NB: Gli argomenti denotati con * sono argomenti complementari.

Introduzione al corso.

Definizione di topologia (def 3.1). Topologia su $\mathbf{R}$. Chiusi Def 3.4, Base Def. 3.5, Intorni Def 3.15. Def 3.8: sistema fondamentale di intorni di un punto.

Spazi Metrici, def. 3.29, Basi con palle aperte Def. 3.37, Topologia associata a metriche e proprietà Prop. 3.38. Metriche che danno uguali topologie.

Proprietà necessarie e sufficienti affinchà un sottoiniseme di $\mathcal{P}(X)$ sia base per una toplogia (Teo. 3.7)

Esempi: Topologie su $\mathbf{R}$: banali, euclidea, cofinita.

Ordinamento di toplogie. Def. 3.8.

Parte interna, chiusura, frontiera di un insieme Def. 3.12, es $U = (a, b)$ o $U = [a, b)$ in $\mathbf{R}$ (con la topologia euclidea). Insiemi densi, es $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$

Funzioni continue, Def. 3.20, Caratterizzazione di app. continue usando i chiusi, basi per le topologie. Continuità per spazi metrici Teo. 3.42. Composizione di funzioni continue è continua Teo. 3.2.2

Omeomorfismi Def. 3.25.

Topologia indotta su un sottospazio. Caratterizzazione come la topologia meno fine che rende l'inclusione continua Dimostrazione che la circonferenza unitaria in $\mathbf{R}^2$, con la topolgia indotta da quella euclidea, è omeomorfa al quadrato di lato 2 e centrato in $(0, 0)$ in $\mathbf{R}^2$, con la topolgia indotta da quella euclidea.

Applicazioni aperte e chiuse Def 3.26, caratterizzazioni di omeomorfismi Lemma 3.27.

Sottospazi topologici, Prop. 3.52, Immersioni Def 3.55.

Prodotti di due spazi topologici e caratterizzazione della topologia prodotto Teo 3.59, prodotti di n spazi topologici e caratterizzazione della topologia, es. $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{C}^n$ con topologia euclidea=topologia prodotto, $S_1 \times \mathbf{R}_{>0}$ è omeomorfo a $\mathbf{R}^2 - (0, 0)$

Definizione di spazi di Hausdorff Def 3.63, spazi metrici sono di Hausdorff Es. 3.64, esempi di spazi non di Haudorff (topologia indiscreta, cofinita). OSS: esistono spazi top. non metrizzabili.

Def 7.31: spazi T0, T1, T2 e dimostrazione $T2 \Longrightarrow T1 \Longrightarrow T0$. Spazi che non sono T0, spazi che sono T1 ma non sono T2. Prop. 3.66: sottospazi e prodotti di spazi di Hausdorff sono di Hausdorff. Teo. 3.67, caratterizzazione di essere di Hausdorff usando la diagonale. Cor. 3.68.

Def 4.1, connessione. Esempi di spazi non connessi ($\mathbf{R}$ meno punti). L'intervallo $[0,1]$ è connesso, Teo. 4.1. Immagine di connesso tramite applicazione continua è connesso, Teo 4.7.

Def 4.8: connessione per archi. Lemma 4.9: connesso per archi implica connesso, Cor. 4.11: convesso in $\mathbf{R}^n$ implica connesso per archi.

Teo. 4.17: prodotto di spazi connessi è connesso. Lemma 4.19: chiusura di connesso è connesso. Lemma 4.20: unione di sottospazi connessi che contengono un punto in comune è connesso. Def. 4.18: Componente connessa. Lemma 4.22 e teo. 4.24: descrizione delle comp. connesse di uno spazio topologico.

Osservazione che il numero di componenti connesse è invariante per omeomorfismo e quindi $\mathbf{R}-\{x_1,\ldots,x_n\}$ con la topologia euclidea non è omeomorfo a $\mathbf{R}-\{x_1,\ldots,x_m\}$ se $n\neq m$. Es: $\mathbf{R}-\{x_1,\ldots,x_n\}$ con la topologia cofinita è connesso. Es: Componenti connesse di $\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$ (con la topologia euclidea)

Def. 4.27: Ricoprimenti, Def. 4.32: Compattezza. Es: $\mathbf{R}^n$, $(a,b)\subset\mathbf{R}$ (topologia euclidea) non sono compatti, Teo. 4.35: immagine di compatto tramite applicazione continua è compatto. Prop. 4.38: chiuso in compatto è compatto; Unione finita di compatti è compatta. Teo. 4.36: l'intervallo $[a,b]$ è compatto. Teo. 4.44 di Wallace. Teo. 4.41 + Cor. 4.46: prodotto finito di compatti è compatto. Cor. 4.45: Compatto in spazio di Hausdorff è chiuso. Caratterizzazione dei compatti in $\mathbf{R}^n$. Lemma: un'applicazione continua da spazio compatto a spazio di Hausdorff è chiusa.

§5.2: Toplogia quoziente rispetto a relazione di equivalenza. Prop. 5.7: proprietà universale. Contrazioni. Unione disgiunta di spazi toplogici. Es, $[0,1]/\{0,1\}\cong S_1$, $\big([0,1]\amalg[2,3]\big)/\{1,2\}\cong[0,2]$.

Ricapitolazione ed esempi su unione disgiunta di insiemi e sottospazi. Descrizione della topologia quoziente con gli aperti saturi. Prorprietà del quoziente: X connesso o compatto implica $X/\sim$ connesso o compatto. Controesempio per la proprietà T2.

Identificazione di uno spazio topologico lungo sottospazi. Es. Cilindro compatto $[0,1]\times[0,1]/\sim$, Nastro di Moebius, dim. che cilindro compatto è omeomorfo a $S_1\times[0,1]$

Incollamento di spazi topologici lungo sottospazi. Es. due piani incollati lungo una retta. Quozienti per azioni di sottogruppi del gruppo degli omeomorfismi di uno spazio topologico, Es. $\mathbf{R}/\mathbf{Z}\cong S_1$. Es., spazio proiettivo reale e complesso. Usando $S_n\subset\mathbf{R}^{n+1}\backslash\{0\}$, dimostrazione che $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ è connesso e compatto.

Prop. 5.18. Criterio affinchè $X/\sim$ sia di Hausdorff. Proposizione 5.13 e

Cor. 5.17: Caso X/G. Prop. 5.21: gli spazi proiettivi sono di Hausdorff.

Def. 10.1 – 10.4: spazi localmente connessi e localmente connessi per archi. Def. 10.2: Componenti connesse per archi. Prop. 10.5: componenti conensse= componenti connesse per archi per spazi localmente connessi per archi.

Def. 11.1: Omotopia di cammini e principali propriet (è una relazione di equivalenza). Lemma 11.3: lemma di parametrizzazione. Teorema 11.10/Def. 11.11: Definizione di gruppo fondamentale. Prop. 11.4, Prop. 11.6: composizione e inverso di cammini passano al quoziente rispetto ad omotopia di cammini. Associativita' del prodotto di classi di cammini. Proprietà della classe del cammino costante e dell'inverso (quest'ultima non dimostrata). Dimostrazione del Teorema 11.10. Lemma 11.13: dipendenza di π_1 dal punto base. Prop. 11.9: Definizione dell' omomorfismo indotto da applicazioni continue. Dimostrazione che $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$. Cor: Omeomorfismi inducono isomorfismi di gruppo fondamentale. Prop. 11.17: gruppo fondamentale del prodotto di spazi topologici.

Def 10.17: retrazioni. Def. 10.19: retratti per deformazioni e relazione di gruppi fondamentali: Se $\iota\colon Y \subset X$ è retratto allora ι_* è iniettiva. Se ι è retratto per deformazione allora ι_* è isomorfismo. Esempi: $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$, Convessi di $\mathbf{R}^n$.

Def. 10.8: Omotopia. Prop. 10.21: retrazione per deformazione e' equivalenza omotopica. Lemma 10.11: Omotopia è relazione di equivalenza fra applicazioni continue. Lemma 10.12: composizione di omotopie. Def. 10.13 equivalenza omotopica. Lemma 10.15: le equivalenze omotopiche preservano le componenti connesse e le componenti connesse per archi. Def. 10.16: spazio contrattile.

Prop. 11.19, Cor. 11.20, Teo. 11.22: Equivalenza omotopica induce isomorfismo di gruppi fondamentali.

Es. 14.27: Definizione di grafi e dello spazio topologico associato. Definizione di alberi come grafi connesi con $n.$ vertici$=1+n.$ lati. Dimostrazione che gli alberi sono omotopicamente equivalenti ad un punto. Proposizione (solo enunicato): ogni grafo contiene un sottoalbero massimale. Dato un sottoalbero massimale in un grafo, detto grafo è omotopicamente equivalente alla contrazione del sottoalbero ad un punto.

Def 14.8 e Teorema 14.14: Definizione e costruzione di gruppi liberi. Calcolo del gruppo fondamentale di un grafo utilizzando la contrazione di un sotto-albero massimale.

Presentazione di gruppi. Teo. 14.19: enunciato del teorema di Seifert–

Van Kampen utilizzando le presentazioni. Es: gruppo fondamentale della sfera, del toro, di $\mathbf{P}^2$

Il gruppo fondamentale di S^1 è $\mathbf{Z}^*$. (Note della collega Dedò, disponibili sulla sua pagina web)