 + Cor. 4.46: prodotto finito di compatti è compatto.

Def. 4.18 Comp. connessa, Lemma 4.22 e Teo. 4.24: descrizione delle comp. connesse di uno spazio topologico. Osservazione che il numero di componenti connesse è invariante per omeomorfismo e quindi $\mathbf{R} - \{x-1, \ldots, x_n\}$ con la topologia euclidea non è omeomorfo a $\mathbf{R} - \{x-1, \ldots, x_m\}$ se $n \neq m$. Esercizi. Teo. 4.17 prodotto di spazi connessi è connesso, Lemma 4.19: chiusura di connesso è connesso, Esempio di connesso in $\mathbf{R}^2$ non connesso per archi: pulce e pettine.

§5.2: Topologia quoziente rispetto a relazione di equivalenza. Prop. 5.7: proprietà universale. Contrazioni. Unione disgiunta di spazi toplogici. Es, $[0,1]/\{0,1\} \cong S_1$, $([0,1] \amalg [2,3])/\{1,2\} \cong [0,2]$.

Ricapitolazione ed esempi su unione disgiunta di insiemi e sottospazi. Descrizione della topologia quoziente con gli aperti saturi. Proprietà del quoziente: X connesso o compatto implica $X/\sim$ connesso o compatto. Controesempio per la proprietà T2. Identificazione di uno spazio topologico lungo sottospazi. Es. Cilindro compatto $[0,1] \times [0,1]/\sim$, Nastro di Moebius, dim. che cilindro compatto è omeomorfo a $S_1 \times [0,1]$

Incollamento di spazi topologici lungo sottospazi. Es. due piani incollati lungo una retta. Quozienti per azioni di sottogruppi del gruppo degli omeomorfismi di uno spazio topologico, Es. $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \cong S_1$. Es., spazio proiettivo reale e complesso. Usando $S_n \subset R^{n+1} \backslash \{0\}$, dimostrazione che $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ è connesso e compatto.

Prop. 5.18. Criterio affinchè $X/\sim$ sia di Hausdorff. Proposizione 5.13 e Cor. 5.17: Caso X/G. Prop. 5.21: $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ è di Hausdorff.

Def 3.8: sistema fondamentale di intorni di un punto. Def. 10.1-10.4: spazi localmente connessi e localmente connessi per archi. Def. 10.2: Componenti connesse per archi. Prop. 10.5: componenti connesse = componenti connesse per archi per spazi localmente connessi per archi.

Def. 10.8: Omotopia. Lemma 10.11: Essere omotopi è una relazione di equivalenza fra applicazioni continue. Es: Due applicazioni continue $X \to Y$, con $Y \subset R^n$ convesso, sono omotope. Lemma 10.12: composizione di omotopie. Def. 10.13 equivalenza omotopica. Lemma 10.15: le equivalenze

omotopiche preservano le componenti connesse e le componenti connesse per archi. Def. 10.16: spazio contrattile. Def 10.17: retrazioni. Def. 10.19: retratti per deformazioni. Prop. 10.21: retrazione per deformazione è equivalenza omotopica. Esempi.

Es. 14.27: Definizione di grafi e di grafo topologico associato. Def di alberi come grafi connessi con numero dei vertici=1+ numero dei lati. Dimostrazione che gli alberi sono omotopicamente equivalenti ad un punto. Proposizione (solo enunicato): ogni grafo contiene un sottoalbero massimale. Dato un sottoalbero massimale in un grafo, detto grafo è omotopicamente equivalente alla contrazione del sottoalbero ad un punto. Esempi ed esercizi.

Omotopia di cammini e principali proprietà. Definizione di gruppo fondamentale. Spazi semplicemente connessi (Def. 11.14). Definizione dell' omomorfismo indotto da applicazioni continue. Dimostrazione che $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$. Se $\iota: Y \subset X$ è retratto allora ι_* è iniettiva. Se ι è retratto per deformazione allora ι_* è isomorfismo. Lemma 11.13 Dipendenza del gruppo fondamentale dal punto base. Prop. 11.19, Cor. 11.20, Teo. 11.22: Equivalenza omotopica induce isomorfismo di gruppi fondamentali.

Teorema 14.14 (dimostrazione): definizione e costruzione di gruppi liberi. Presentazione di gruppi. Teo. 14.19: enunciato del teorema di Seifert–Van Kampen utilizzzando le presentazioni.

Teorema (solo enunciato): Il gruppo fondamentale di S^1 è $\mathbf{Z}$.

Teorema: Il gruppo fondamentale del prodotto di spazi topologici è isomorfo al prodotto dei gruppi fondamentali.

Applicazioni: calcolo del gruppo fondamentale di un grafo, il gruppo fondamentale di S^2, del toro.