Teorema di Rouché-Capelli

Def: Sia V un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale. Un **sottospazio affine** di V di dimensione k è un sottoinsieme della forma

$$v_0 + W := \{v \in V | v = v_0 + w \text{ per } w \in W\}$$

ove W è un sottospazio vettoriale di V di dimensione k e $v_0 \in V$.

Oss:
a) per ogni $w_0 \in W$ si ha $v_0 + W = (v_0 + w_0) + W$;
b) lo spazio affine $v_0 + W$ è un sottospazio vettoriale di V se e solo il vettore $\mathbf{0} \in v_0 + W$ se e solo se $v_0 \in W$.

Teorema (di Rouché–Capelli)
Sia dato il sistema di m equazioni in n incognite $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

1) Il sistema è risolubile se e solo se $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|\mathbf{b})$.

2) L'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato $Sol(A, \mathbf{0})$ coincide con $\ker L_A$ ed è un sottospazio vettoriale di dimensione $n - r$ con $r = \text{rank}(A)$.

3) Se il sistema $Ax = \mathbf{b}$ è risolubile, allora, data una soluzione particolare $\underline{\alpha}_0 \in \mathbb{K}^n$, l'insieme delle soluzioni $Sol(A, \mathbf{b})$ è il sottospazio affine di dimensione $n - r$

$$Sol(A, \mathbf{b}) = \underline{\alpha}_0 + Sol(A, \mathbf{0})$$

Dim: 1) Ricordiamo che $\underline{\alpha} =^t (\alpha_1, ...\alpha_n) \in \mathbf{K}^n$ è soluzione di $Ax = \mathbf{b}$ se e solo se $\alpha_1 A^1 + ... + \alpha_n A^n = \mathbf{b}$. Il sistema $Ax = \mathbf{b}$ è perciò risolubile se e solo se $\mathbf{b}$ è combinazione lineare delle colonne di A, cioè se e solo se $\mathbf{b} \in L(A^1, ..., A^n)$, cioè se e solo se $dimL(A^1, ..., A^n) = dimL(A^1, ..., A^n, \mathbf{b})$, ma per definizione $dimL(A^1, ..., A^n) = \text{rank}(A)$ e $dimL(A^1, ..., A^n, \mathbf{b}) = \text{rank}(A|\mathbf{b})$.
2) Per definizione $L_A(\underline{\alpha}) = A\underline{\alpha}$, quindi $Sol(A, \mathbf{0}) = \ker L_A$ e inoltre ImL_A è generato dalle colonne di A perciø' $dimImL_A = \text{rank}(A)$. Quindi, per il teorema della nullità più rango, $n = dim \ker L_A + dimImL_A = dimSol(A, \mathbf{0}) + r$.
3) Sia ora $\underline{\alpha}_0 \in \mathbb{K}^n$ una soluzione di $x = \mathbf{b}$. Mostriamo che $Sol(A, \mathbf{b}) \subset \underline{\alpha}_0 + Sol(A, \mathbf{0})$, infatti per ogni $\underline{\alpha} \in Sol(A, \mathbf{b})$, $A(\underline{\alpha} - \underline{\alpha}_0) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, quindi $\underline{\alpha} - \underline{\alpha}_0 \in Sol(A, \mathbf{0})$. Viceversa, dato $\underline{w} \in Sol(A, \mathbf{0})$, $A(\underline{\alpha}_0 + \underline{w}) = \mathbf{b} - \mathbf{0} = \mathbf{b}$, quindi $\underline{\alpha}_0 + Sol(A, \mathbf{0}) \subset Sol(A, \mathbf{b})$.

Esempio 1.1 delle note sui sistemi lineari Sistema di 2 equazioni e in 3 incognite. Si ha $\text{rank}(A) = 1$, $\text{rank}(A|\mathbf{b}) = 2$, quindi il sistema è impossibile.

Esempio 1.3 delle note sui sistemi lineari Sistema di 3 equazioni e in in 2 incognite. Si ha $\text{rank}(A) = 2$, $\text{rank}(A|\mathbf{b}) = 2$, quindi il sistema ammette una sola soluzione e

$$Sol(A, \mathbf{b}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esempio 1.4 delle note sui sistemi lineari Sistema di 2 equazioni e in in 2 incognite. Si ha $\text{rank}(A) = 1$, $\text{rank}(A|\mathbf{b}) = 1$, quindi il sistema ammette ∞^1 soluzioni,

$$\text{soluzione particolare } \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ Sol(A, \mathbf{0}) = L\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}\right),\ \text{quindi}$$

$$Sol(A, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}\right).$$

Rango per riga = rango per colonna

Def: Sia A una matrice con h righe ed n colonne a coefficienti in $\mathbb{K}$. Definisco
a) il rango per righe di A, denotato $\text{rank}_r(A)$, come la dimensione del sottospazio di $\mathbb{K}^n$ generato dalle righe di A,
b) il rango per colonne di A, denotato $\text{rank}_c(A)$, come la dimensione del sottospazio di $\mathbb{K}^h$ generato dalle colonne di A.

Oss:
I) Il rango per righe di A è il massimo numero di righe linearmente indipendenti di A. Analogamente, il rango per colonne di A è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A. Inoltre, valgono le disuguaglianze

$$\text{rank}_r(A) \leq n, \qquad \text{rank}_c(A) \leq h.$$

II) Sia ${}^tA$ la matrice con n righe ed h colonne a coefficienti in $\mathbb{K}$ la cui entrata (i, j)–esima è l'entrata (j, i)–esima di A per ogni $1 \leq i \leq h$ e ogni $1 \leq j \leq n$. Tale matrice è chiamata la *trasposta* di A. Osservo che le righe di ${}^tA$ sono le colonne di A e le colonne di ${}^tA$ sono le righe di A. In particolare,

$$\text{rank}_r({}^tA) = \text{rank}_c(A), \qquad \text{rank}_c({}^tA) = \text{rank}_r(A).$$

Proposizione Vale $\text{rank}_r(A) = \text{rank}_c(A) \leq \min\{h, n\}$.

Dim: La seconda disuguaglianza segue dalla Oss. I.
Osservo che basta dimostrare che $\text{rank}_c(D) \leq \text{rank}_r(D)$ per ogni matrice D. Infatti, per $D = A$ ottengo $\text{rank}_c(A) \leq \text{rank}_r(A)$ e per $D = {}^tA$ ottengo, grazie alla Oss. II, $\text{rank}_r(A) = \text{rank}_c({}^tA) \leq \text{rank}_r({}^tA) = \text{rank}_c(A)$.
Resta da dimostrare che $\text{rank}_c(A) \leq \text{rank}_r(A)$ per ogni matrice A. Sia $r := \text{rank}_r(A)$. Sia B la matrice $r \times n$ le cui righe sono ottenute prendendo r righe linearmente indipendenti di A. Osservo che ogni altra riga di A è combinazione lineare delle righe di B e quindi le matrici A e B definiscono sistemi lineari omogenei equivalenti, ovvero $Sol(A, \mathbf{0}) = Sol(B, \mathbf{0})$.
Siano $L_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^h$ e $L_B \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^r$ le applicazioni lineari definite da $x \mapsto A \cdot x$ e $x \mapsto B \cdot x$ rispettivamente. Il nucleo di L_A (risp. di L_B) coincide con $Sol(A, \mathbf{0})$ (risp. $Sol(B, \mathbf{0})$). Quindi, $\text{Ker}(L_A) = \text{Ker}(L_B)$.
Per il teorema di nullità più rango applicato ad L_A abbiamo $\dim \text{Im} L_A = n - \dim \text{Ker}\, L_A$. Questo coincide con $n - \dim \text{Ker}\, L_B$ perchè $\text{Ker}(L_A) = \text{Ker}(L_B)$ e $n - \dim \text{Ker}\, L_B = \dim \text{Im} L_B$ applicando ancora il teorema di nullità più rango ad L_B. Poichè $\text{Im} L_B \subseteq \mathbb{K}^r$ ho che $\dim \text{Im} L_B \leq r$. Concludo che $\text{rank}_c(A) = \dim \text{Im} L_A \leq r = \text{rank}_r(A)$ come volevasi dimostrare.