B_{dR}-REPRÉSENTATIONS DANS LE CAS RELATIF

FABRIZIO ANDREATTA AND OLIVIER BRINON

Résumé. Dans ce travail nous développons un analogue relatif de la théorie de Sen pour les B_{dR}-représentations. On donne des applications à la théorie des représentations p-adiques, en la reliant à la théorie des (φ,Γ)-modules relatifs, et à celle des modules de Higgs p-adiques développée par G. Faltings.

Abstract. In this work, we develop a relative analogue of Sen's theory for B_{dR}-representations. We give applications to p-adic representation theory, linking it with relative (φ,Γ)-module theory, and with that of p-adic Higgs' modules, developed by G. Faltings.

Table des matières

1. Introduction

Soit K un corps de valuation discrète complet, de caractéristique 0, de corps résiduel k parfait de caractéristique $p>0$. On note $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et G_K le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Dans [18], S. Sen a classifié les C_K-représentations de G_K (*i.e.* les C_K-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action semi-linéaire et continue de G_K, *cf* définition 2.1), où C_K est le complété de $\overline{K}$ pour la valuation. À la suite de Sen, J.-M. Fontaine a classifié dans [13] les $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)$-représentations de G_K, où $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)$ est le corps des périodes p-adiques associé à K par Fontaine. Soit $K_\infty \subseteq \overline{K}$ l'extension de K obtenue en adjoignant les racines p^n-ièmes de l'unité pour $n\in\mathbf{N}$. Posons $H_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$ et $\Gamma_K := \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. Soient B l'un des corps C_K ou $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)$ et $\mathbf{Rep}_B(G_K)$ la catégorie des B-représentations de G_K (*cf* définition 2.1). Sen et Fontaine montrent tout d'abord que cette catégorie est équivalente à la catégorie $\mathbf{Rep}_{B^{G_K}}(\Gamma_K)$ des B^{G_K}-représentations de Γ_K. Ensuite ils prouvent un résultat de décomplétion. Plus précisément, ils montrent que la catégorie $\mathbf{Rep}_{B^{G_K}}(\Gamma_K)$ est équivalente à celle des espaces vectoriels de dimension finie sur un sous-corps dense de B^{G_K} (qui est K_∞ dans le cas de Sen et $K_\infty(\!(t)\!)$ dans le cas de Fontaine, avec $t=\log([\varepsilon])$ l'élément habituel). La troisième étape consiste à passer de l'action de Γ_K, qui est un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^\times$, à son action infinitésimale. Cela fournit un opérateur différentiel. La principale application est la suivante : si V est une représentation p-adique de G_K, on obtient, en appliquant les résultats qui précèdent à $V\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)$, un $K_\infty(\!(t)\!)$-espace

1991 *Mathematics Subject Classification.* 11F80,11F85,11S25.
Key words and phrases. p-adic Hodge theory, Almost étale extension, Sen's theory, Higgs bundles.

vectoriel $\mathrm{D_{dif}}(V)$ muni d'un opérateur différentiel. Ce dernier contient d'importantes informations arithmétiques (par exemple, il est trivial si et seulement si la représentation V est de de Rham). En utilisant les travaux de Fontaine et de Cherbonnier-Colmez, on peut relier le (φ, Γ_K)-module surconvergent associé à V à $\mathrm{D_{dif}}(V)$. Ce lien est fondamental pour les lois de réciprocité explicites de Colmez ([9]). C'est aussi un ingrédient crucial dans les travaux de Berger ([5]) où il montre que la conjecture de Fontaine qui affirme qu'une représentation de de Rham est potentiellement semi-stable résulte de la conjecture de monodromie p-adique.

Dans cet article, on étudie la situation lorsque K est remplacé par une base plus générale (*cf* partie 2). Soient d un entier, $T_1, \ldots, T_d$ des indéterminées et $R^0 = \mathcal{O}_K\big\{T_1^{\pm 1}, \ldots, T_d^{\pm 1}\big\}$ le séparé complété de $\mathcal{O}_K\big[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_d^{\pm 1}\big]$ pour la topologie p-adique. On se donne un anneau $\widetilde{R}$ obtenu à partir de R^0 en itérant un nombre fini de fois les opérations suivantes :

(ét) complétion p-adique d'une extension étale ;

(loc) complétion p-adique d'une localisation ;

(comp) complétion par rapport à un idéal contenant p.

On suppose en outre que le théorème de pureté de Faltings s'applique à $\widetilde{R}$. On fixe une extension finie et normale $\widetilde{R} \subseteq R$, qui est étale quand on inverse p et telle que R est intègre (*cf* remarque 2.3). Dans ce cas, l'anneau $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ est remplacé par le normalisé $\overline{R}$ de R dans l'extension maximale non ramifiée de $R[p^{-1}]$. De même, on remplace K_∞ par l'anneau $R_\infty[p^{-1}]$ obtenu à partir de $R[p^{-1}]$ en adjoignant les racines p^n-ièmes de l'unité et des variables $T_1, \ldots, T_d$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On pose $\mathcal{G}_R := \mathrm{Gal}\big(\overline{R}[p^{-1}]/R[p^{-1}]\big)$, $\mathcal{H}_R = \mathrm{Gal}\big(\overline{R}[p^{-1}], R_\infty[p^{-1}]\big)$ et $\Gamma_R = \mathcal{G}_R/\mathcal{H}_R = \mathrm{Gal}\big(R_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\big)$. Notons $\widehat{\overline{R}}$ le séparé complété de $\overline{R}$ pour la topologie p-adique et $C = \widehat{\overline{R}}[p^{-1}]$. La théorie de Sen des C-représentations libres de rang fini de $\mathcal{G}_R$ a été développée dans [2, §2 & 3] (*cf* aussi [11, §3]). Comme dans le cas classique, on dispose des anneaux de périodes $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+[t^{-1}]$ (*cf* partie 2.7). Cet anneau permet de définir la notion de représentation p-adique de de Rham de $\mathcal{G}_R$: si $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$, on pose $\mathrm{D_{dR}}(V) = \big(\mathrm{B_{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V\big)^{\mathcal{G}_R}$, c'est un $R[p^{-1}]$-module projectif de rang fini muni d'une filtration et d'une connexion intégrable. On dit que V est de de Rham lorsque l'application naturelle $\mathrm{B_{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} \mathrm{D_{dR}}(V) \to \mathrm{B_{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est un isomorphisme (*cf* [7]).

Le premier objectif de ce travail est de donner, comme dans le cas classique, un critère différentiel pour qu'une représentation soit de de Rham. Pour ce faire, on étudie la catégorie des $\mathrm{B_{dR}}$-représentations « régulières » (*cf* définition 3.9). C'est l'objet de la partie 3, où on développe la théorie de Sen pour les $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-représentations libres de rang fini de $\mathcal{G}_R$. On prouve que cette catégorie est équivalente à celle des modules « potentiellement libres » de rang fini sur le sous-anneau $R_\infty[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!]$ de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$, munis de l'action résiduelle de Γ_R (*cf* théorème 3.23). Les techniques employées sont proches de celles de [13] : une descente « presque étale » (qui utilise le théorème de pureté de Faltings), suivie d'une décomplétion. Remarquons toutefois que cette dernière est beaucoup plus subtile dans le cas relatif, parce que le groupe de Lie p-adique Γ_R est de dimension $d+1$: on doit utiliser les traces normalisées de Tate généralisées construites dans [2, §2 & 3] (*cf* proposition 3.17 en particulier).

Étant donné un module Y potentiellement libre de rang fini sur $R_\infty[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!]$ muni d'une action de Γ_R, on étudie dans la partie 4 l'action infinitésimale de Γ_R, qui fournit une connexion (non nécessairement intégrable) $\widetilde{\nabla}_Y \colon Y \to Y\frac{\mathrm{d}\,t}{t} \oplus_{i=1}^{d} Y\frac{\mathrm{d}\,u_i}{t}$ (proposition 4.6). Dans le paragraphe 5 on étudie les objets ainsi obtenus (invariants sous Γ_R, sections horizontales), en particulier, on montre que la $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-représentation de départ est triviale si et seulement si le module à connexion $(Y, \widetilde{\nabla}_Y)$ est trivial (théorème 5.17). Tout ce qui précède s'étend aux $\mathrm{B_{dR}}$-représentations qui sont déduites d'une $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-représentation libre en inversant t.

Finalement, dans la partie 7, on applique ces résultats aux représentations p-adiques. Une telle représentation V étant donnée, on dispose de la $\mathrm{B_{dR}}$-représentation $\mathrm{B_{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. Elle est régulière : ce qui précède permet de lui associer un module différentiel $\mathrm{D_{dif}}(V)$. On montre (proposition 7.1) que V est de de Rham si et seulement si $\mathrm{D_{dif}}(V)$ est trivial, *i.e.* admet une base de sections horizontales.

Par ailleurs, la surconvergence des représentations p-adiques, démontrée par Cherbonnier et Colmez dans le cas classique (*cf* [8]), a été étendue au cas relatif dans [2] : une représentation p-adique $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$ est entièrement déterminée par son (φ, Γ_R)-module surconvergent $\mathrm{D}^\dagger(V)$ (*cf* [2, Théorème 4.35]). En général, pour des raisons de convergence, il n'est pas possible de définir l'action de l'algèbre de Lie du groupe de Lie p-adique Γ_R directement sur $\mathrm{D}^\dagger(V)$. L'autre objectif de ce travail est de relier le (φ, Γ_R)-module $\mathrm{D}^\dagger(V)$ au module différentiel $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}(V)$ (théorème 7.5) où l'action de l'algèbre de Lie est donnée par la connexion.

Dans le cas relatif, il y a un nouvel aspect : nous développons dans la partie 6 une variante géométrique de la théorie de Sen en utilisant les groupes $G_R = \mathrm{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}]/R\overline{K}\right)$, $H_R = \mathrm{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}]/R_\infty\overline{K}\right)$ et $\widetilde{\Gamma}_R = \mathrm{Gal}\left(R_\infty\overline{K}/R\overline{K}\right)$. On étudie en particulier les représentations continues $G_R \to \mathsf{GL}_n\left(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)\right)$ (où $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)$ est l'anneau des entiers de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)$). Soit $\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}$ l'adhérence (en un sens convenable) de $\mathrm{R}_\infty \cdot \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)$ dans B_{dR}. À toute $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)$-représentation V de G_R, on associe un module Y sur le sous-anneau $\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}[\![u_1, \ldots, u_d]\!]$ de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$, muni d'une connexion logarithmique intégrable $\widetilde{\nabla}_Y : Y \to \oplus_{i=1}^d Y \frac{\mathrm{d}\, u_i}{t}$. Dans ce contexte, Faltings associe (*cf* [11]) un module de Higgs à la C_K-représentation résiduelle V/tV de G_R. Il s'agit d'un module M projectif de rang fini sur (une extension finie étale de) la complétion p-adique $\widehat{R\overline{K}}$ de $R\overline{K}$, muni d'une application $\widehat{R\overline{K}}$-linéaire $\theta\colon M \to M\widehat{\otimes}_R\Omega^1_{R/O_K}(-1)$ telle que $\theta \wedge \theta = 0$, appelée le champ de Higgs associé. Étant donnée une $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)$-représentation V de G_R, on montre que le module de Higgs associé à V/tV est la réduction modulo t de Y et que le champ de Higgs associé est le résidu en t de la connexion $\widetilde{\nabla}_Y$ (remarque 4.12). En particulier, on montre que ce champ de Higgs est nul si et seulement si Y est trivial, si et seulement si V est une représentation de de Rham géométrique (corollaire 6.6).

2. Notations et rappels

Définition 2.1. Soient G un groupe profini et B une $\mathbf{Q}_p$-algèbre topologique munie d'une action continue de G. Une *B-représentation de G* est un B module de type fini W muni d'une action semi-linéaire continue de G *i.e.* telle que

(1) $g(w_1 + w_2) = g(w_1) + g(w_2)$ pour $w_1, w_2 \in W$ et $g \in G$;

(2) $g(bw) = g(b)g(w)$ pour $w \in W$, $b \in B$ et $g \in G$.

On dit que W est libre (resp. projective) de rang n si elle l'est en tant que B-module. Soient W_1, W_2 deux B-représentations de G. On munit le B-module $W_1 \otimes_B W_2$ de la structure de B-représentation de G donnée par $g(w_1 \otimes w_2) = g(w_1) \otimes g(w_2)$. De même, on munit le B-module $\mathrm{Hom}_B(W_1, W_2)$ de la structure de B-représentation donnée par $g(f)(w) = g(f(g^{-1}w))$ pour tout $f \in \mathrm{Hom}_B(W_1, W_2)$ et $w \in W_1$. Un morphisme de W_1 dans W_2 est une application B-linéaire $f\colon W_1 \to W_2$ qui est G-équivariante. On note $\mathrm{Hom}_G(W_1, W_2) = \left(\mathrm{Hom}_B(W_1, W_2)\right)^G$ le groupe des morphismes de W_1 dans W_2. On dispose d'un objet unité : c'est B muni de l'action G.

On définit ainsi une catégorie qu'on note $\mathbf{Rep}_B(G)$. On note $\mathbf{Rep}_B^{\mathrm{l}}(G)$ (resp. $\mathbf{Rep}_B^{\mathrm{pr}}(G)$) la sous-catégorie pleine constituée des B-représentations qui sont libres (resp. projectives) de rang fini.

Remarque 2.2. Soient W une B-représentation libre de rang n et $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de W sur B. Pour $g \in G$, notons U_g la matrice dont le j-ième vecteur colonne est donné par les coordonnées de $g(e_j)$ dans la base $\mathfrak{B}$. Alors $U_g \in \mathsf{GL}_n(B)$ et $U\colon G \to \mathsf{GL}_n(B)$ est un cocycle continu. Réciproquement, la donnée d'un cocycle continu $U\colon G \to \mathsf{GL}_n(B)$ munit naturellement B^n d'une structure de B représentation de G. Ainsi, après le choix d'une base, la donnée d'un cocycle continu $U\colon G \to \mathsf{GL}_n(B)$ est équivalente à celle d'une structure de B-représentation de G. Par ailleurs, si on change de base, le cocycle obtenu est cohomologue au premier (le cobord étant donné par la matrice de changement de base de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}'$).

Nous allons travailler avec les anneaux considéres dans [1], [2], [7]. Soit K un corps de valuation discrète complet, de caractéristique 0, à corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$. On note v la valuation normalisée par $v(p) = 1$ et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Soit d un entier, $T_1, \ldots, T_d$

des indéterminées et $R^0 = \mathcal{O}_K\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\}$ le séparé complété de $\mathcal{O}_K[T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}]$ pour la topologie p-adique. On se donne un anneau $\widetilde{R}$ obtenu à partir de R^0 en itérant un nombre fini de fois les opérations suivantes :

(ét) complétion p-adique d'une extension étale ;
(loc) complétion p-adique d'une localisation ;
(comp) complétion par rapport à un idéal contenant p.

On suppose en outre que $\mathcal{O}_K\left[T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\right] \to \widetilde{R}$ est à fibres géométriquement régulières ou que $\widetilde{R}$ est de dimension de Krull inférieure à 2, et que $k \to \widetilde{R} \otimes_V k$ est géométriquement intègre. Il en résulte que $T_1, \dots, T_d$ est une p-base de $\widetilde{R} \otimes_{\mathcal{O}_K} k$. Dans ces conditions, le théorème de pureté de Faltings (*cf* [10]) s'applique.

Soit E une clôture algébrique de $\mathrm{Frac}(\widetilde{R})$ qui contient $\overline{K}$. On note $\mathscr{I}$ l'ensemble des sous-$\widetilde{R}$-algèbres finies normales S de E telles que $\widetilde{R}[p^{-1}] \subseteq S[p^{-1}]$ est étale. Soit $R \in \mathscr{I}$ tel que K est algébriquement clos dans $R[p^{-1}]$ (on peut toujours se ramener à ce cas en remplacant K par sa clôture algébrique dans $R[p^{-1}]$).

Remarque 2.3. Un schéma formel p-adique à bonne réduction sur $\mathcal{O}_K$ peut être recouvert par des spectres formels de tels anneaux. De même, l'anneau local complété en un point d'un tel schéma formel (par exemple $\mathrm{W}(k)[\![T]\!]$) est un anneau de ce type.

Cette classe d'anneaux permet aussi de considérer des cas de réduction semi stable : posons $\widetilde{R} = \mathrm{W}(k)[\![X]\!]$ et $R = \widetilde{R}[Z]/(Z^{p+1} - XZ + p)$. L'anneau R est local, d'idéal maximal $\mathfrak{m} = (X, Z)$. Si $Y = X - Z^p$, on a $R \simeq \mathrm{W}(k)[\![X]\!][Y, Z]/(Z^p + Y - X, YZ - p)$. La suite (Y, Z) est régulière : l'anneau R est régulier donc normal. Soit δ l'image de $(p+1)Z^p - X$ dans R. On a $Z\delta = (p+1)Z^{p+1} - XZ = pZ^{p+1} - p = p(Z^{p+1} - 1)$, de sorte que $R[p^{-1}]/\delta R[p^{-1}] = \widetilde{R}[Z]/(Z^{p+1} - 1, p + 1 - XZ) = 0$ vu que $p + 1 - XZ$ divise $X^{p+1} - (p+1)^{p+1}$ (dans R) et ce dernier est inversible dans $\widetilde{R}$. Cela implique que $R[p^{-1}]$ est étale sur $\widetilde{R}[p^{-1}]$. Enfin, l'anneau R est complet pour la topologie (X, p)-adique, donc pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique : on a $R \simeq \mathrm{W}(k)[\![Y, Z]\!]/(YZ - p)$.

On pose

$$\overline{R} = \bigcup_{S \in \mathscr{I}} S \qquad \widehat{\overline{R}} = \varprojlim_n \overline{R}/p^n \overline{R} \qquad C = \widehat{\overline{R}}[p^{-1}].$$

Ces anneaux sont munis d'une action continue (pour la topologie p-adique) de

$$\mathcal{G}_R := \mathrm{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right) = \pi_1\left(\mathrm{Spec}(R[p^{-1}]), \mathrm{Spec}(E)\right)$$

Soient :

- $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} \in \overline{R}^{\mathbf{N}}$ telle que $\varepsilon^{(0)} = 1$, $\varepsilon^{(1)} \neq 1$ et $(\varepsilon^{(n+1)})^p = \varepsilon^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
- $\widetilde{T}_i = (T_i^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} \in \overline{R}^{\mathbf{N}}$ telle que $T_i^{(0)} = T_i$ et $(T_i^{(n+1)})^p = T_i^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Si $S \in \mathscr{I}$ et $n \in \mathbf{N}$, on note S_n le normalisé de $S\left[\varepsilon^{(n)}, T_1^{(n)}, \dots, T_d^{(n)}\right]$ dans $\overline{R}$. On pose $S_\infty = \bigcup_n S_n$, $\mathcal{H}_S = \mathrm{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}], S_\infty[p^{-1}]\right)$ et $\Gamma_{S/R} = \mathcal{G}_R/\mathcal{H}_S = \mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$.

Lorsque $S = R$, on note Γ_R au lieu de $\Gamma_{R/R}$. On a la suite exacte

$$1 \to \widetilde{\Gamma}_R \to \Gamma_R \to \Gamma_K \to 1$$

où $\widetilde{\Gamma}_R$ s'identifie à un sous-groupe d'indice fini de $\bigoplus_{i=1}^d \mathbf{Z}_p\, \gamma_i$ où $\gamma_i \in \mathrm{Gal}(R_\infty[p^{-1}]/RK_\infty)$ est défini par

$$\gamma_i(T_j^{(n)}) = \begin{cases} \varepsilon^{(n)} T_i^{(n)} & \text{si } j = i \\ T_j^{(n)} & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Si $g \in \Gamma_R$ et $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_R$, on a $g\gamma g^{-1} = \gamma^{\chi(g)}$, de sorte que Γ_R n'est pas commutatif. Dans la suite, on notera γ_0 un générateur de la partie libre de $\mathrm{Gal}\left(R_\infty[p^{-1}]/R\left[T_1^{(\infty)}, \dots, T_d^{(\infty)}, p^{-1}\right]\right)$.

On dispose des versions géométriques de ces groupes. Pour $S \in \mathscr{I}$, on pose :

- $G_R = \mathrm{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}]/R\overline{K}\right)$;
- $H_S = \mathrm{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}]/S_\infty \overline{K}\right)$;

- $\widetilde{\Gamma}_{S/R} = \mathrm{Gal}\big(S_\infty\overline{K}/R\overline{K}\big)$.

Dans ce cadre, la théorie de Sen se généralise de la façon suivante :

Théorème 2.4. *(cf [2, Théorème 3.1 & Corollaire 3.14]) L'application naturelle*

$$\varinjlim_S \mathrm{H}^1(\Gamma_{S/R}, \mathsf{GL}_n(S_\infty[p^{-1}])) \to \mathrm{H}^1(\mathscr{G}_R, \mathsf{GL}_n(C))$$

(où la limite inductive est prise sur les $S \in \mathscr{I}$ tels que $S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est galoisienne) est bijective.

Le foncteur

$$\mathbf{Rep}^{\mathrm{pl}}_{R_\infty[p^{-1}]}(\Gamma_R) \to \mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_C(\mathscr{G}_R)$$
$$Y \mapsto C \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} Y$$

est une équivalence de catégories (où $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pl}}_{R_\infty[p^{-1}]}(\Gamma_R)$ désigne la sous-catégorie des $R_\infty[p^{-1}]$-représentations Y de Γ_R qui sont potentiellement libres, c'est-à-dire telles qu'il existe $S \in \mathscr{I}$ avec $S_\infty[p^{-1}] \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} Y$ libre sur $S_\infty[p^{-1}]$).

La version géométrique de l'énoncé précédent nous sera aussi utile.

Lemme 2.5. *Pour tout $S \in \mathscr{I}$, on a $\mathrm{H}^0(G_S, C) = \widehat{S\mathcal{O}_{\overline{K}}}[p^{-1}]$ (complété pour la topologie p-adique).*

Démonstration. C'est [3, Proposition 7.7] pour la représentation triviale. On raisonne alors comme dans [2, Corollaire 3.13] en utilisant [3, Lemma 7.9.3]. □

Dans la suite, si $S \in \mathscr{I}$ et $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_{n,\overline{K}} = \mathrm{H}^0(G_{S_n}, C) = \widehat{S_n\mathcal{O}_{\overline{K}}}[p^{-1}]$, et $S_{\infty,\overline{K}} = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} S_{n,\overline{K}}$.

Théorème 2.6. *L'application naturelle*

$$\varinjlim_S \mathrm{H}^1(\widetilde{\Gamma}_{S/R}, \mathsf{GL}_n(S_{\infty,\overline{K}})) \to \mathrm{H}^1(G_R, \mathsf{GL}_n(C))$$

(où la limite inductive est prise sur les $S \in \mathscr{I}$ tels que $S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est galoisienne) est bijective.

Le foncteur

$$\mathbf{Rep}^{\mathrm{pl}}_{R_{\infty,\overline{K}}}(\widetilde{\Gamma}_R) \to \mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_C(G_R)$$
$$Y \mapsto C \otimes_{R_{\infty,\overline{K}}} Y$$

est une équivalence de catégories (où $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pl}}_{R_{\infty,\overline{K}}}(\widetilde{\Gamma}_R)$ désigne la sous-catégorie des $R_{\infty,\overline{K}}$-représentations Y de $\widetilde{\Gamma}_R$ qui sont potentiellement libres, c'est-à-dire telles qu'il existe $S \in \mathscr{I}$ avec $S_{\infty,\overline{K}} \otimes_{R_{\infty,\overline{K}}} Y$ libre sur $S_{\infty,\overline{K}}$).

Démonstration. La preuve est analogue à celle du théorème 2.4, à cela près que [2, Corollaire 2.3] est appliqué à H_R au lieu de $\mathcal{H}_R$, et la décomplétion se fait par rapport aux variables $T_1, \ldots, T_d$, de sorte qu'on utilise que d familles de traces normalisées de Tate (*cf* [3, §7.9]). □

2.7. **Rappels sur l'anneau B_{dR} (*cf* [7]).**

Soit $\mathscr{R} = \varprojlim\limits_n \overline{R}/p\overline{R}$ (les morphismes de transition sont donnés par le Frobenius). C'est un anneau de caractéristique p muni d'une action de $\mathscr{G}_R$. Par l'argument habituel, on a

$$\mathscr{R} \simeq \left\{ (x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in \widehat{\overline{R}}^{\mathbf{N}},\ (\forall n \in \mathbf{N})\ (x^{(n+1)})^p = x^{(n)} \right\}$$

de sorte que les suites ε et $\widetilde{T}_i$ (pour $i \in \{1, \ldots, d\}$) choisies plus haut définissent des éléments de $\mathscr{R}$. On dispose de l'homomorphisme de $\mathrm{W}(k)$-algèbres

$$\theta\colon \mathrm{W}(\mathscr{R}) \to \widehat{\overline{R}}$$
$$(a_0, a_1, \ldots) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} p^n a_n^{(n)}$$

Il est surjectif, de noyau principal. Il induit un homomorphisme de R-algèbres

$$\theta_R\colon R \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{W}(\mathscr{R}) \to \widehat{\overline{R}}.$$

Définition 2.8.
- $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +} := \varprojlim_m \mathrm{W}(\mathscr{R})[p^{-1}]/\operatorname{Ker}(\theta)^m$;
- $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}} := \varprojlim_m (R \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{W}(\mathscr{R}))/\theta_R^{-1}\left(p\widehat{\overline{R}}\right)^m$;
- $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} := \varprojlim_m \mathrm{A}_{\mathrm{inf}}[p^{-1}]/\operatorname{Ker}(\theta_R)^m$.

Ce sont des anneaux munis d'une action de $\mathcal{G}_R$. Dans $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$, on dispose de l'élément

$$t = \log([\varepsilon]) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m}([\varepsilon]-1)^m.$$

Pour $g \in \mathcal{G}_R$, on a $g(t) = \chi(g)t$. On pose $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}[t^{-1}]$. Pour $i \in \{1, \ldots, d\}$, on note u_i l'image de $T_i \otimes 1 - 1 \otimes [\widetilde{T}_i]$ dans $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$. On filtre $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ en posant $\operatorname{Fil}^r(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}) = (\operatorname{Ker}(\theta_R)^r)$.

On munit $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} = \varprojlim_r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}/\operatorname{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ de la topologie de la limite projective, où chaque $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}/\operatorname{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ est muni de la topologie de Banach p-adique. On appelle *topologie naturelle* de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ la topologie ainsi définie. Dans ce qui suit, tous ses sous-anneaux sont munis de la topologie induite, et les ensembles de cohomologie qu'on considère dans la suite sont des ensembles de cohomologie continue pour cette topologie.

Dans la suite, les propriétés suivantes de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ et B_{dR} nous seront utiles.

Proposition 2.9. *(1) On a* $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \simeq \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}[\![u_1, \ldots, u_d]\!]$ *;*
(2) $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ *est une* $\overline{R}[p^{-1}]$*-algèbre, et* $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{G}_R} = R[p^{-1}]$ *;*
(3) le gradué de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ *est* $C[t, u_1, \ldots, u_d]$.

Pour $S \in \mathscr{I}$, posons

$$\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^{+}(S) = S_\infty[p^{-1}][\![t, u_1, \ldots, u_d]\!]$$

Il est clair que $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^{+}(S) \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+\mathcal{H}_S}$. On pose $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}(S) = \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^{+}(S)[t^{-1}]$.

On dispose aussi de versions géométriques de ces anneaux. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathbb{S}_n$ l'adhérence, pour la topologie naturelle, de $S_n\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}(\mathcal{O}_K)$ dans $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ et $\mathbb{S}_\infty := \cup_n \mathbb{S}_n$. On note $\mathbb{S}$ au lieu de $\mathbb{S}_0$. On note alors $\mathbb{S}_{\mathrm{dR}}$ l'adhérence de $\mathbb{S}_\infty$ dans $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ pour la topologie t-adique (pas pour la topologie naturelle). Lorsque $S = R$, on note ces anneaux $\mathbb{R}_n$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}$. On pose

$$\mathbb{l}_{\mathrm{dR}}^{+}(S) = \mathbb{S}_{\mathrm{dR}}[\![u_1, \ldots, u_d]\!]$$

On a $\mathbb{l}_{\mathrm{dR}}^{+}(S) \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+H_S}$. On pose $\mathbb{l}_{\mathrm{dR}}(S) = \mathbb{l}_{\mathrm{dR}}^{+}(S)[t^{-1}]$.

Définition 2.10. Si $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$, on pose $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) = \left(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V\right)^{\mathcal{G}_R}$. C'est un $R[p^{-1}]$-module, dont on peut montrer qu'il est projectif de rang fini $\leq \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ (*cf* [7, Proposition 8.3.1]), et l'homomorphisme

$$\alpha_{\mathrm{dR}}(V)\colon \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

est toujours injectif (*cf* [7, Proposition 8.2.4]). On dit que V est de de Rham lorsque c'est un isomorphisme. Cela définit une sous catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{G}_R)$ de la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$.

On a un concept analogue dans le cas géométrique.

Lemme 2.11. *On a* $\mathrm{H}^0(G_S, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+) = \mathbb{S}$.

Démonstration. Quitte à changer S, on peut supposer que $\widetilde{\Gamma}_S = p^{m_0} \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbf{Z}_p\, \gamma_i$. On a bien sûr une inclusion $\mathbb{S} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+G_S}$. Montrons que c'est un isomorphisme modulo $\mathrm{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ pour tout $r \in \mathbf{N}_{>0}$. On procède par récurrence, le cas $r = 1$ n'étant autre que le lemme 2.5. Supposons $r > 1$ et soit $y \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ / \mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ fixe sous G_S. Comme y est fixe sous G_S modulo $\mathrm{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$, il existe $y_0 \in \mathbb{S}$ tel que $z = y - y_0 \in \mathrm{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Notons $\overline{z}$ l'image de $y - y_0$ dans

$$\mathrm{Gr}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ = \bigoplus_{\substack{\underline{n} \in \mathbf{N}^d \\ |\underline{n}| \leq r}} C t^{r-|\underline{n}|} u^{\underline{n}}$$

où $u^{\underline{n}} = \prod_{i=1}^{d} u_i^{n_i}$ pour tout $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbf{N}^d$. Écrivons $\overline{z} = \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbf{N}^d \\ |\underline{n}| \leq r}} z_{\underline{n}} t^{r-|\underline{n}|} u^{\underline{n}}$. Comme $\overline{z}$ est invariant sous H_S, on a $z_{\underline{n}} \in C^{H_S}$ pour tout $\underline{n}$.

Soient $s \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $|\underline{n}| > s \Rightarrow z_{\underline{n}} = 0$ et $\underline{n} \in \mathbf{N}^d$ tel que $|\underline{n}| = s$. Montrons que $z_{\underline{n}} = 0$. Comme $s > 0$, il existe $i \in \{1, \ldots, d\}$ tel que $n_i > 0$. Posons $\lambda = p^{m_0}$, de sorte que $\gamma_i^\lambda \in \widetilde{\Gamma}_S$. Comme $\gamma_i^\lambda(u_i) = T_i - [\varepsilon]^\lambda [\widetilde{T}_i] = u_i + (1 - \exp(\lambda t))[\widetilde{T}_i] \equiv u_i - \lambda t T_i \mod \mathrm{Fil}^2 \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$, on a

$$\begin{aligned} \gamma_i^\lambda(t^{r-|\underline{n}|} u^{\underline{n}}) &= t^{r-|\underline{n}|} (u_i - \lambda t T_i)^{n_i} \prod_{j \neq i} u_j^{n_j} \\ &= \sum_{j=0}^{n_i} \binom{n_i}{j} (-\lambda T_j)^j t^{r-|\underline{n}|+j} u^{\underline{n} - j \underline{e}_i} \end{aligned}$$

dans $\mathrm{Gr}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (où $\underline{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, le 1 étant à la i-ème coordonnée), d'où

$$\left(\gamma_i^\lambda - 1\right)(t^{r-|\underline{n}|} u^{\underline{n}}) = \sum_{j=1}^{n_i} \binom{n_i}{j} (-\lambda T_j)^j t^{r-|\underline{n}|+j} u^{\underline{n} - j \underline{e}_i}$$

Si $\underline{m} \in \mathbf{N}^d$, le coefficient de $t^{r-|\underline{m}|} u^{\underline{m}}$ de

$$\left(\gamma_i^\lambda - 1\right)(\overline{z}) = \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbf{N}^d \\ |\underline{n}| \leq r}} \gamma_i^\lambda(z_{\underline{n}}) \left(\gamma_i^\lambda - 1\right)(t^{r-|\underline{n}|} u^{\underline{n}}) + \left(\gamma_i^\lambda - 1\right)(z_{\underline{n}}) t^{r-|\underline{n}|} u^{\underline{n}}$$

est donc

$$\left(\gamma_i^\lambda - 1\right)(z_{\underline{m}}) + \sum_{j=1}^{s-|\underline{m}|} \binom{m_i + j}{j} (-\lambda T_i)^j \gamma_i^\lambda(z_{\underline{m} + j \underline{e}_i})$$

(la somme s'arrête à $j = s - |\underline{m}|$ car $j > s - |\underline{m}| \Rightarrow |\underline{m} + j \underline{e}_i| > s \Rightarrow z_{\underline{m} + j \underline{e}_i} = 0$). Mais comme $\overline{z}$ est invariant sous G_S, ce coefficient est nul.

Pour $\underline{m} = \underline{n}$, on tire $\left(\gamma_i^\lambda - 1\right)(z_{\underline{n}}) = 0$ *i.e.* $z_{\underline{n}} \in \left(C^{H_S}\right)^{\gamma_i^\lambda = 1}$. Pour $\underline{m} = \underline{n} - \underline{e}_i$, on tire $\left(\gamma_i^\lambda - 1\right)(z_{\underline{n} - \underline{e}_i}) - n_i \lambda T_i \gamma_i^\lambda(z_{\underline{n}}) = 0$ et donc

$$z_{\underline{n}} = \frac{1}{n_i \lambda T_i} \left(\gamma_i^\lambda - 1\right)(z_{\underline{n} - \underline{e}_i}) \in \left(\gamma_i^\lambda - 1\right)\left(C^{H_S}\right)$$

Mais $C^{H_S} = \left(C^{H_S}\right)^{\gamma_i^\lambda = 1} \oplus \left(\gamma_i^\lambda - 1\right)\left(C^{H_S}\right)$ d'après [2, Proposition 3.11] : on a donc $z_{\underline{n}} = 0$, ce qu'on voulait.

Par récurrence, on a donc $z_{\underline{n}} = 0$ dès que $\underline{n} \neq \underline{0}$: on a $\overline{z} = z_{\underline{0}} t^r$, avec $z_{\underline{0}} \in C^{G_S} = \widehat{S\mathcal{O}_{\overline{K}}}[p^{-1}]$ (*cf* lemme 2.5) et on a fini. □

Si $V \in \mathbf{Rep}_{\mathrm{B_{dR}}(\mathcal{O}_K)}(G_R)$ on pose $\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(V) = \left(\mathrm{B_{dR}} \otimes_{\mathrm{B_{dR}}(\mathcal{O}_K)} V\right)^{G_R}$. C'est un $\mathbb{R}[t^{-1}]$-module. Comme $\mathrm{B_{dR}}$ est muni d'une filtration et d'une connexion intégrable $\mathrm{B_{dR}} \to \mathrm{B_{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} \widehat{\Omega}_R$ qui commute à l'action de $\mathcal{G}_R$ (où $\widehat{\Omega}_R = \bigoplus_{i=1}^{d} R[p^{-1}]\,\mathrm{d}\,T_i$ est le module des différentielles continues de $R[p^{-1}]$), le $\mathbb{R}[t^{-1}]$-module $\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ hérite d'une filtration et d'une connexion intégrable $\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to \mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{R[p^{-1}]} \widehat{\Omega}_R$. On dispose d'un homomorphisme

$$\alpha_{\mathrm{dR}}(V)\colon\ \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{R}[t^{-1}]} \mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)} V$$

On dit que V est de de Rham géométrique lorsque c'est un isomorphisme. Cela définit une sous catégorie $\mathbf{Rep}^{\mathrm{geom}}_{\mathrm{dR}}(G_R)$ de la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)}(G_R)$.

Lorsque $V \in \mathbf{Rep}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)}(G_R)$ on pose $\mathbb{D}^+_{\mathrm{dR}}(V) = \left(\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)} V\right)^{G_R}$. C'est un $\mathbb{R}$-module muni d'une filtration et d'une connexion intégrable $\mathbb{D}^+_{\mathrm{dR}}(V) \to \mathbb{D}^+_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{R[p^{-1}]} \widehat{\Omega}_R$. Comme t est invariant sous G_R, on a $\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(V[t^{-1}]) = \mathbb{D}^+_{\mathrm{dR}}(V)[t^{-1}]$.

3. Théorie de Sen des $\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$-représentations

Dans cette section, on généralise [13, §3], qu'on suit assez fidèlement.

3.1. Étude des $\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$-représentations libres de $\mathcal{H}_R$ et de H_R.

Si $S \in \mathscr{I}$, on pose

$$\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S) = \mathrm{H}^0\big(\mathcal{H}_S, \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\big) \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}(S) = \mathrm{H}^0\big(\mathcal{H}_S, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big)$$
$$\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}(S) = \mathrm{H}^0\big(H_S, \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\big) \quad \text{et} \quad \mathbb{L}_{\mathrm{dR}}(S) = \mathrm{H}^0\big(H_S, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big)$$

Remarquons qu'on a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S) &:= S_\infty[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!] \subseteq \mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)\\
\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}(S) &:= S_\infty[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!][t^{-1}] \subseteq \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}(S)\\
\mathbb{l}^+_{\mathrm{dR}}(S) &:= \mathbb{S}_{\mathrm{dR}}[\![u_1, \ldots, u_d]\!] \subseteq \mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)\\
\mathbb{l}_{\mathrm{dR}}(S) &:= \mathbb{S}_{\mathrm{dR}}[\![u_1, \ldots, u_d]\!][t^{-1}] \subseteq \mathbb{L}_{\mathrm{dR}}(S)
\end{aligned}$$

Pour alléger les notations, on notera parfois $\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}$, L_{dR}, $\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}$ et l_{dR} au lieu de $\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(R)$, $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}(R)$, $\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(R)$ et $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}(R)$. Idem avec les anneaux « géométriques ».

Rappelons (*cf* [7, §5.2]) que l'anneau B_{dR} est muni d'une filtration $\big(\mathrm{Fil}^r\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big)_{r\in\mathbf{Z}}$ décroissante séparée et exhaustive. Elle induit une filtration décroissante séparée et exhaustive sur les sous-anneaux $\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S) \subseteq \mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S) \subseteq \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$.

Lemme 3.2. *Pour tout $r \in \mathbf{N}$, on a des isomorphismes naturels*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sym}^r_{S_\infty[p^{-1}]}\big(S_\infty[p^{-1}]u_1 \oplus \cdots \oplus S_\infty[p^{-1}]u_d \oplus S_\infty[p^{-1}]t\big) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Gr}^r\,\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S) \arrow[d, hook]\\
\mathrm{Sym}^r_{\widehat{S}_\infty[p^{-1}]}\big(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]u_1 \oplus \cdots \oplus \widehat{S}_\infty[p^{-1}]u_d \oplus \widehat{S}_\infty[p^{-1}]t\big) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Gr}^r\,\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S) \arrow[d, hook]\\
\mathrm{Sym}^r_C\big(Cu_1 \oplus \cdots \oplus C[p^{-1}]u_d \oplus Ct\big) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Gr}^r\,\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sym}^r_{S_{\infty,\overline{K}}}\big(S_{\infty,\overline{K}}u_1 \oplus \cdots \oplus S_{\infty,\overline{K}}u_d \oplus S_{\infty,\overline{K}}t\big) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Gr}^r\,\mathbb{l}^+_{\mathrm{dR}}(S) \arrow[d, hook]\\
\mathrm{Sym}^r_{\widehat{S}_{\infty,\overline{K}}}\big(\widehat{S}_{\infty,\overline{K}}u_1 \oplus \cdots \oplus \widehat{S}_{\infty,\overline{K}}u_d \oplus \widehat{S}_{\infty,\overline{K}}t\big) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Gr}^r\,\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}(S) \arrow[d, hook]\\
\mathrm{Sym}^r_C\big(Cu_1 \oplus \cdots \oplus C[p^{-1}]u_d \oplus Ct\big) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Gr}^r\,\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}
\end{tikzcd}$$

en outre, les extensions

$$\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)/\operatorname{Fil}^r \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S) \to \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)/\operatorname{Fil}^r \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S) \quad \textit{et} \quad \mathbb{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)/\operatorname{Fil}^r \mathbb{l}_{\mathrm{dR}}^+(S) \to \mathbb{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)/\operatorname{Fil}^r \mathbb{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$$

sont fidèlement plates.

Démonstration. La filtration sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$ (resp. sur $\mathbb{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$) n'est autre que la filtration $(u_1, \ldots, u_d, t)$-adique : la flèche du haut est un isomorphisme. Par ailleurs, celle du bas en est un d'après [7, Proposition 5.2.5]. Montrons que c'est aussi le cas de celle du milieu.

De la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to \operatorname{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to \operatorname{Gr}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to 0$$

on tire la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S) \to \operatorname{Fil}^r \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S) \to \mathrm{H}^0\big(\mathcal{H}_S, \operatorname{Gr}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big) \to \mathrm{H}^1\big(\mathcal{H}_S, \operatorname{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big)$$

Mais $\mathrm{H}^1\big(\mathcal{H}_S, \operatorname{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big) = \{0\}$ et $\mathrm{H}^1\big(H_S, \operatorname{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big) = \{0\}$ parce que $\mathrm{H}^1\big(\mathcal{H}_S, \operatorname{Gr}^s \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big) = \{0\}$ et $\mathrm{H}^1\big(H_S, \operatorname{Gr}^s \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big) = \{0\}$ [3, Prop 7.4 & 7.9.2] pour tout $s \geq r$ et parce que $\big(\operatorname{Fil}^r \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)/\operatorname{Fil}^s \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)\big)_{s>r}$ a la propriété de Mittag-Leffler (*cf* [19, Proposition 2.2]). On a donc

$$\operatorname{Gr}^r \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0\big(\mathcal{H}_S, \operatorname{Gr}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big).$$

L'action de $\mathcal{H}_S$ et de H_S étant triviale sur $u_1, \ldots, u_d$ et t, on a fini. La dernière assertion résulte de la fidèle platitude des extensions $S_\infty[p^{-1}] \to \widetilde{S}_\infty[p^{-1}]$ et $S_{\infty,\overline{K}}[p^{-1}] \to \widetilde{S}_{\infty,\overline{K}}[p^{-1}]$, et de [16, Theorem 22.3]. $\square$

Proposition 3.3. *Les extensions*

$$\begin{array}{ll} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(R) \subseteq \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S), & \mathbb{l}_{\mathrm{dR}}^+(R) \subseteq \mathbb{l}_{\mathrm{dR}}^+(S) \\ \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}(R) \subseteq \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}(S), & \mathbb{l}_{\mathrm{dR}}(R) \subseteq \mathbb{l}_{\mathrm{dR}}(S) \\ \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(R) \subseteq \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S), & \mathbb{L}_{\mathrm{dR}}^+(R) \subseteq \mathbb{L}_{\mathrm{dR}}^+(S) \\ \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}(R) \subseteq \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}(S), & \mathbb{L}_{\mathrm{dR}}(R) \subseteq \mathbb{L}_{\mathrm{dR}}(S) \end{array}$$

sont finies étales. Elles sont galoisiennes de groupe $\operatorname{Gal}(S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}])$ *(resp.* $\operatorname{Gal}(S_{\infty,\overline{K}}/R_{\infty,\overline{K}})$*) si* $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ *(resp.* $S_{\infty,\overline{K}}/R_{\infty,\overline{K}}$*) est galoisienne.*

Démonstration. Soit $r \in \mathbf{N}$. On a

$$\widehat{S}_\infty[p^{-1}] \otimes_{\widehat{R}_\infty[p^{-1}]} \operatorname{Gr}^r \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(R) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Gr}^r \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S), \quad \widehat{S}_{\infty,\overline{K}} \otimes_{\widehat{R}_{\infty,\overline{K}}} \operatorname{Gr}^r \mathbb{L}_{\mathrm{dR}}^+(R) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Gr}^r \mathbb{L}_{\mathrm{dR}}^+(S).$$

d'après le lemme 3.2. Mais on a $\widehat{S}_\infty[p^{-1}] \simeq S_\infty[p^{-1}] \otimes_{R_\infty} \widehat{R}_\infty$ et de même $\widehat{S}_{\infty,\overline{K}} \simeq S_{\infty,\overline{K}} \otimes_{R_{\infty,\overline{K}}} \widehat{R}_{\infty,\overline{K}}$ (*cf* [1, Corollary 3.11]). On en déduit les isomorphismes

$$S_\infty[p^{-1}] \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} \operatorname{Gr}^r \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(R) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Gr}^r \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S), \quad S_{\infty,\overline{K}} \otimes_{R_{\infty,\overline{K}}} \operatorname{Gr}^r \mathbb{L}_{\mathrm{dR}}^+(R) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Gr}^r \mathbb{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$$

Étant des isomorphismes sur les gradués, les morphismes d'anneaux

$$S_\infty[p^{-1}] \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(R_\infty) \to \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S), \quad S_{\infty,\overline{K}} \otimes_{R_{\infty,\overline{K}}} \mathbb{L}_{\mathrm{dR}}^+(R_\infty) \to \mathbb{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$$

sont des isomorphismes. Il en est évidement de même des morphismes

$$S_\infty[p^{-1}] \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(R) \to \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S), \quad S_{\infty,\overline{K}} \otimes_{R_{\infty,\overline{K}}} \mathbb{l}_{\mathrm{dR}}^+(R) \to \mathbb{l}_{\mathrm{dR}}^+(S).$$

Les extensions $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(R) \subseteq \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$, $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(R) \subseteq \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$, $\mathbb{l}_{\mathrm{dR}}^+(R) \subseteq \mathbb{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$ et $\mathbb{L}_{\mathrm{dR}}^+(R) \subseteq \mathbb{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$ sont donc étales par changement de base, galoisiennes si $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ (resp. $S_{\infty,\overline{K}}/R_{\infty,\overline{K}}$) l'est, de même groupe de Galois. Les énoncés analogues pour les extensions $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}(R) \subseteq \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}(S)$, $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}(R) \subseteq \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}(S)$, $\mathbb{l}_{\mathrm{dR}}(R) \subseteq \mathbb{l}_{\mathrm{dR}}(S)$ et $\mathbb{L}_{\mathrm{dR}}(R) \subseteq \mathbb{L}_{\mathrm{dR}}(S)$ s'en déduisent par localisation. $\square$

Proposition 3.4. *On a*

$$\varinjlim_{S_\infty} \mathrm{H}^1\big(\operatorname{Gal}(S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]), \mathsf{GL}_n(\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S))\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1\big(\mathcal{H}_R, \mathsf{GL}_n(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)\big)$$

$$\textit{et} \quad \varinjlim_{S_{\infty,\overline{K}}} \mathrm{H}^1\big(\operatorname{Gal}(S_{\infty,\overline{K}}/R_{\infty,\overline{K}}), \mathsf{GL}_n(\mathbb{L}_{\mathrm{dR}}^+(S))\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1\big(H_R, \mathsf{GL}_n(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)\big)$$

Démonstration. Comme ce sont des limites inductives d'applications d'inflation, elles sont injectives. Soit $g \mapsto U_g$ un cocycle continu $\mathcal{H}_R \to \mathsf{GL}_n(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)$. L'application $g \mapsto \theta(U_g)$ est alors un cocycle continu $\mathcal{H}_R \to \mathsf{GL}_n(C)$. D'après [2, Proposition 3.6], il existe une sous-R-algèbre finie S de $\overline{R}$ telle que $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est étale galoisienne, et telle que le cocycle $(\theta \circ U)_{|\mathcal{H}_S}$ a une classe de cohomologie triviale. Il existe donc $B_0 \in \mathsf{GL}_n(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ tel que si U_0 est le cocycle $\mathcal{H}_R \to \mathsf{GL}_n(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ défini par $U_{0,g} = B_0^{-1}U_g g(B_0)$, on a $\theta(U_{0,g}) = \mathrm{I}_n$ pour tout $g \in \mathcal{H}_S$.

Soit $M \in \mathbf{N}_{>0}$. Supposons construites des suites $(B_m)_{0\leq m<M}$ et $(U_m)_{0\leq m<M}$ où

(1) $B_m \in \mathrm{I}_n + \mathsf{M}_n(\mathrm{Ker}(\theta)^m)$ et U_m est un cocycle continu à valeurs dans $\mathsf{GL}_n(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ pour $0 \leq m < M$;
(2) $U_{m,g} = B_m^{-1}U_{m-1,g}g(B_m)$ pour tout $g \in \mathcal{H}_S$ et $1 \leq m < M$;
(3) $U_{m,g} \in \mathrm{I}_n + \mathsf{M}_n(\mathrm{Ker}(\theta)^{m+1})$ pour $0 \leq m < M$ pour tout $g \in \mathcal{H}_S$.

Notons $V_{M,g}$ l'image de $U_{M-1,g} - \mathrm{I}_n$ dans $\mathsf{M}_n(\mathrm{Ker}(\theta)^M)/\,\mathsf{M}_n(\mathrm{Ker}(\theta)^{M+1})$. Pour $g, h \in \mathcal{H}_S$, on a

$$\begin{aligned} U_{M-1,gh} - \mathrm{I}_n &= U_{M-1,g}g(U_{M-1,h}) - \mathrm{I}_n \\ &= \big(U_{M-1,g} - \mathrm{I}_n\big)g(U_{M-1,h}) + g\big(U_{M-1,h} - \mathrm{I}_n\big) \\ &\equiv \big(U_{M-1,g} - \mathrm{I}_n\big) + g\big(U_{M-1,h} - \mathrm{I}_n\big) \mod \mathsf{M}_n(\mathrm{Ker}(\theta)^{M+1}) \end{aligned}$$

vu que $U_{M-1,g}, U_{M-1,h} \equiv \mathrm{I}_n \mod \mathsf{M}_n(\mathrm{Ker}(\theta)^M)$ et $M > 0$. On a donc $V_{M,gh} = V_{M,g} + g(V_{M,h})$ et $g \mapsto V_{M,g}$ est un cocycle continu $\mathcal{H}_S \to \mathsf{M}_n\big(\mathrm{Gr}^M \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big)$. Comme $\mathrm{Gr}^M \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ = \mathrm{Sym}_C^M\big(\mathrm{Gr}^1 \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big)$ est un C module libre de rang fini, et comme $\mathrm{H}^1\big(\mathcal{H}_S, C\big) = \{0\}$ ([7, Proposition 3.1.1]), le cocycle V_M a une classe de cohomologie triviale : il existe $B_M \in \mathrm{I}_n + \mathsf{M}_n(\mathrm{Ker}(\theta)^M)$ telle que si U_M est le cocycle $\mathcal{H}_R \to \mathsf{GL}_n(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ défini par $U_{M,g} = B_M^{-1}U_{M-1,g}g(B_M)$, on a $U_{M,g} \in \mathrm{I}_n + \mathsf{M}_n(\mathrm{Ker}(\theta)^{M+1})$ pour tout $g \in \mathcal{H}_S$.

Les suites $(B_m)_{m\in\mathbf{N}}$ et $(U_m)_{m\in\mathbf{N}}$ étant construites, on pose $B = B_0B_1B_2\cdots$. Le produit infini converge dans $\mathsf{GL}_n(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ grâce à la propriété (1). Par ailleurs, on a $B^{-1}U_g g(B) = I_n$ pour tout $g \in \mathcal{H}_S$ en vertu des propriétés (2) et (3). Ainsi U a une image triviale dans $\mathrm{H}^1\big(\mathcal{H}_S, \mathsf{GL}_n(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)\big)$. Comme on a la suite exacte d'inflation-restriction

$$\{1\} \to \mathrm{H}^1\big(\mathrm{Gal}(S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]), \mathsf{GL}_n(\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S))\big) \to \mathrm{H}^1\big(\mathcal{H}_R, \mathsf{GL}_n(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)\big) \to \mathrm{H}^1\big(\mathcal{H}_S, \mathsf{GL}_n(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)\big)$$

cela implique que U provient d'un élément de $\mathrm{H}^1\big(\mathrm{Gal}(S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]), \mathsf{GL}_n(\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S))\big)$ par inflation. Ceci prouve la surjectivité de la première application.

Dans le cas géométrique on procède de la même manière. L'analogue de [2, Proposition 3.6] est déduit de façon formelle de la théorie de Tate-Sen géométrique pour C (*cf* [2, Cor. 2.3]). Le fait que les conditions de Tate-Sen sont satisfaites dans ce cas est montré dans [3, §7]. Le fait que $\mathrm{H}^1\big(H_S, C\big) = \{0\}$ est prouvé dans [3, Prop. 7.4]. □

Corollaire 3.5. *Si W est une $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-représentation libre de rang n de $\mathcal{H}_R$ (resp. H_R), alors $W^{\mathcal{H}_R}$ (resp. W^{H_R}) est un $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+$-module (resp. un $\mathbb{L}_{\mathrm{dR}}^+$-module) projectif de rang n, et on a*

$$\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+} W^{\mathcal{H}_R} \xrightarrow{\sim} W \qquad (\textit{resp.} \quad \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{L}_{\mathrm{dR}}^+} W^{H_R} \xrightarrow{\sim} W)$$

en tant que $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-représentations de $\mathcal{H}_R$ (resp. de H_R).

Démonstration. D'après la proposition 3.4, il existe une sous-R-algèbre finie S de $\overline{R}$ telle que $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ (resp. $S_{\overline{K}}/R_{\overline{K}}$) est étale galoisienne, et une base $\mathfrak{B}$ de W sur $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ fixe sous l'action de $\mathcal{H}_S$ (resp. H_S). Le $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$-module (resp. $\mathbb{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$-module) $W^{\mathcal{H}_S}$ (resp. W^{H_S}) est donc libre et $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)} W^{\mathcal{H}_S} \xrightarrow{\sim} W$ (resp. $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)} W^{H_S} \xrightarrow{\sim} W$) en tant que $\mathcal{H}_S$-modules (resp. H_S-modules). On conclut alors par descente galoisienne, vu que l'extension $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+ \subseteq \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$ (resp. $\mathbb{L}_{\mathrm{dR}}^+ \subseteq \mathbb{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$) est finie étale galoisienne en vertu de la proposition 3.3. □

Corollaire 3.6. *Soient W_1, W_2 deux $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-représentations libres de rang fini de $\mathcal{H}_R$ (resp. de H_R), alors*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+}(\mathcal{H}_R)}(W_1, W_2) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+}(W_1^{\mathcal{H}_R}, W_2^{\mathcal{H}_R})$$

$$(\textit{resp.} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+}(H_R)}(W_1, W_2) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{L}_{\mathrm{dR}}^+}(W_1^{H_R}, W_2^{H_R}))$$

et $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Rep}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(\mathcal{H}_R)}(W_1,W_2)=\{0\}$ *(resp.* $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Rep}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(H_R)}(W_1,W_2)=\{0\}$*).*

Démonstration. Traitons le cas des $\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$-représentations de $\mathcal{H}_R$, celui des $\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$-représentations de H_R se traitant de la même manière. D'après le corollaire 3.5, on a $W_j=\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}}W_j^{\mathcal{H}_R}$ pour $j\in\{1,2\}$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(W_1,W_2)&=\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}}W_1^{\mathcal{H}_R},\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}}W_2^{\mathcal{H}_R})\\&=\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}}\mathrm{Hom}_{\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}}(W_1^{\mathcal{H}_R},W_2^{\mathcal{H}_R})\end{aligned}$$

en tant que $\mathcal{H}_R$-modules. En prenant les invariants sous $\mathcal{H}_R$, on a bien

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(\mathcal{H}_R)}(W_1,W_2)=\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(W_1,W_2)^{\mathcal{H}_R}=\mathrm{Hom}_{\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}}(W_1^{\mathcal{H}_R},W_2^{\mathcal{H}_R}).$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Rep}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(\mathcal{H}_R)}(W_1,W_2)&\simeq\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Rep}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(\mathcal{H}_R)}(\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}},\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(W_1,W_2))\\&\simeq\mathrm{H}^1\big(\mathcal{H}_R,\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(W_1,W_2)\big)\end{aligned}$$

(*cf* [13, §2.1]). On a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(W_1,W_2)\simeq\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}}\mathrm{Hom}_{\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}}(W_1^{\mathcal{H}_R},W_2^{\mathcal{H}_R})$ en tant que $\mathcal{H}_R$-modules, et le $\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}$-module $\mathrm{Hom}_{\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}}(W_1^{\mathcal{H}_R},W_2^{\mathcal{H}_R})$ est projectif de type fini. Comme $\mathrm{H}^1\big(\mathcal{H}_R,\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\big)=\{0\}$ (car $\mathrm{H}^1\big(\mathcal{H}_R,C\big)=\{0\}$, *cf* [7, Proposition 3.1.1]), on a bien $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Rep}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(\mathcal{H}_R)}(W_1,W_2)=\{0\}$. □

Définition 3.7. Notons $\mathbf{Mod}_{\mathrm{pl}}(\mathrm{L}_{\mathrm{dR}})$ (resp. $\mathbf{Mod}_{\mathrm{pl}}(\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}})$) la catégorie des L_{dR}-modules (resp. $\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}$-modules) *potentiellement libres*, c'est-à-dire des modules M tels qu'il existe une sous-R-algèbre finie S de $\overline{R}$ telle que $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est étale galoisienne et $M\otimes_{\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}}\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}(S)$ (resp. $M\otimes_{\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}}\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)$) est libre de rang fini sur $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}(S)$ (resp. $\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)$). On définit de la même façon les notions de l_{dR}-modules, de $\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}$-modules, de $\mathbb{L}_{\mathrm{dR}}$-modules, de $\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}$-modules, de $\mathbb{l}_{\mathrm{dR}}$-modules et de $\mathbb{l}^+_{\mathrm{dR}}$-modules potentiellement libres, ainsi que les catégories $\mathbf{Mod}_{\mathrm{pl}}(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}})$, $\mathbf{Mod}_{\mathrm{pl}}(\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}})$, $\mathbf{Mod}_{\mathrm{pl}}(\mathbb{L}_{\mathrm{dR}})$ $\mathbf{Mod}_{\mathrm{pl}}(\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}})$, $\mathbf{Mod}_{\mathrm{pl}}(\mathbb{l}_{\mathrm{dR}})$ et $\mathbf{Mod}_{\mathrm{pl}}(\mathbb{l}^+_{\mathrm{dR}})$ correspondantes.

On pose $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pl}}_{\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}}(\Gamma_R)=\mathbf{Rep}_{\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}}(\Gamma_R)\cap\mathbf{Mod}_{\mathrm{pl}}(\mathrm{L}_{\mathrm{dR}})$ et $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pl}}_{\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}}(\Gamma_R)=\mathbf{Rep}_{\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}}(\Gamma_R)\cap\mathbf{Mod}_{\mathrm{pl}}(\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}})$. On pose $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pl}}_{\mathbb{L}_{\mathrm{dR}}}(\widetilde{\Gamma}_R)=\mathbf{Rep}_{\mathbb{L}_{\mathrm{dR}}}(\widetilde{\Gamma}_R)\cap\mathbf{Mod}_{\mathrm{pl}}(\mathbb{L}_{\mathrm{dR}})$ et $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pl}}_{\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}}(\widetilde{\Gamma}_R)=\mathbf{Rep}_{\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}}(\widetilde{\Gamma}_R)\cap\mathbf{Mod}_{\mathrm{pl}}(\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}})$, et on définit de façon analogue les catégories $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pl}}_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}}(\Gamma_R)$ et $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pl}}_{\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}}(\Gamma_R)$ (resp. $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pl}}_{\mathbb{l}_{\mathrm{dR}}}(\widetilde{\Gamma}_R)$ et $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pl}}_{\mathbb{l}^+_{\mathrm{dR}}}(\widetilde{\Gamma}_R)$).

Corollaire 3.8. *Les foncteurs*

$$\begin{aligned}&\mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(\mathcal{H}_R)\to\mathbf{Mod}_{\mathrm{pl}}(\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}), &&\textit{resp.}\quad \mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(H_R)\to\mathbf{Mod}_{\mathrm{pl}}(\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}})\\&\mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(\mathcal{G}_R)\to\mathbf{Rep}^{\mathrm{pl}}_{\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}}(\Gamma_R), &&\textit{resp.}\quad \mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(G_R)\to\mathbf{Rep}^{\mathrm{pl}}_{\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}}(\widetilde{\Gamma}_R)\\&W\mapsto W^{\mathcal{H}_R}, &&\textit{resp.}\quad W\mapsto W^{H_R}\end{aligned}$$

sont des équivalences de catégories.

Définition 3.9. (1) Si M est un B_{dR}-module (resp. un L_{dR}-module, resp. un l_{dR}-module) libre de rang fini, un *réseau* de M est un sous-$\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$-module (resp. un sous-$\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}$-module, resp. un sous-$\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}$-module) de M engendré par une base de M.

(2) On note $\mathbf{Rep}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}}(\mathcal{H}_R)$ (resp. $\mathbf{Rep}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}}(\mathcal{G}_R)$) la catégorie $\mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(\mathcal{H}_R)$ (resp. $\mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(\mathcal{G}_R)$) à isogénies près, c'est-à-dire la catégorie dont les objets, appelés *représentations régulières*, sont les B_{dR}-modules libres de rang fini, munis d'une action de $\mathcal{H}_R$ (resp. $\mathcal{G}_R$), qui contiennent un réseau stable par $\mathcal{H}_R$ (resp. $\mathcal{G}_R$), de sorte que la restriction de l'action de $\mathcal{H}_R$ (resp. $\mathcal{G}_R$) à ce réseau définit un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(\mathcal{H}_R)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(\mathcal{G}_R)$). De même, on note $\mathbf{Rep}^{\mathrm{reg,pl}}_{\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}}(\Gamma_R)$ la catégorie $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pl}}_{\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}}(\Gamma_R)$ à isogénies près.

(3) On note $\mathbf{Mod}_{\mathrm{reg,pl}}(\mathrm{L}_{\mathrm{dR}})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mod}_{\mathrm{pl}}(\mathrm{L}_{\mathrm{dR}})$ constituée des L_{dR}-modules M qui contiennent un sous-$\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^{+}$-module $\mathcal{M}$ tel qu'il existe une sous-R-algèbre finie S de $\overline{R}$ telle que $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est étale galoisienne et $\mathcal{M}\otimes_{\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^{+}}\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^{+}(S)$ est un réseau de $M\otimes_{\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}}\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}(S)$.

(4) On définit de façon analogue les catégories $\mathbf{Mod}_{\mathrm{reg,pl}}(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}})$, $\mathbf{Rep}_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}}^{\mathrm{reg,pl}}(\Gamma_R)$, $\mathbf{Mod}_{\mathrm{reg,pl}}(\mathbb{L}_{\mathrm{dR}})$, $\mathbf{Rep}_{\mathbb{L}_{\mathrm{dR}}}^{\mathrm{reg,pl}}(\widetilde{\Gamma}_R)$, $\mathbf{Mod}_{\mathrm{reg,pl}}(\mathbb{l}_{\mathrm{dR}})$ et $\mathbf{Rep}_{\mathbb{l}_{\mathrm{dR}}}^{\mathrm{reg,pl}}(\widetilde{\Gamma}_R)$.

Corollaire 3.10. *Les foncteurs*

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{Rep}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}}^{\mathrm{reg}}(\mathcal{H}_R)\to\mathbf{Mod}_{\mathrm{reg,pl}}(\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}), & \textit{resp.} & \mathbf{Rep}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}}^{\mathrm{reg}}(H_R)\to\mathbf{Mod}_{\mathrm{reg,pl}}(\mathbb{L}_{\mathrm{dR}}) \\ \mathbf{Rep}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}}^{\mathrm{reg}}(\mathcal{G}_R)\to\mathbf{Rep}_{\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}}^{\mathrm{reg,pl}}(\Gamma_R), & \textit{resp.} & \mathbf{Rep}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}}^{\mathrm{reg}}(G_R)\to\mathbf{Rep}_{\mathbb{L}_{\mathrm{dR}}}^{\mathrm{reg,pl}}(\widetilde{\Gamma}_R) \\ W\mapsto W^{\mathcal{H}_R}, & & \textit{resp.}\quad W\mapsto W^{H_R} \end{array}$$

sont des équivalences de catégories.

3.11. **Étude des $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^{+}$-représentations libres de $\Gamma_{S/R}$.**

Dans cette partie, on fixe S une sous-R-algèbre finie de $\overline{R}$ telle que $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est étale galoisienne. On veut montrer qu'on peut « décompléter » les $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^{+}$-représentations libres de $\Gamma_{S/R}$ (*cf* proposition 3.19). La stratégie naturelle serait d'appliquer le formalisme de Tate-Sen (*cf* [2, §2]) aux anneaux $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}/\operatorname{Fil}^r\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ pour $r\in\mathbf{N}_{>0}$. Cela nécessiterait de construire une pseudo-valuation sur chacun des anneaux $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}/\operatorname{Fil}^r\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$, qui définit la topologie naturelle, ainsi que des familles de projecteurs $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^{+}/\operatorname{Fil}^r\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^{+}\to\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^{+}/\operatorname{Fil}^r\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^{+}$ et de vérifier les axiomes (TS1), (TS2) et (TS3) de *loc. cit.* Ici, on préfère, comme le fait Fontaine (*cf* [13, §3.3]), procéder par dévissage, en utilisant simplement la théorie de Sen pour l'anneau C, développée dans [2, §3].

Définition 3.12. Soit X une $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^{+}(S)$-représentation de Γ_S.

(1) Supposons qu'il existe $r\in\mathbf{N}$ tel que X est tué par $\operatorname{Fil}^{r+1}\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^{+}(S)$, on note X_{f} la réunion des sous-$S[p^{-1}]$-modules de type fini de X qui sont stables par Γ_S.

(2) Dans le cas général, posons $X_{\mathrm{f}}=\varprojlim_{r\in\mathbf{N}_{>0}}\big(X/\operatorname{Fil}^r\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^{+}(S)X\big)_{\mathrm{f}}$.

L'ensemble X_{f} est de façon naturelle une $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^{+}(S)$-représentation de Γ_S.

Lemme 3.13. *Soit $\mathcal{E}\subseteq\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$ un sous-$S[p^{-1}]$-module de type fini qui est stable sous l'action de Γ_S. Alors $\mathcal{E}\subseteq S_\infty[p^{-1}]$.*

Démonstration. D'après [1, Cor. 3.10], il existe $N\in\mathbf{N}$ tel que l'application naturelle $S_N\otimes_{\widetilde{R}_N}\widetilde{R}_\infty\to S_\infty$ est injective, de conoyau tué par p. Posons $B=\big\{\big(\varepsilon^{(n)}\big)^{\alpha_0}\big(T_1^{(n)}\big)^{\alpha_1}\cdots\big(T_d^{(n)}\big)^{\alpha_d}\big\}_{\substack{n\geq N\\ 0\leq\alpha_i<p^{n-N}}}$. Quitte à remplacer S par S_N, on peut donc supposer qu'on a les inclusions

$$\bigoplus_{b\in B}Sb\subseteq S_\infty\subseteq p^{-1}\bigoplus_{b\in B}Sb$$

et donc l'inclusion $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\subseteq\prod_{b\in B}S[p^{-1}]b$. Pour prouver le lemme, il s'agit de montrer que $\mathcal{E}\subseteq\bigoplus_{b\in B}S[p^{-1}]b$. Soit $\mathfrak{p}\subseteq S$ un idéal premier au-dessus de p, et $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ le complété p-adique du localisé $S_{\mathfrak{p}}$. C'est un anneau de valuation discrète complet, de caractéristique $(0,p)$, de corps résiduel admettant la réduction de $(T_1,\ldots,T_d)$ comme p-base. Soit $\mathcal{K}$ son corps des fractions et $\mathcal{K}_\infty=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\mathcal{K}\big[\varepsilon^{(n)},T_1^{(n)},\cdots,T_d^{(n)}\big]$. Par hyothèse, $\mathcal{K}\otimes_S\mathcal{E}$ est un sous-$\mathcal{K}$-espace vectoriel de dimension finie du complété $\widehat{\mathcal{K}}_\infty$, stable sous l'action de $\Gamma_S\simeq\Gamma_{\mathcal{K}}$. D'après [6, Propositions 1 & 3], on a $\mathcal{K}\otimes_S\mathcal{E}\subseteq\mathcal{K}_\infty=\bigoplus_{b\in B}\mathcal{K}b$. Comme l'application naturelle $S[p^{-1}]\to\mathcal{K}$ est injective (vu que S est intègre), on a bien $\mathcal{E}\subseteq\bigoplus_{b\in B}S[p^{-1}]b$. □

Proposition 3.14. *Soit X une $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$-représentation de Γ_S libre de rang n. Alors X_{f} est une $S_\infty[p^{-1}]$-représentation de Γ_S libre de rang n et l'application*

$$\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\otimes_{S_\infty[p^{-1}]}X_{\mathrm{f}}\to X$$

est un isomorphisme de $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$-représentations de Γ_S.

Démonstration. Après le choix d'une base $\mathfrak{B}=(x_1,\ldots,x_n)$ de X sur $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$, l'action de Γ_S sur X est donnée par un cocycle $U\colon \Gamma_S\to \mathsf{GL}_n(\widehat{S}_\infty[p^{-1}])$. Mais d'après [2, §3], l'application naturelle

$$\mathrm{H}^1\big(\Gamma_S,\mathsf{GL}_n(S_\infty[p^{-1}])\big)\to \mathrm{H}^1\big(\Gamma_S,\mathsf{GL}_n(\widehat{S}_\infty[p^{-1}])\big)$$

est bijective : quitte à changer de base, on peut supposer que U est à valeurs dans $\mathsf{GL}_n(S_\infty[p^{-1}])$. Par continuité de U et compacité de Γ_S, il existe $m\in\mathbf{N}$ tel que U est en fait à valeurs dans $\mathsf{GL}_n(S_m[p^{-1}])$. Cela implique que $\bigoplus\limits_{j=1}^n S_m[p^{-1}]x_j$ est stable par Γ_S, et donc que $x_1,\ldots,x_n\in X_{\mathrm{f}}$. Il en résulte que $\bigoplus\limits_{j=1}^n S_\infty[p^{-1}]x_j\subseteq X_{\mathrm{f}}$. Il s'agit de montrer l'inclusion réciproque.

Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in \widehat{S}_\infty[p^{-1}]$ tels que $x=\sum\limits_{j=1}^n \lambda_j x_j\in X_{\mathrm{f}}$. Soit $\mathcal{E}$ le sous-$S_m[p^{-1}]$-module de $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$ engendré par les coordonnées dans $\mathfrak{B}$ des $g(x)$ pour $g\in\Gamma_S$. Par hypothèse ($x\in X_{\mathrm{f}}$), le $S[p^{-1}]$-module $\mathcal{E}$ est de type fini. Soit $\underline{\lambda}$ le vecteur colonne dont les composantes sont $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Si $g\in\Gamma_S$, les coordonnées de $g(x)$ dans $\mathfrak{B}$ sont les coefficients du vecteur colonne $U_g g(\underline{\lambda})$: ce sont des combinaisons $S_m[p^{-1}]$-linéaires de $g(\lambda_1),\ldots,g(\lambda_n)$. Si maintenant $h\in\Gamma_S$, on a $U_{hg}(hg(\underline{\lambda}))=U_h h(U_g g(\underline{\lambda}))$, de sorte que $h(U_g g(\underline{\lambda}))=U_h^{-1}U_{hg}(hg(\underline{\lambda}))$, et les images par h des coordonnées de $g(x)$ sont des combinaisons $S_m[p^{-1}]$-linéaires de celles de $hg(x)$: elles appartiennent à $\mathcal{E}$, qui est donc stable par Γ_S. D'après le lemme 3.13, cela implique que $\mathcal{E}\subseteq S_\infty[p^{-1}]$. En particulier, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in S_\infty[p^{-1}]$, ce qui achève la preuve. □

Lemme 3.15. *Soient X_1,X_2 deux $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$-représentations libres de rang fini de Γ_S, alors les applications*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{S_\infty[p^{-1}]}(X_{1,\mathrm{f}},X_{2,\mathrm{f}})&\to \mathrm{Hom}_{\widehat{S}_\infty[p^{-1}]}(X_1,X_2)_{\mathrm{f}}\\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}_{S_\infty[p^{-1}]}(\Gamma_S)}(X_{1,\mathrm{f}},X_{2,\mathrm{f}})&\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}_{\widehat{S}_\infty[p^{-1}]}(\Gamma_S)}(X_1,X_2)\\ \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Rep}_{S_\infty[p^{-1}]}(\Gamma_S)}(X_{1,\mathrm{f}},X_{2,\mathrm{f}})&\to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Rep}_{\widehat{S}_\infty[p^{-1}]}(\Gamma_S)}(X_1,X_2)\end{aligned}$$

sont bijectives.

Démonstration. Posons $X=\mathrm{Hom}_{\widehat{S}_\infty[p^{-1}]}(X_1,X_2)$. D'après la proposition 3.14, les $S_\infty[p^{-1}]$-modules $X_{1,\mathrm{f}}$ et $X_{2,\mathrm{f}}$ sont libres et $X_1=\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\otimes_{S_\infty[p^{-1}]}X_{1,\mathrm{f}}$ et $X_2=\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\otimes_{S_\infty[p^{-1}]}X_{2,\mathrm{f}}$. Il en résulte qu'en tant que $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$ représentations de Γ_S, on a

$$\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\otimes_{S_\infty[p^{-1}]}\mathrm{Hom}_{S_\infty[p^{-1}]}(X_{1,\mathrm{f}},X_{2,\mathrm{f}})\xrightarrow{\sim}X.$$

En choisissant des bases de $X_{1,\mathrm{f}}$ et de $X_{2,\mathrm{f}}$ sur $S_\infty[p^{-1}]$ et en raisonnant comme dans la preuve de la proposition 3.14, on en déduit

$$\mathrm{Hom}_{S_\infty[p^{-1}]}(X_{1,\mathrm{f}},X_{2,\mathrm{f}})\xrightarrow{\sim}X_{\mathrm{f}}$$

en tant que $S_\infty[p^{-1}]$-représentations de Γ_S, *i.e.* la bijectivité de la première application. En prenant les invariants sous Γ_S, on a bien la bijectivité de

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}_{S_\infty[p^{-1}]}(\Gamma_S)}(X_{1,\mathrm{f}},X_{2,\mathrm{f}})\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}_{\widehat{S}_\infty[p^{-1}]}(\Gamma_S)}(X_1,X_2).$$

On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Rep}_{S_\infty[p^{-1}]}(\Gamma_S)}(X_{1,\mathrm{f}},X_{2,\mathrm{f}}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Rep}_{\widehat{S}_\infty[p^{-1}]}(\Gamma_S)}(X_1,X_2)\\ \| & & \|\\ \mathrm{H}^1(\Gamma_S,X_{\mathrm{f}}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\Gamma_S,X)\end{array}$$

il s'agit donc de prouver la bijectivité de la flèche du bas. Soit n le rang du $S_\infty[p^{-1}]$-module est libre X_{f}. Après le choix d'une base $\mathfrak{B}$, l'action de Γ_S sur X_{f} (et donc sur $X=\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\otimes_{S_\infty[p^{-1}]}X_{\mathrm{f}}$), est décrite par un cocycle $U\colon\Gamma_S\to\mathsf{GL}_n(S_m[p^{-1}])$ (pour $m\in\mathbf{N}$ convenable).

Soit $c\colon \Gamma_S \to X_{\mathrm{f}}$ un cocycle dont l'image est nulle dans $\mathrm{H}^1(\Gamma_S, X)$. Cela signifie qu'il existe $x \in X$ tel que $c_g = g(x) - x$ pour tout $g \in \Gamma_S$. Notons u_g (resp. v) le vecteur colonne dont les coefficients sont les coordonnées de c_g (resp. x) dans la base $\mathfrak{B}$: on a alors $u_g = U_g g(v) - v$ et donc $g(v) = U_g^{-1}(u_g + v)$ pour tout $g \in \Gamma_S$. Quitte à augmenter m, on peut supposer que u_g est à coefficients dans $S_m[p^{-1}]$ pour tout $g \in \Gamma_S$. Soit $\mathcal{E}$ le sous-$S_m[p^{-1}]$-module de $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$ engendré par 1 et les coefficients de v. Il est de type fini sur $S[p^{-1}]$ et stable par Γ_S : on a $\mathcal{E} \subseteq S_\infty[p^{-1}]$ en vertu du lemme 3.13, donc $x \in X_{\mathrm{f}}$ et $g \mapsto c_g$ est d'image nulle dans $\mathrm{H}^1(\Gamma_S, X_{\mathrm{f}})$, ce qui prouve l'injectivité.

Prouvons la surjectivité. Soit $c\colon \Gamma_S \to X$ un cocycle. Il définit une extension $\widetilde{X}$ de $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$ par X : en tant que $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$-modules, on a $\widetilde{X} = X \oplus \widehat{S}_\infty[p^{-1}]$, l'action de Γ_S étant donnée par $g(x,\lambda) = (g(x) + g(\lambda)c_g, g(\lambda))$. Mais d'après la proposition 3.14, le $S_\infty[p^{-1}]$-module $\widetilde{X}_{\mathrm{f}}$ est libre de rang $n+1$ et $\widetilde{X} = \widehat{S}_\infty[p^{-1}] \otimes_{S_\infty[p^{-1}]} \widetilde{X}_{\mathrm{f}}$. Cela implique qu'il existe $x \in X$ tel que $\widetilde{X}_{\mathrm{f}} = X_{\mathrm{f}} \oplus S_\infty[p^{-1}](x,1)$, ce qui implique que le cocycle $g \mapsto c_g + g(x) - x$ est à valeurs dans X_{f} et on a fini. $\square$

Remarque 3.16. Extensions dans $\mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_{\widehat{S}_\infty[p^{-1}]}(\Gamma_S)$: le point de vue cocyclique. Supposons qu'on a une suite exacte de $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$-représentations libres de Γ_S

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0.$$

Soient $\mathfrak{B}'$ une base de X' et $\mathfrak{B}''$ une famille de X qui relève une base $\overline{\mathfrak{B}}''$ de X''. La famille $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' \cup \mathfrak{B}''$ est une base de X. Notons $g \mapsto U'_g$ (resp. $g \mapsto U''_g$) le cocycle qui décrit l'action de Γ_S dans la base $\mathfrak{B}'$ (resp. $\overline{\mathfrak{B}}''$). Le cocycle U qui décrit l'action de Γ_S dans la base $\mathfrak{B}$ est de la forme

$$U_g = \begin{pmatrix} U'_g & \widetilde{U}_g \\ 0 & U''_g \end{pmatrix}$$

avec $\widetilde{U}_g \in \mathsf{M}_{n',n''}\big(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\big)$ (où n' (resp. n'') désigne le rang de X' (resp. X'')). Le fait que U est un cocycle se traduit par l'égalité

$$\widetilde{U}_{gh} = U'_g g(\widetilde{U}_h) + \widetilde{U}_g g(U''_h)$$

pour tout $g, h \in \Gamma_S$.

Le choix d'un autre relèvement de la base $\overline{\mathfrak{B}}''$ est équivalent à la donnée d'une matrice de passage de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n'} & N \\ 0 & \mathrm{I}_{n''} \end{pmatrix}$$

où $N \in \mathsf{M}_{n',n''}\big(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\big)$. Le cocycle dans la nouvelle base est alors

$$g \mapsto V_g = B^{-1} U_g g(B) = \begin{pmatrix} U'_g & \widetilde{V}_g \\ 0 & U''_g \end{pmatrix}$$

avec

$$\widetilde{V}_g = \widetilde{U}_g + U'_g g(N) - N U''_g.$$

Supposons maintenant que U' et U'' sont à valeurs dans $\mathsf{GL}_{n'}(S_\infty[p^{-1}])$ et $\mathsf{GL}_{n''}(S_\infty[p^{-1}])$ respectivement. Le lemme 3.15 implique alors qu'il existe $N \in \mathsf{M}_{n',n''}\big(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\big)$ tel que $\widetilde{V}_g$ est à valeurs dans $\mathsf{M}_{n',n''}(S_\infty[p^{-1}])$.

Proposition 3.17. *Soient $r \in \mathbf{N}$ et X une $\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)/\operatorname{Fil}^{r+1}\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)$-représentation libre de rang n de Γ_S. Alors X_{f} est libre de rang n sur $\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S)/\operatorname{Fil}^{r+1}\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S)$ et l'application naturelle*

$$\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S) \otimes_{\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S)} X_{\mathrm{f}} \to X$$

est un isomorphisme de $\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)$-représentations de Γ_S.

Démonstration. On procède par récurrence sur r, le cas $r=0$ résultant de la proposition 3.14. Supposons $r>0$. Posons $X'=\big(\operatorname{Fil}^r \mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)\big)X$, c'est une $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$-représentation libre de rang $n\binom{d+r}{r}$ de Γ_S (car $\operatorname{Gr}^r \mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)$ est naturellement un $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$-module libre de rang $\binom{d+r}{r}$). Posons $X''=X/X'$, c'est une $\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)/\operatorname{Fil}^r \mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)$-représentation libre de rang n de Γ_S. Par hypothèse de récurrence, les modules X'_{f} et X''_{f} sont libres de rang $n\binom{d+r}{r}$ sur $S_\infty[p^{-1}]$ et n sur $\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S)/\operatorname{Fil}^r \mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S)$ respectivement, et on a

$$\begin{aligned}X'&=\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\otimes_{S_\infty[p^{-1}]}X'_{\mathrm{f}}\\ X''&=\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)/\operatorname{Fil}^r \mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)\otimes_{\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S)}X''_{\mathrm{f}}.\end{aligned}$$

En particulier, il existe une base $\mathfrak{B}''$ de X'' sur $\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)/\operatorname{Fil}^r \mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)$ telle que le cocycle U'' décrivant l'action de Γ_S sur $\mathfrak{B}''$ est à valeurs dans $\mathsf{GL}_n\big(\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S)/\operatorname{Fil}^r \mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S)\big)$. Soit $\mathfrak{B}$ une base de X qui relève $\mathfrak{B}''$. Le cocycle U qui décrit l'action de Γ_S sur X dans la base $\mathfrak{B}$ est alors à valeurs dans $\mathsf{GL}_n\big(\mathrm{pr}^{-1}(\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S)/\operatorname{Fil}^r \mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S))\big)$ où

$$\mathrm{pr}\colon \mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)/\operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)\to \mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)/\operatorname{Fil}^r \mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)$$

est la projection. Mais on a

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}^{-1}(\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S)/\operatorname{Fil}^r \mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S))&=\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S)/\operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S)+\operatorname{Gr}^r(\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S))\\ &=S_\infty[p^{-1}]_{<r}[u_1,\dots,u_d,t]\oplus\mathcal{S}_r\end{aligned}$$

où $S_\infty[p^{-1}]_{<r}[u_1,\dots,u_d,t]$ est le module des polynômes de degré $<r$ en $u_1,\dots,u_d,t$ à coefficients dans $S_\infty[p^{-1}]$ et

$$\mathcal{S}_r=\operatorname{Sym}^r_{\widehat{S}_\infty[p^{-1}]}\big(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]u_1\oplus\cdots\oplus\widehat{S}_\infty[p^{-1}]u_d\oplus\widehat{S}_\infty[p^{-1}]t\big).$$

Pour tout $g\in\Gamma_S$, on a $U_g=\widehat{U}''_g+\widetilde{U}_g$ avec $\widehat{U}''_g\in\mathsf{GL}_n\big(S_\infty[p^{-1}]_{<r}[u_1,\dots,u_d,t]\big)$ et $\widetilde{U}_g\in\mathsf{M}_n\big(\mathcal{S}_r\big)$.

Rappelons (*cf* [2, §3]) qu'il existe $m_S\in\mathbf{N}$ tel que pour tout $i\in\{0,\dots,d\}$ et tout $m\geq m_S$, on dispose d'une application $\tau^{(i)}_m\colon\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\to\Lambda^{(i)}_m$ ("trace normalisée de Tate"), où $\Lambda^{(i)}_m$ est une sous-$S_m[p^{-1}]$-algèbre de $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$ (définie dans *loc. cit.*). Elle jouit des propriétés suivantes :

(a) $\tau^{(i)}_m$ est un projecteur $S_m[p^{-1}]$-linéaire ;

(b) $\tau^{(i)}_m$ commute à l'action des $\tau^{(j)}_{m'}$.

Rappelons en outre que $\bigcap\limits_{i=0}^{d}\Lambda^{(i)}_m=S_m[p^{-1}]$ et que $\tau_m:=\tau^{(0)}_m\circ\tau^{(1)}_m\circ\cdots\circ\tau^{(d)}_m$ est un projecteur $S_m[p^{-1}]$-linéaire $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\to S_m[p^{-1}]$ qui commute à l'action de Γ_S. On prolonge τ_m à $\mathcal{S}_r$ en posant $\tau_m(t)=t$ et $\tau_m(u_i)=u_i$ pour $i\in\{1,\dots,d\}$.

Comme Γ_S est topologiquement engendré par un nombre fini d'éléments et U'' est à coefficients dans

$$\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S)/\operatorname{Fil}^r \mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S)\simeq S_\infty[p^{-1}]_{<r}[u_1,\dots,u_d,t]$$

il existe $m\geq m_S$ tel que $\widehat{U}''$ est à coefficients dans $S_m[p^{-1}]_{<r}[u_1,\dots,u_d,t]$. Posons alors

$$U^{(m)}_g=\widehat{U}''+\tau_m(\widetilde{U}_g).$$

Cela définit une application $\Gamma_S\to\mathsf{GL}_n(S_m[p^{-1}]_{<r+1}[u_1,\dots,u_d,t])$. Montrons qu'elle définit un cocycle $U^{(m)}\colon\Gamma_S\to\mathsf{GL}_n\big(\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S)/\operatorname{Fil}^{r+1}\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S)\big)$.

Comme U est un cocycle, on a $U_{gh}=U_g g(U_h)$ pour tout $g,h\in\Gamma_S$. On a donc

$$\begin{aligned}\widehat{U}''_{gh}+\widetilde{U}_{gh}&=\big(\widehat{U}''_g+\widetilde{U}_g\big)g\big(\widehat{U}''_h+\widetilde{U}_h\big)\\ &=\widehat{U}''_g g\big(\widehat{U}''_h\big)+\widehat{U}''_g g\big(\widetilde{U}_h\big)+\widetilde{U}_g g\big(\widehat{U}''_h\big)\end{aligned}$$

(le produit $\widetilde{U}_g g\big(\widetilde{U}_h\big)$ est nul modulo $\operatorname{Fil}^{r+1}\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)$). En appliquant $\tau^{(m)}$, il vient

$$\begin{aligned}\widehat{U}''_{gh}+\tau_m\big(\widetilde{U}_{gh}\big)&=\widehat{U}''_g g\big(\widehat{U}''_h\big)+\widehat{U}''_g\tau_m\big(g\big(\widetilde{U}_h\big)\big)+\tau_m\big(\widetilde{U}_g\big)g\big(\widehat{U}''_h\big)\\ &=\widehat{U}''_g g\big(\widehat{U}''_h\big)+\widehat{U}''_g g\big(\tau_m\big(\widetilde{U}_h\big)\big)+\tau_m\big(\widetilde{U}_g\big)g\big(\widehat{U}''_h\big)\\ &=\big(\widehat{U}''_g+\tau_m\big(\widetilde{U}_g\big)\big)g\big(\widehat{U}''_h+\tau_m\big(\widetilde{U}_h\big)\big)\end{aligned}$$

de sorte que $U_{gh}^{(m)} = U_g^{(m)} g(U_h^{(m)})$. Pour $g \in \Gamma_S$, écrivons $U_g = U_g^{(m)} + \widetilde{U}_g^{(m)}$. Par construction, on a $\widetilde{U}_g^{(m)} \in \mathsf{M}_n(\mathrm{Gr}^r \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S))$.

Pour $g, h \in \Gamma_S$, on a :

$$\begin{aligned} U_{gh} = U_g g(U_h) &= \big(U_g^{(m)} + \widetilde{U}_g^{(m)}\big) g\big(U_h^{(m)} + \widetilde{U}_h^{(m)}\big) \\ &= U_g^{(m)} g\big(U_h^{(m)}\big) + \widetilde{U}_g^{(m)} g\big(U_h^{(m)}\big) + U_g^{(m)} g\big(\widetilde{U}_h^{(m)}\big) + \widetilde{U}_g^{(m)} g\big(\widetilde{U}_h^{(m)}\big) \\ &= U_g^{(m)} g\big(U_h^{(m)}\big) + \widetilde{U}_g^{(m)} g\big(U_h^{(m)}\big) + U_g^{(m)} g\big(\widetilde{U}_h^{(m)}\big) \end{aligned}$$

vu que le produit $\widetilde{U}_g^{(m)} g\big(\widetilde{U}_h^{(m)}\big)$ est nul modulo $\mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$. On a donc

$$\widetilde{U}_{gh} = \widetilde{U}_g^{(m)} g\big(U_h^{(m)}\big) + U_g^{(m)} g\big(\widetilde{U}_h^{(m)}\big).$$

D'après la remarque 3.16, cela signifie que $g \mapsto \widetilde{U}_g^{(m)}$ définit une extension de X''_{f} par X'_{f} (de $S_\infty[p^{-1}]$-représentations), et cela implique qu'il existe $N \in \mathsf{M}_n\left(\mathrm{Gr}^r \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)\right)$ telle que

$$\widetilde{U}_g + U_g g(N) - N U_g$$

est à valeurs dans $\mathsf{M}_n\left(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)\right)$. Si $B = \mathrm{I}_n + N \in \mathsf{GL}_n(\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S))$, on a alors

$$\begin{aligned} B^{-1} U_g g(B) &= (\mathrm{I}_n - N)\big(U_g^{(m)} + \widetilde{U}_g^{(m)}\big)(\mathrm{I}_n + g(N)) \\ &= U_g^{(m)} + \widetilde{U}_g + U_g^{(m)} g(N) - N U_g^{(m)} \\ &= U_g^{(m)} + \widetilde{U}_g + U_g g(N) - N U_g \in \mathsf{GL}_n\left(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)\right) \end{aligned}$$

Il en résulte que, quitte à changer de base $\mathfrak{B}$ au moyen de la matrice B, on peut supposer que U est à valeurs dans $\mathsf{GL}_n\left(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)\right)$. On en déduit que X_{f} est libre de rang n sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)/\mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$ par fidèle platitude de $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)/\mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$ sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)/\mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$ (qui résulte de la fidèle platitude de $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$ sur $S_\infty[p^{-1}]$). □

Remarque 3.18. La méthode employée ici est la même que celle de Fontaine (*cf* [13, Théorème 3.6]), sauf qu'on n'a pas introduit le sous-ensemble $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{f}}(X'', X')$ de *loc. cit.* parce $S_\infty[p^{-1}]$ n'étant pas un corps en général, il n'est pas clair *a priori* que ce soit un sous-groupe de $\mathrm{Ext}^1(X'', X')$. Remarquons toutefois que la représentation $\widetilde{X}$ n'est autre que celle qu'il appelle X_0 et que la preuve qui précède, on a considéré la "différence" des classes de X et de X_0 dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+}(X'', X')$, que Fontaine utilise pour se ramener au cas d'une extension scindée.

Proposition 3.19. *Soit X une $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$-représentation libre de rang n de Γ_S. Alors X_{f} est libre de rang n sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$ et l'application naturelle*

$$\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S) \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)} X_{\mathrm{f}} \to X$$

est un isomorphisme de $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$-représentations de Γ_S. En outre, X_{f} est la réunion des sous-$\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$-modules de type fini de X qui sont stables par Γ_S.

Démonstration. Pour $r \in \mathbf{N}$, posons

$$X_r = \big(\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)/\mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)\big) \otimes_{\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)} X.$$

C'est une $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)/\mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$-représentation libre de rang n, et d'après la proposition 3.17, le $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)/\mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$-module $X_{r,\mathrm{f}}$ est libre de rang n et $X_r = \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S) \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)} X_{r,\mathrm{f}}$. Comme l'application $X_{r+1} \to X_r$ est surjective, il en est *a fortiori* de même de $X_{r+1,\mathrm{f}} \to X_{r,\mathrm{f}}$ par fidèle platitude de $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)/\mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$ sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)/\mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$ (*cf* lemme 3.2) : toute base $\mathfrak{B}_r$ de $X_{r,\mathrm{f}}$ sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)/\mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$ peut se relever en une base de $X_{r+1,\mathrm{f}}$ sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)/\mathrm{Fil}^{r+2} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$. En procédant par récurrence, on peut donc construire une suite cohérente de bases $(\mathfrak{B}_r)_{r \in \mathbf{N}}$. Elle définit alors une base $\mathfrak{B}$ de $X_{\mathrm{f}} = \varprojlim_{r \in \mathbf{N}} X_{r,\mathrm{f}}$ sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$, ce qui prouve que X_{f} est libre de rang n.

Par ailleurs, $\mathfrak{B}_r$ est aussi une base de X_r sur $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)/\operatorname{Fil}^{r+1}\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$ pour tout $r\in\mathbf{N}$, de sorte que $\mathfrak{B}$ aussi une base de X sur $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$, et l'application naturelle

$$\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)\otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)} X_{\mathrm{f}}\to X$$

est bien un isomorphisme de $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$-représentations de Γ_S.

Si X_{f}' est la réunion des sous-$\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$-modules de type fini de X stables par Γ_S, on a déjà $X_{\mathrm{f}}\subseteq X_{\mathrm{f}}'$ vu que X_{f} est un $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$-module de type fini. Par définition de X_{f}, l'inclusion réciproque se vérifie modulo $\operatorname{Fil}^{r+1}\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$ pour tout $r\in\mathbf{N}$: soit Y un sous $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$-module de type fini de X_r. Choisissons $y_1,\dots,y_s$ une famille génératrice de Y. Comme Γ_S est topologiquement engendré par un nombre fini d'éléments $g_0,\dots,g_\delta$, il existe $m\in\mathbf{N}$ et $(c_{j,a,k})_{\substack{1\leq j,k\leq s\\ 0\leq a\leq\delta}}$ des éléments de $S_m[p^{-1}]_{\leq r}[u_1,\dots,u_d,t]$ tels que $g_a(y_j)=\sum\limits_{k=1}^{s}c_{j,a,k}y_k$ pour $0\leq a\leq\delta$ et $1\leq j\leq s$. Il en résulte que pour tout $m'\geq m$, le sous-$S[p^{-1}]$-module $Y_{m'}=\sum\limits_{j=1}^{s}S_m[p^{-1}]_{\leq r}[u_1,\dots,u_d,t]y_j\subseteq Y$ est stable par Γ_S. Comme $Y_{m'}$ est de type fini sur $S[p^{-1}]$, il est donc inclus dans $X_{r,\mathrm{f}}$. Comme Y est la réunion des $Y_{m'}$, on a bien $Y\subseteq X_{r,\mathrm{f}}$ et on a fini. □

Soit X une $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$-représentation de $\Gamma_{S/R}$. Comme $\Gamma_S\subseteq\Gamma_{S/R}$, on dispose du $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$-module X_{f}.

Lemme 3.20. *Le $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$-module X_{f} est stable par $\Gamma_{S/R}$.*

Démonstration. Si $r\in\mathbf{N}$, on pose $X_r=X/(\operatorname{Fil}^{r+1}\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S))X$. Soient $Y\subseteq X_r$ un sous-$S[p^{-1}]$-module de type fini stable par Γ_S et $g\in\Gamma_{S/R}$. Pour tout $\gamma\in\Gamma_S$, on a $\gamma(gY)=g(g^{-1}\gamma g)Y$. Mais comme Γ_S est distingué dans $\Gamma_{S/R}$, on a $g^{-1}\gamma g\in\Gamma_S$ et donc $(g^{-1}\gamma g)Y\subseteq Y$ soit $\gamma(gY)\subseteq gY$, de sorte que gY est stable par Γ_S. Comme il est de type fini sur $S[p^{-1}]$, on a $g(Y)\subseteq X_{r,\mathrm{f}}$. Ainsi $X_{r,\mathrm{f}}$ est stable par $\Gamma_{S/R}$: en passant à la limite projective, il en est de même de X_{f}. □

Pour alléger les notations, on pose $G_{S/R}=\operatorname{Gal}(S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}])$

Corollaire 3.21. *Soit X une $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$-représentation libre de rang n de $G_{S/R}$. Alors $X_{\mathrm{f}}^{G_{S/R}}$ est une $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$-représentation projective de rang n de Γ_R, et l'application naturelle*

$$\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)\otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} X_{\mathrm{f}}^{G_{S/R}}\to X$$

est un isomorphisme de $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$-représentations de $\Gamma_{S/R}$. En outre, $X_{\mathrm{f}}^{G_{S/R}}$ est la réunion des sous-$\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$-modules de type fini de $X^{G_{S/R}}$ qui sont stables par Γ_R.

Démonstration. D'après la proposition 3.3, l'extension $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\subseteq\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$ est finie étale de groupe $G_{S/R}$. Par descente étale, le $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$-module $X_{\mathrm{f}}^{G_{S/R}}$ est projectif de rang n et l'application naturelle

$$\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)\otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} X_{\mathrm{f}}^{G_{S/R}}\to X_{\mathrm{f}}$$

est un isomorphisme de $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$ représentations. On conclut en étendant les scalaires à $\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S)$ et en appliquant la proposition 3.19. La dernière assertion est évidente. □

Donnons maintenant la version cohomologique de la proposition 3.19.

Proposition 3.22. *Les applications naturelles*

$$\mathrm{H}^1\big(\Gamma_S,\mathsf{GL}_n(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S))\big)\to\mathrm{H}^1\big(\Gamma_S,\mathsf{GL}_n(\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S))\big)$$
$$\mathrm{H}^1\big(\Gamma_{S/R},\mathsf{GL}_n(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S))\big)\to\mathrm{H}^1\big(\Gamma_{S/R},\mathsf{GL}_n(\mathrm{L}_{\mathrm{dR}}^+(S))\big)$$

sont bijectives.

Démonstration. Montrons l'injectivité de la première application. Soient $U,V\colon \Gamma_S \to \mathsf{GL}_n(\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S))$ deux cocycles qui sont cohomologues vus comme cocycles à valeurs dans $\mathsf{GL}_n(\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S))$: il existe $B \in \mathsf{GL}_n(\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S))$ telle que pour tout $g\in\Gamma_S$, on a $V_g = B^{-1}U_g g(B)$ *i.e.* $g(B) = U_g^{-1}BV_g$. Soit $r\in\mathbf{N}$. Supposons que $B = \widetilde{B}_r + \widehat{B}_r$ avec $\widetilde{B}_r \in \mathsf{M}_n(S_\infty[p^{-1}]_{<r}[u_1,\ldots,u_d,t])$ (où $S_\infty[p^{-1}]_{<r}[u_1,\ldots,u_d,t]$ désigne l'ensemble des polynômes en $u_1,\ldots,u_d,t$ à coefficients dans $S_\infty[p^{-1}]$ de degré $< r$) et $\widehat{B}_r \in \mathsf{M}_n(\mathrm{Fil}^r\,\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S))$. On a alors

$$g(\widehat{B}_r) = U_g^{-1}\widehat{B}_rV_g + \big(U_g^{-1}\widetilde{B}_rV_g - g(\widetilde{B}_r)\big).$$

Notons $\widehat{B}'_r \in \mathsf{M}_n(\mathrm{Gr}^r\,\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S))$ l'image de $\widehat{B}_r$ dans $\mathsf{M}_n(\mathrm{Fil}^r\,\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S))\big/\,\mathsf{M}_n(\mathrm{Fil}^{r+1}\,\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S))$. L'égalité précédente implique

$$(*)\qquad g(\widehat{B}'_r) = U_g^{-1}\widehat{B}'_rV_g + \big(U_g^{-1}\widetilde{B}_rV_g - g(\widetilde{B}_r)\big) \mod \mathsf{M}_n(\mathrm{Fil}^{r+1}\,\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)).$$

C'est une égalité de matrices à coefficients dans

$$\mathcal{S}_r = \mathrm{Sym}^r_{\widehat{S}_\infty[p^{-1}]}\big(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]u_1 \oplus\cdots\oplus \widehat{S}_\infty[p^{-1}]u_d \oplus \widehat{S}_\infty[p^{-1}]t\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}^r\,\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S).$$

Soit alors $\mathcal{E}_r$ le sous-$S[p^{-1}]$-module de $\widehat{S}_\infty[p^-1]$ engendré par les coefficients des polynômes que sont les coefficients de $\widehat{B}'_r$ et ceux ce $\widetilde{B}_r$. Il est de type fini par construction, et stable sous l'action de Γ_S en vertu de l'égalité $(*)$. Mais d'après le lemme 3.13, cela implique que $\mathcal{E}_r \subseteq S_\infty[p^{-1}]$. Posons alors $\widetilde{B}_{r+1} = \widetilde{B}_r + \widehat{B}'_r$ et $\widehat{B}_{r+1} = B - \widetilde{B}_{r+1}$: on a $\widetilde{B}_{r+1} \in \mathsf{M}_n(S_\infty[p^{-1}]_{<r+1}[u_1,\ldots,u_d,t])$ et $\widehat{B}_{r+1}\in \mathsf{M}_n(\mathrm{Fil}^{r+1}\,\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S))$. Par récurrence, on a donc $B \in \mathsf{M}_n(S_\infty[p^{-1}]_{<r}[u_1,\ldots,u_d,t]) + \mathsf{M}_n(\mathrm{Fil}^r\,\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S))$ pour tout $r\in\mathbf{N}$. On a donc $B\in\mathsf{M}_n(\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S))$ et donc $B \in \mathsf{GL}_n(\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S))$: les cocycles U et V sont cohomologues.

Pour prouver l'injectivité de la deuxième application on considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^1\big(\Gamma_{S/R}, \mathsf{GL}_n(\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S))\big) & \xrightarrow{\text{res}} & \mathrm{H}^1\big(\Gamma_S, \mathsf{GL}_n(\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S))\big) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}^1\big(\Gamma_{S/R}, \mathsf{GL}_n(\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S))\big) & \xrightarrow{\text{res}} & \mathrm{H}^1\big(\Gamma_S, \mathsf{GL}_n(\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S))\big).
\end{array}$$

La deuxième flèche vertical est injective. On déduit de la suite d'inflation-restriction que les noyaux de les morphismes res de restriction sont $\mathrm{H}^1\big(\mathrm{Gal}(S[p^{-1}]/R[p^{-1}]), \mathsf{GL}_n(\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S))^{\Gamma_S}\big)$ et $\mathrm{H}^1\big(\mathrm{Gal}(S[p^{-1}]/R[p^{-1}]), \mathsf{GL}_n(\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}$ respectivement. Ils sont donc isomorphes puisque $S[p^{-1}] \subseteq \mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S)^{\Gamma_S} \subseteq \mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)^{\Gamma_S} \subseteq \mathrm{B}^{+\mathcal{G}_S}_{\mathrm{dR}} = S[p^{-1}]$ d'après [7, Proposition 5.2.12]. L'injectivité en résulte.

Montrons la surjectivité de la première application. Soit $U\colon\Gamma_S \to \mathsf{GL}_n(\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S))$ un cocycle. Il définit une $\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)$-représentation libre de rang n de Γ_S, que l'on note X. D'après la proposition 3.19, le $\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S)$-module $X_{m,\mathrm{f}}$ est libre de rang n et $X = \mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)\otimes_{\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S)} X_{m,\mathrm{f}}$: si $\mathfrak{B}$ est une base de X_{f} sur $\mathsf{GL}_n(\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S))$, c'est aussi une base de X sur $\mathrm{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)$ et le cocycle décrivant l'action de Γ_S dans $\mathfrak{B}$ est à valeurs dans $\mathsf{GL}_n(\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}(S))$: le cocycle U étant cohomologue à ce dernier, on a fini.

La surjectivité de la deuxième application se prouve exactement de la même façon en invoquant en outre le lemme 3.20. □

Théorème 3.23. *Les foncteurs*

$$\mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(\mathcal{G}_R) \to \mathbf{Rep}^{\mathrm{pl}}_{\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}}(\Gamma_R)$$
$$\mathbf{Rep}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}}(\mathcal{G}_R) \to \mathbf{Rep}^{\mathrm{reg,pl}}_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}}(\Gamma_R)$$
$$W \mapsto \big(W^{\mathcal{H}_R}\big)_{\mathrm{f}}$$

sont des équivalences de catégories.

Démonstration. C'est la conjonction des proposition 3.4 (*cf* corollaires 3.8 & 3.10) et de la proposition 3.22 (*cf* corollaire 3.21). □

3.24. **Étude des $\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}$-représentations libres de $\widetilde{\Gamma}_{S_{\overline{K}}/R_{\overline{K}}}$.**
On fixe S une sous-R-algèbre finie de $\overline{R}$ telle que $S\overline{K}/R\overline{K}$ est étale galoisienne. On pose $G_{S/R} = \mathrm{Gal}(S\overline{K}/R\overline{K})$.

Définition 3.25. Soit X une $\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)$-représentation de $\widetilde{\Gamma}_S$.

(1) Supposons qu'il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que X est tué par $\mathrm{Fil}^{r+1}\,\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)$, on note X_{f} la réunion des sous-$S_{\overline{K}}$-modules de type fini de X qui sont stables par $\widetilde{\Gamma}_S$.
(2) Dans le cas général, posons $X_{\mathrm{f}} = \varprojlim_{r\in\mathbf{N}_{>0}} \big(X/\,\mathrm{Fil}^r\,\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)X\big)_{\mathrm{f}}$.

L'ensemble X_{f} est de façon naturelle une $\mathbb{I}^+_{\mathrm{dR}}(S)$-représentation de $\widetilde{\Gamma}_S$.

Proposition 3.26. *Soit X une $\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)/\,\mathrm{Fil}^r\,\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)$-représentation (resp. $\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)$-représentation) libre de rang n de $\widetilde{\Gamma}_S$. Alors X_{f} est libre de rang n sur $\mathbb{I}^+_{\mathrm{dR}}(S)/\,\mathrm{Fil}^r\,\mathbb{I}^+_{\mathrm{dR}}(S)$ (resp. sur $\mathbb{I}^+_{\mathrm{dR}}(S)$) et l'application naturelle*

$$\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}(S) \otimes_{\mathbb{I}^+_{\mathrm{dR}}} X_{\mathrm{f}} \xrightarrow{\sim} X$$

est un isomorphisme de $\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)$–modules muni d'une action continue de $\widetilde{\Gamma}_S$. En outre, X_{f} est la réunion des sous-$\mathbb{I}^+_{\mathrm{dR}}(S)$-modules de type fini de X qui sont stables par $\widetilde{\Gamma}_S$.

Si X est une $\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)$-représentation libre de rang n de $\widetilde{\Gamma}_{S/R}$, alors $X_{\mathrm{f}}^{G_{S/R}}$ est une $\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}(R)$-représentation projective de rang n et l'application naturelle

$$\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}(S) \otimes_{\mathbb{I}^+_{\mathrm{dR}}} X_{\mathrm{f}}^{\widetilde{G}_{S/R}} \xrightarrow{\sim} X$$

est un isomorphisme de $\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}(S)$-représentations.

Démonstration. Pour prouver la première partie on procède de façon analogue à celle utilisée dans la preuve des propositions 3.17 et 3.19. On utilise la variante géométrique de la méthode de Tate-Sen pour $\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]$ (*cf* [2, §2]), le fait que les conditions sont satisfaites étant prouvé dans [3, §7.9]. On déduit la deuxième partie par descente étale (*cf* le corollaire 3.21). □

On a aussi l'analogue de la proposition 3.22 :

Proposition 3.27. *Les applications naturelles*

$$\mathrm{H}^1\big(\widetilde{\Gamma}_S, \mathsf{GL}_n(\mathbb{I}^+_{\mathrm{dR}}(S))\big) \to \mathrm{H}^1\big(\widetilde{\Gamma}_S, \mathsf{GL}_n(\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}(S))\big)$$
$$\mathrm{H}^1\big(\widetilde{\Gamma}_{S/R}, \mathsf{GL}_n(\mathbb{I}^+_{\mathrm{dR}}(S))\big) \to \mathrm{H}^1\big(\widetilde{\Gamma}_{S/R}, \mathsf{GL}_n(\mathbb{L}^+_{\mathrm{dR}}(S))\big)$$

sont bijectives.

Démonstration. On procède de façon analogue à la preuve de la proposition 3.22 en remplaçant [7, Proposition 5.2.12] par le lemme 2.11. □

Comme dans le théorème 3.23, on en déduit :

Corollaire 3.28. *Les foncteurs*

$$\mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}}(G_R) \to \mathbf{Rep}^{\mathrm{pl}}_{\mathbb{I}^+_{\mathrm{dR}}}(\widetilde{\Gamma}_R)$$
$$\mathbf{Rep}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}}(G_R) \to \mathbf{Rep}^{\mathrm{reg,pl}}_{\mathbb{I}_{\mathrm{dR}}}(\widetilde{\Gamma}_R)$$
$$W \mapsto \big(W^{H_R}\big)_{\mathrm{f}}$$

sont des équivalences de catégories.

4. Module à connexion associé à une B_{dR}-représentation

Dans cette partie, on linéarise l'action de Γ_R (resp. $\widetilde{\Gamma}_R$) sur une I_{dR}-représentation ($\mathbb{I}_{\mathrm{dR}}$-représentation) régulière en étudiant l'action infinitésimale de l'algèbre de Lie de Γ_R (resp. $\widetilde{\Gamma}_R$). Dans ce qui suit, on traite seulement le cas arithmétique en détail. Le cas géométrique (des $\mathbb{I}_{\mathrm{dR}}$-représentations de $\widetilde{\Gamma}_R$), plus simple, en découle formellement (*cf* 4.10).

4.1. **Le cas arithmétique.**

Pour $i \in \{1\ldots,d\}$, remarquons que $[\widetilde{T}_i]$ est inversible dans $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$. En effet, on a $[\widetilde{T}_i] = T_i - u_i$ de sorte que $[\widetilde{T}_i]^{-1} = T_i^{-1}\sum\limits_{r=0}^{\infty}\big(\frac{u_i}{T_i}\big)^r \in \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$. Par ailleurs, pour tout $g\in\Gamma_R$, il existe $c_i(g)\in\mathbf{Z}_p$ tel que $g([\widetilde{T}_i]) = [\varepsilon]^{c_i(g)}[\widetilde{T}_i]$. On a $c_i(\gamma_i)=1$ et $c_i(\gamma_j)=0$ si $j\neq i$.

Notons $\Omega^+_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+/R_\infty[p^{-1}]}$ (resp. $\Omega^+_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}/R_\infty[p^{-1}]}$) le module des $R_\infty[p^{-1}]$-différentielles continues de $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$ (resp. l_{dR}) ayant un pôle d'ordre ≤ 1 sur $(t=0)$. C'est un $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$-module (resp. l_{dR}-module) libre de rang $d+1$, de base $\big(\frac{\mathrm{d}\,t}{t},\frac{\mathrm{d}\,u_1}{t},\ldots,\frac{\mathrm{d}\,u_d}{t}\big)$.

Définition 4.2. Un *module à connexion* sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$ est un $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$-module projectif de type fini Y muni d'une application $R_\infty[p^{-1}]$-linéaire

$$\widetilde{\nabla}_Y\colon Y\to Y\otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+}\Omega^+_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+/R_\infty[p^{-1}]}$$

vérifiant la règle de Leibnitz : $\widetilde{\nabla}_Y(\lambda y) = y\otimes\mathrm{d}\,\lambda + \lambda\widetilde{\nabla}_Y(y)$ pout $y\in Y$ et $\lambda\in\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$. Un module à connexion Y sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$ est dit *potentiellement libre* s'il existe une sous-R-algèbre finie S de $\overline{R}$ telle que $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est étale galoisienne et $Y\otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+}\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$ est libre sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S)$.

Si Y_1 et Y_2 sont deux modules à connexion sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$, on munit $Y_1\otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+}Y_2$ de la structure de module à connexion sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$ donnée par $\widetilde{\nabla}_{Y_1\otimes Y_2} = \widetilde{\nabla}_{Y_1}\otimes\mathrm{Id}_{Y_2}+\mathrm{Id}_{Y_1}\otimes\widetilde{\nabla}_{Y_2}$. De même, on munit $Y=\mathrm{Hom}_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+}(Y_1,Y_2)$ de la structure de module à connexion sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$ donnée par $\widetilde{\nabla}_Y(f) = \widetilde{\nabla}_{Y_2}\circ f - (f\otimes\mathrm{Id}_{Y_2})\circ\widetilde{\nabla}_{Y_1}$.

Un morphisme entre deux modules à connexion sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$ est une application $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$-linéaire horizontale. On définit ainsi une catégorie tensorielle notée $\mathscr{R}_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+}$. On note $\mathscr{R}^{\mathrm{pl}}_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{R}_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+}$ constituée des modules à connexion qui sont potentiellement libres.

De même, on peut définir la catégorie $\mathscr{R}_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}}$ en considérant des l_{dR}-modules à connexion. Si $(Y,\widetilde{\nabla}_Y)\in\mathscr{R}_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}}$, la connexion $\widetilde{\nabla}_Y$ est dite *régulière* s'il existe un sous-$\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$-module $\mathcal{Y}$ de Y (qu'on appelle *réseau régulier*) tel que $\widetilde{\nabla}_Y(\mathcal{Y})\subseteq\mathcal{Y}\otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+}\Omega^+_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+/R_\infty[p^{-1}]}$, de sorte que $(\mathcal{Y},\widetilde{\nabla}_{Y|\mathcal{Y}})\in\mathscr{R}_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+}$. On note $\mathscr{R}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{R}_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}}$ constituée des modules à connexion régulière. Un module à connexion régulière $(Y,\widetilde{\nabla}_Y)$ est dit potentiellement libre s'il existe un réseau régulier $\mathcal{Y}\subseteq Y$ qui est potentiellement libre, *i.e.* tel que $(\mathcal{Y},\widetilde{\nabla}_{Y|\mathcal{Y}})\in\mathscr{R}^{\mathrm{pl}}_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+}$. On note $\mathscr{R}^{\mathrm{reg,pl}}_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{R}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}}$ constituée des modules à connexion régulière qui sont potentiellement libres.

Proposition 4.3. *Soit Y une $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$-représentation potentiellement libre de Γ_R. Pour $i\in\{0,\ldots,d\}$, il existe une unique application $R_\infty[p^{-1}]$-linéaire $\nabla_i\colon Y\to Y$ telle que pour tout $y\in Y$, il existe un sous-groupe ouvert $\Gamma_{r,y}$ de Γ_R tel que pour tout $m\in\mathbf{N}$ tel que $\gamma_i^{p^m}\in\Gamma_{r,y}$, on a*

$$\gamma_i^{p^m}(y) = \begin{cases}\exp\big(p^m\log(\chi(\gamma_0))\nabla_0\big)(y) \mod (\mathrm{Fil}^{r+1}\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+)Y & \text{si } i=0\\ \exp\big(-p^m[\widetilde{T}_i]\nabla_i\big)(y) \mod (\mathrm{Fil}^{r+1}\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+)Y & \text{si } i\neq 0\end{cases}$$

Démonstration. Quitte à remplacer R par une extension S convenable, on peut supposer que Y est libre de rang n. Pour $r\in\mathbf{N}$, on pose $Y_r = Y/(\mathrm{Fil}^{r+1}\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+)Y$. On peut voir Y_r comme un $R_\infty[p^{-1}]$-module, cela fournit une $R_\infty[p^{-1}]$-représentation libre de rang $n_r = n\binom{d+r}{r}$ de Γ_R. Choisissons-en une base $(e_1,\ldots,e_{n_r})$: dans cette dernière, l'action de Γ_R est décrite par un cocycle $U_r\colon\Gamma_R\to\mathsf{GL}_{n_r}(R_\infty[p^{-1}])$. Comme Γ_R est topologiquement engendré par un nombre fini d'éléments, il existe $m_r\in\mathbf{N}$ tel que U_r est à valeurs dans $\mathsf{GL}_{n_r}(R_{m_r}[p^{-1}])$-linéaires sur Y_r. Pour $m\geq m_r$, la série $\log(\gamma_i^{p^m}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(\gamma_i^{p^m}-\mathrm{Id})^k$ converge vers un endomorphisme $R_{m_r}[p^{-1}]$-linéaire de $\bigoplus\limits_{j=1}^{n_r}R_{m_r}[p^{-1}]e_j$. La normalisation

$$\nabla_i = \begin{cases}\frac{\log(\gamma_0^{p^m})}{p^m\log(\chi(\gamma_0))} & \text{si } i=0\\ \frac{\log(\gamma_i^{p^m})}{-p^m[\widetilde{T}_i]} & \text{si } i\in\{1,\ldots,d\}\end{cases}$$

ne dépend pas de $m \geq m_r$ (et pas du choix du générateur γ_0 de la partie libre de Γ_V si $i=0$). On l'étend à $Y_r = \bigoplus_{j=1}^{n_r} R_\infty[p^{-1}]e_j$ par $R_\infty[p^{-1}]$-linéarité. Remarquons que les endomorphismes ainsi construits sont des endomorphismes de Y_r, mais ils sont compatibles entre eux lorsque r varie (ce qui explique qu'on n'a pas indiqué la dépendance en r de ∇_i).

Si $y \in Y$, notons y_r son image dans Y_r. Il existe $m_{r,y} \geq m_r$ tel que $y_r \in \bigoplus_{j=1}^{n_r} R_{m_{r,y}}[p^{-1}]e_j$. Posons alors $\Gamma_{r,y} = p^{m_{r,y}}\Gamma_R$. Pour $m \in \mathbf{N}$ tel que $\gamma_i^{p^m} \in \Gamma_{r,y}$ *i.e.* tel que $m \geq m_{r,y}$, on a

$$\gamma_i^{p^m}(y_r) = \begin{cases} \exp\big(p^m \log(\chi(\gamma_0))\nabla_0\big)(y_r) & \text{si } i=0 \\ \exp\big(-p^m[\widetilde{T}_i]\nabla_i\big)(y_r) & \text{si } i \neq 0 \end{cases}$$

et donc le résultat annoncé.

L'unicité se vérifie modulo $(\mathrm{Fil}^{r+1}\,\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^{+})Y$ pour tout $r \in \mathbf{N}$ (car Y est séparé pour la filtration). Mais si f_1 et f_2 sont deux endomorphismes $R_\infty[p^{-1}]$-linéaires de Y_r tels que $\exp(p^m f_1) = \exp(p^m f_2)$ pour tout $m \in \mathbf{N}$ assez grand, on a $f_1 = f_2$ en prenant le log. □

Remarque 4.4. Pour $y \in Y$, on a

$$\nabla_0(y) = \frac{1}{\log(\chi(\gamma_0))} \lim_{m\to\infty} \frac{\gamma_0^{p^m} - \mathrm{Id}}{p^m}(y)$$

et pour $i \in \{1,\dots,d\}$, on a

$$\nabla_i(y) = -[\widetilde{T}_i]^{-1} \lim_{m\to\infty} \frac{\gamma_i^{p^m} - \mathrm{Id}}{p^m}(y).$$

Cela résulte immédiatement de la proposition 4.3.

Proposition 4.5. *Pour $y \in Y$ on a*

$$\begin{cases} \nabla_0(u_j y) = u_j \nabla_0(y) & \textit{pour } j \in \{1\dots,d\} \\ \nabla_0(ty) = ty + t\nabla_0(y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_i(ty) = t\nabla_i(y) \\ \nabla_i(u_j y) = u_j\nabla_i(y) & \textit{pour } i \in \{1\dots,d\} \textit{ et } j \neq i \\ \nabla_i(u_i y) = ty + u_i\nabla_i(y) \end{cases}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \nabla_0(ty) &= \frac{1}{\log(\chi(\gamma_0))} \lim_{m\to\infty} \frac{\chi(\gamma_0)^{p^m} t\gamma_0^{p^m}(y) - ty}{p^m} \\ &= \frac{t}{\log(\chi(\gamma_0))} \lim_{m\to\infty} \frac{\chi(\gamma_0)^{p^m}\big(y + p^m\log(\chi(\gamma_0))\nabla_0(y) + \mathrm{o}(p^m)\big) - y}{p^m} \\ &= \frac{t}{\log(\chi(\gamma_0))} \lim_{m\to\infty} \frac{\chi(\gamma_0)^{p^m} - 1}{p^m} y + t\nabla_0(y) = ty + t\nabla_0(y) \end{aligned}$$

et pour $i \in \{1,\dots,d\}$

$$\begin{aligned} \nabla_i(u_i y) &= -[\widetilde{T}_i]^{-1} \lim_{m\to\infty} \frac{\big(u_i + (1-[\varepsilon]^{p^m})[\widetilde{T}_i]\big)\gamma_i^{p^m}(y) - u_i y}{p^m} \\ &= -[\widetilde{T}_i]^{-1} \lim_{m\to\infty} \frac{\big(u_i + (1-\exp(p^m t))[\widetilde{T}_i]\big)\big(y - p^m[\widetilde{T}_i]\nabla_i(y) + \mathrm{o}(p^m)\big) - u_i y}{p^m} \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{\exp(p^m t) - 1}{p^m} y + u_i\nabla_i(y) = ty + u_i\nabla_i(y). \end{aligned}$$

Les autres égalités sont évidentes. □

Pour $y \in Y$, posons

$$\widetilde{\nabla}(y) = \nabla_0(y) \otimes \frac{\mathrm{d}\, t}{t} + \sum_{i=1}^{d} \nabla_i(y) \otimes \frac{\mathrm{d}\, u_i}{t} \in Y \otimes_{\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}} \Omega^+_{\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}/R_\infty[p^{-1}]}.$$

Proposition 4.6. *L'application* $\widetilde{\nabla}\colon Y \to Y \otimes_{\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}} \Omega^+_{\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}/R_\infty[p^{-1}]}$ *est une connexion.*

Démonstration. Il s'agit de vérifier que pour tout $y \in Y$ et tout $\lambda \in \mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}$, on a $\widetilde{\nabla}(\lambda y) = y \otimes \mathrm{d}\,\lambda + \lambda\widetilde{\nabla}(y)$. Comme $\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}} = R_\infty[p^{-1}][\![u_1,\ldots,u_d,t]\!]$, il suffit de le vérifier pour $\lambda \in \{t, u_1, \ldots, u_d\}$, et cela résulte alors des formules de la proposition 4.5. □

On dispose donc d'un foncteur

$$\begin{aligned}\Delta\colon\ \mathbf{Rep}^{\mathrm{pl}}_{\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}}(\Gamma_R) &\to \mathscr{R}^{\mathrm{pl}}_{\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}}\\ Y &\mapsto (Y, \widetilde{\nabla})\end{aligned}$$

qui induit des foncteurs

$$\begin{aligned}\Delta\colon\ \mathbf{Rep}^{\mathrm{reg,pl}}_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}}(\Gamma_R) &\to \mathscr{R}^{\mathrm{reg,pl}}_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}}\\ \Delta_{\mathrm{dR}}\colon\ \mathbf{Rep}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}}(\mathcal{G}_R) &\to \mathscr{R}^{\mathrm{reg,pl}}_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}}.\end{aligned}$$

Lemme 4.7. *Pour* $i \in \{0, \ldots, d\}$ *on a*

$$\gamma_i\nabla_0 = \begin{cases}\nabla_0\gamma_0 & \text{si } i = 0\\ (\nabla_0 + [\widetilde{T}_i]\nabla_i)\gamma_i & \text{si } i \in \{1,\ldots,d\}\end{cases}$$

Si $i \in \{1, \ldots, d\}$, *et* $g \in \Gamma_R$, *on a* $g\nabla_i = \chi(g)[\varepsilon]^{-c_i(g)}\nabla_i g$.

Démonstration. La première égalité est évidente pour $i = 0$. Supposons $i \in \{1, \ldots, d\}$. On a

$$\begin{aligned}\gamma_i\nabla_0 &= \frac{1}{\log(\chi(\gamma_0))}\lim_{m\to\infty}\frac{\gamma_i\gamma_0^{p^m} - \gamma_i}{p^m}\\ &= \frac{1}{\log(\chi(\gamma_0))}\lim_{m\to\infty}\frac{\gamma_0^{p^m}\gamma_i^{\chi(\gamma_0)^{-p^m}} - \gamma_i}{p^m}\\ &= \frac{1}{\log(\chi(\gamma_0))}\lim_{m\to\infty}\frac{(\gamma_0^{p^m} - \mathrm{Id})\gamma_i + \gamma_0^{p^m}\big(\gamma_i^{\chi(\gamma_0)^{-p^m}} - \gamma_i\big)}{p^m}\end{aligned}$$

Comme $\chi(\gamma_0)^{-p^m} = 1 - p^m\log(\chi(\gamma_0)) + \mathrm{o}(p^m)$, on a

$$\frac{\big(\gamma_i^{\chi(\gamma_0)^{-p^m}} - \gamma_i\big)\gamma_0^{p^m}}{p^m} = \frac{\gamma_i^{-p^m\log(\chi(\gamma_0))+\mathrm{o}(p^m)} - \mathrm{Id}}{p^m}\gamma_i\gamma_0^{p^m} = [\widetilde{T}_i]\log(\chi(\gamma_0))\nabla_i\gamma_i\gamma_0^{p^m} + \mathrm{o}(1).$$

En prenant la limite quand m tend vers l'infini, on a bien

$$\nabla_0\gamma_i = (\nabla_0 + [\widetilde{T}_i]\nabla_i)\gamma_i.$$

Par ailleurs, on a

$$g\nabla_i = -[\varepsilon]^{-c_i(g)}[\widetilde{T}_i]^{-1}\lim_{m\to\infty}\frac{g\gamma_i^{p^m} - g}{p^m} = -[\varepsilon]^{-c_i(g)}[\widetilde{T}_i]^{-1}\lim_{m\to\infty}\frac{\gamma_i^{p^m\chi(g)}g - g}{p^m} = \chi(g)[\varepsilon]^{-c_i(g)}\nabla_i g.$$

□

Proposition 4.8. *Si* $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ *on a* $[\nabla_i, \nabla_j] = 0$ *et* $[\nabla_0, \nabla_i] = \nabla_i$.

Démonstration. La première égalité est évidente. Si $i \in \{1, \ldots, d\}$ et $m \in \mathbf{N}$, on a $\gamma_0^{p^m}\nabla_i = \chi(\gamma_0)^{p^m}\nabla_i\gamma_0^{p^m}$ d'après le lemme 4.7 et donc

$$\frac{\gamma_0^{p^m} - \mathrm{Id}}{p^m}\nabla_i = \frac{\chi(\gamma_0)^{p^m}\nabla_i\gamma_0^{p^m} - \nabla_i}{p^m} = \nabla_i\frac{\gamma_0^{p^m} - \mathrm{Id}}{p^m} + \frac{\chi(\gamma_0)^{p^m} - 1}{p^m}\nabla_i\gamma_0^{p^m}.$$

En faisant tendre m vers l'infini, on a donc $\log(\chi(\gamma_0))\nabla_0\circ\nabla_i=\log(\chi(\gamma_0))\nabla_i\circ\nabla_0+\log(\chi(\gamma_0))\nabla_i$ soit $[\nabla_0,\nabla_i]=\nabla_i$. $\square$

Proposition 4.9. *La connexion $\widetilde{\nabla}$ commmute à l'action de Γ_R.*

Démonstration. Soit $g\in\Gamma_V$. On a $g\big(\frac{\mathrm{d}\,t}{t}\big)=\frac{\chi(g)\,\mathrm{d}\,t}{\chi(g)t}=\frac{\mathrm{d}\,t}{t}$ et $g\big(\frac{\mathrm{d}\,u_i}{t}\big)=\frac{\mathrm{d}\,u_i}{\chi(g)t}$ pour $i\in\{1,\dots,d\}$. On a donc

$$g\widetilde{\nabla}=g\nabla_0\otimes\frac{\mathrm{d}\,t}{t}+\sum_{i=1}^{d}g\nabla_i\otimes\frac{\mathrm{d}\,u_i}{\chi(g)t}=\nabla_0 g\otimes\frac{\mathrm{d}\,t}{t}+\sum_{i=1}^{d}\nabla_i g\otimes\frac{\mathrm{d}\,u_i}{t}=\widetilde{\nabla}g$$

car $g\nabla_0=\nabla_0 g$ et $g\nabla_i=\chi(g)\nabla_i g$ d'après le lemme 4.7.

Soit $i\in\{1,\dots,d\}$. On a $\gamma_i\big(\frac{\mathrm{d}\,t}{t}\big)=\frac{\mathrm{d}\,t}{t}$ et $\gamma_i\big(\frac{\mathrm{d}\,u_j}{t}\big)=\frac{\mathrm{d}\,u_j}{t}$ si $j\neq i$. En outre, on a

$$\begin{aligned}\gamma_i\Big(\frac{\mathrm{d}\,u_i}{t}\Big)&=\frac{\mathrm{d}\big(u_i+(1-[\varepsilon])[\widetilde{T}_i]\big)}{t}=\frac{\mathrm{d}\,u_i+(1-[\varepsilon])\,\mathrm{d}[\widetilde{T}_i]-[\widetilde{T}_i]\,\mathrm{d}[\varepsilon]}{t}\\&=\frac{\mathrm{d}\,u_i+([\varepsilon]-1)\,\mathrm{d}\,u_i-[\widetilde{T}_i][\varepsilon]\,\mathrm{d}\,t}{t}=[\varepsilon]\frac{\mathrm{d}\,u_i-[\widetilde{T}_i]\,\mathrm{d}\,t}{t}\end{aligned}$$

car $\mathrm{d}[\widetilde{T}_i]=-\,\mathrm{d}\,u_i$ (vu que $[\widetilde{T}_i]=T_i-u_i$) et $\mathrm{d}[\varepsilon]=[\varepsilon]\,\mathrm{d}\,t$ (vu que $[\varepsilon]=\exp(t)$). On a donc

$$\begin{aligned}\gamma_i\widetilde{\nabla}&=\gamma_i\nabla_0\otimes\frac{\mathrm{d}\,t}{t}+\gamma_i\nabla_i\otimes[\varepsilon]\frac{\mathrm{d}\,u_i-[\widetilde{T}_i]\,\mathrm{d}\,t}{t}+\sum_{j\neq i}\gamma_i\nabla_j\otimes\frac{\mathrm{d}\,u_j}{t}\\&=(\nabla_0+[\widetilde{T}_i]\nabla_i)\gamma_i\otimes\frac{\mathrm{d}\,t}{t}+[\varepsilon]^{-1}\nabla_i\gamma_i\otimes[\varepsilon]\frac{\mathrm{d}\,u_i-[\widetilde{T}_i]\,\mathrm{d}\,t}{t}+\sum_{j\neq i}\nabla_j\gamma_i\otimes\frac{\mathrm{d}\,u_j}{t}\\&=\nabla_0\gamma_i\otimes\frac{\mathrm{d}\,t}{t}+\sum_{j=1}^{d}\nabla_j\gamma_i\otimes\frac{\mathrm{d}\,u_j}{t}=\widetilde{\nabla}\gamma_i\end{aligned}$$

Car $\gamma_i\nabla_0=(\nabla_0+[\widetilde{T}_i]\nabla_i)\gamma_i$ et $\gamma_i\nabla_i=[\varepsilon]^{-1}\nabla_i\gamma_i$ d'après le lemme 4.7.

La proposition résulte alors du fait que Γ_R est un sous-groupe de $\Gamma_{\widetilde{R}}$ qui est topologiquement engendré par Γ_V et par $\{\gamma_1,\dots,\gamma_d\}$. $\square$

4.10. **Le cas géométrique, fibrés de Higgs.**

Si $r\in\mathbf{N}_{>0}\cup\{\infty\}$ et Y est une $\mathbb{I}_{\mathrm{dR}}^+/\operatorname{Fil}^r\mathbb{I}_{\mathrm{dR}}^+$-représentation de $\widetilde{\Gamma}_R$, les constructions faites ci-dessus fournissent d opérateurs $(\nabla_i\colon Y\to Y)_{1\leq i\leq d}$.

Lorsque $r=\infty$, ils permettent de définir une connexion

$$\widetilde{\nabla}_Y\colon Y\to Y\otimes_{\mathbb{I}_{\mathrm{dR}}^+}\Omega^+_{\mathbb{I}_{\mathrm{dR}}^+/\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}}$$

qui est intégrable et commute à l'action de $\widetilde{\Gamma}_R$. En particulier, on dispose de foncteurs

$$\begin{aligned}\Delta\colon\ &\mathbf{Rep}^{\mathrm{pl}}_{\mathbb{I}_{\mathrm{dR}}^+}(\widetilde{\Gamma}_R)\to\mathscr{R}^{\mathrm{pl}}_{\mathbb{I}_{\mathrm{dR}}^+}\\\Delta\colon\ &\mathbf{Rep}^{\mathrm{reg,pl}}_{\mathbb{I}_{\mathrm{dR}}}(\widetilde{\Gamma}_R)\to\mathscr{R}^{\mathrm{reg,pl}}_{\mathbb{I}_{\mathrm{dR}}}\\\Delta_{\mathrm{dR}}\colon\ &\mathbf{Rep}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{B_{dR}}}(G_R)\to\mathscr{R}^{\mathrm{reg,pl}}_{\mathbb{I}_{\mathrm{dR}}}\end{aligned}$$

définis par $Y\mapsto(Y,\widetilde{\nabla}_Y)$.

Définition 4.11. (1) Suivant Faltings (*cf* [11, Section 3]), une C-représentation de G_R s'appelle une *$\mathbf{Q}_p$-représentation généralisée* de G_R.

(2) Un *module de Higgs* est un $\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}/t\,\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}$-module potentiellement libre (*i.e.* libre après tensorisation par $\mathbb{S}_{\mathrm{dR}}/t\,\mathbb{S}_{\mathrm{dR}}$ pour $S\in\mathscr{I}$ convenable) muni de d opérateurs $\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}/t\,\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}$-linéaires $(\nabla_i)_{1\leq i\leq d}$ qui commutent.

Dans le cas où $r=1$, *i.e.* où Y est une $\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}/t\,\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}$-représentation de $\widetilde{\Gamma}_R$, on munit donc Y d'une structure de module de Higgs.

Remarque 4.12. Le module de Higgs ainsi construit n'est autre que le module de Higgs associé à Y par Faltings. Pour le voir, on se ramène, en remplacant R par R_m assez grand, au cas où Y admet un $\widehat{\overline{R}}$-réseau stable par $\widetilde{\Gamma}_R$, sur lequel l'action de G_R est triviale modulo p^α avec $\alpha > \frac{2}{p-1}$. Dans ce cas, [11, Lemma 1] et les remarques qui suivent ne sont autres que la théorie de Sen géométrique pour les $\widehat{\overline{R}}$-représentations « petites ». Remarquons que c'est l'hypothèse de petitesse qui permet de descendre à $\widehat{R\mathcal{O}_{\overline{K}}}[p^{-1}]$ au lieu de $\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}/t\,\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}$.

5. Étude des $\mathbb{I}_{\mathrm{dR}}^+$-représentations (cas arithmétique)

5.1. Cohomologie des $R_\infty[p^{-1}]$-représentations potentiellement libres de Γ_R.

Proposition 5.2. *Soit Z une $R_\infty[p^{-1}]$-représentation potentiellement libre de rang fini de Γ_R (i.e. telle qu'il existe une extension finie S de R telle que $R[p^{-1}] \to S[p^{-1}]$ est étale et $S_\infty[p^{-1}] \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} Z$ est libre de rang fini sur $S_\infty[p^{-1}]$). Alors pour tout $r \in \mathbf{Z}$, le $R[p^{-1}]$-module $\big(Z(r)\big)^{\Gamma_R}$ est de type fini, et nul pour presque tout r (où $Z(r)$ est le r-ième tordu à la Tate de Z).*

Démonstration. Soit S une extension finie normale de R telle que $R[p^{-1}] \subseteq S[p^{-1}]$ est étale galoisienne et telle que $S_\infty \otimes_{R_\infty} Z$ est un $S_\infty[p^{-1}]$-module libre. Alors

$$Z(r)^{\Gamma_R} = (S_\infty \otimes_{R_\infty} Z(r))^{\Gamma_{S/R}} \subseteq (S_\infty \otimes_{R_\infty} Z(r))^{\Gamma_S}$$

Si $(S_\infty \otimes_{R_\infty} Z(r))^{\Gamma_R}$ est un $S[p^{-1}]$-module de type fini, nul pour presque tout $r \in \mathbf{Z}$, alors $Z(r)^{\Gamma_R}$ est un $R[p^{-1}]$-module de type fini, nul pour presque tout $r \in \mathbf{Z}$.

Ainsi, quitte à remplacer R par S, on peut supposer que Z est libre de rang n sur $R_\infty[p^{-1}]$. Soit $\mathfrak{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de Z sur $R_\infty[p^{-1}]$. L'action de Γ_R sur Z est décrite dans $\mathfrak{B}$ par un cocycle continu $U\colon \Gamma_R \to \mathsf{GL}_n(R_\infty[p^{-1}])$. Comme Γ_R est topologiquement engendré par un nombre fini d'éléments, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $U_g \in \mathsf{GL}_n(R_m[p^{-1}])$ pour tout $g \in \Gamma_R$. Pour $i \in \{0, \ldots, d\}$ posons $M_i = U_{\gamma_i^{p^m}}$ et

$$R_m^{(i)} = \text{ le normalisé de } \begin{cases} \bigcup\limits_{m' \in \mathbf{N}} R\big[T_j^{(m')}\big]_{1 \leq j \leq d}\big[\varepsilon^{(m)}\big] & \text{si } i = 0 \\ \bigcup\limits_{m' \in \mathbf{N}} R\big[\varepsilon^{(m')}, T_j^{(m')}\big]_{j \neq i}\big[T_i^{(m)}\big] & \text{si } i \neq 0 \end{cases}$$

Quitte à remplacer m par $m' \geq m$ (ce qui revient à remplacer M_i par $M_i^{p^{m'-m}}$ vu que M_i est à coefficients dans $R_m[p^{-1}]$), on peut supposer que les racines p^s-ièmes de l'unité (avec $s \in \mathbf{N}$) autres que 1 ne sont pas valeurs propres de M_i (vu comme élément de $\mathsf{M}_n(\mathrm{Frac}(R_m))$).

<u>Supposons $i = 0$</u>. Si $m' \geq m$, le $R_m^{(0)}[p^{-1}]$-module $R_m^{(0)}\big[\varepsilon^{(m')}, p^{-1}\big]$ est libre de base $\big(\big(\varepsilon^{(m')}\big)^\alpha\big)_{0 \leq \alpha < p^{m'-m}}$. Soit

$$x = t^r \sum_{\alpha=0}^{p^{m'-m}-1} \sum_{j=1}^{n} \big(\varepsilon^{(m')}\big)^\alpha \lambda_{\alpha,j} e_j \in Z(r)$$

avec $\lambda_{\alpha,j} \in R_m^{(0)}[p^{-1}]$. Pour $0 \leq \alpha < p^{m'-m}$, notons $\underline{\lambda}_\alpha$ le vecteur colonne dont les composantes sont $\lambda_{\alpha,1}, \ldots, \lambda_{\alpha,n}$.

Soit $m'' \in \mathbf{N}$ tel que si $c = p^{m''}$, on a $\chi(\gamma_0)^{cp^m} - 1 = p^{m'-m} a_{m'}$ avec $a_{m'} \in \mathbf{Z}_p^\times$. On a

$$\begin{aligned} \gamma_0^{p^m c}(x) &= \chi(\gamma_0)^{p^m c r} t^r \sum_{\alpha=0}^{p^{m'-m}-1} \sum_{j=1}^{n} \big(\varepsilon^{(m')}\big)^{\chi(\gamma_0)^{cp^m}\alpha} \lambda_{\alpha,j} \gamma_0^{p^m c}(e_j) \\ &= \chi(\gamma_0)^{p^m c r} t^r \sum_{\alpha=0}^{p^{m'-m}-1} \sum_{j=1}^{n} \big(\varepsilon^{(m)}\big)^{a_{m'}\alpha} \big(\varepsilon^{(m')}\big)^\alpha \lambda_{\alpha,j} \gamma_0^{p^m c}(e_j) \end{aligned}$$

La projection de $\gamma_0^{p^m c}(x)$ sur $\big(\varepsilon^{(m')}\big)^\alpha$ est donc donnée par le vecteur colonne

$$\chi(\gamma_0)^{p^m c r} \big(\varepsilon^{(m)}\big)^{a_{m'}\alpha} M_0^c \underline{\lambda}_\alpha$$

dans la base $\mathfrak{B}$. Si $\gamma_0^{p^m}(x)=x$, on a donc

$$(*)\qquad M_0^c\underline{\lambda}_\alpha=\chi(\gamma_0)^{-p^mcr}\big(\varepsilon^{(m)}\big)^{-a_{m'}\alpha}\underline{\lambda}_\alpha$$

soit encore

$$\prod_{k=0}^{c-1}\Big(M_0-\big(\varepsilon^{(m'')}\big)^k\chi(\gamma_0)^{-p^mr}\big(\varepsilon^{(m+m'')}\big)^{-a_{m'}\alpha}\,\mathrm{I}_n\Big)\underline{\lambda}_\alpha=0$$

pour tout $\alpha\in\{0\dots,p^{m'-m}-1\}$. Si $\underline{\lambda}_\alpha\neq0$, cela implique qu'il existe $k\in\{0,\dots,c-1\}$ tel que $\chi(\gamma_0)^{-p^mr}\big(\varepsilon^{(m+m'')}\big)^{-a_{m'}\alpha+kp^m}$ est valeur propre de M_0.

Mais si $r_1,r_2\in\mathbf{Z}$, $m_1',m_2',k_1,k_2\in\mathbf{N}$, et si

$$\chi(\gamma_0)^{-p^mr_1}\big(\varepsilon^{(m+m_1'')}\big)^{-a_{m_1'}\alpha+k_1p^m}=\chi(\gamma_0)^{-p^mr_2}\big(\varepsilon^{(m+m_2'')}\big)^{-a_{m_2'}\alpha+k_2p^m}$$

on a $\chi(\gamma_0)^{-p^{2m+m_1''+m_2''}r_1}=\chi(\gamma_0)^{-p^{2m+m_1''+m_2''}r_2}$ en prenant la puissance $p^{m+m_1''+m_2''}$-ième, et donc $r_1=r_2$ par injectivité du caractère cyclotomique. Comme M_0 a un nombre fini de valeurs propres, il existe donc $r_Z\in\mathbf{N}$ tel que $|r|>r_Z$ implique que $\chi(\gamma_0)^{-p^mr}\big(\varepsilon^{(m+m'')}\big)^{-a_{m,m'}\alpha+kp^m}$ n'est pas valeur propre de M_0 pour tout $m'\geq m$ et tout $k\in\{0,\dots,c-1\}$. Si $|r|>r_Z$, on a donc $\underline{\lambda}_\alpha=0$ pour tout $\alpha\in\{0,\dots,p^{m'-m}-1\}$, soit $x=0$, ce qui prouve que $\big(Z(r)\big)^{\Gamma_R}$ est nul pour presque tout $r\in\mathbf{Z}$.

Pour prouver la finitude de $\big(Z(r)\big)^{\Gamma_R}$, on peut supposer que $r=0$. Rappelons que les racines p^s-ièmes de l'unité (avec $s\in\mathbf{N}$) autres que 1 ne sont pas valeurs propres de M_0 : c'est aussi le cas pour M_0^c. Si $\underline{\lambda}_\alpha\neq0$, l'égalité $(*)$ implique donc que $\big(\varepsilon^{(m)}\big)^{-a_{m'}\alpha}=1$ *i.e.* $v(\alpha)\geq m$. On a donc

$$\begin{cases}x\in\bigoplus\limits_{j=1}^nR_{m'}^{(0)}[p^{-1}]e_j\\ m'\geq2m\end{cases}\Rightarrow x\in\bigoplus_{j=1}^nR_{m'-m}^{(0)}[p^{-1}]e_j.$$

Finalement on a

$$\gamma_0(x)=x\Rightarrow x\in\bigoplus_{j=1}^nR_m^{(0)}[p^{-1}]e_j.$$

et donc $Z^{\Gamma_R}\subseteq\bigoplus\limits_{j=1}^nR_m^{(0)}[p^{-1}]e_j$.

Supposons $i\in\{1,\dots,d\}$. Si $m'\geq m$, le $R_m^{(i)}[p^{-1}]$-module $R_m^{(i)}\big[T_i^{(m')},p^{-1}\big]$ est libre de base $\big((T_i^{(m')})^\alpha\big)_{0\leq\alpha<p^{m'-m}}$. Soit

$$x=\sum_{\alpha=0}^{p^{m'-m}-1}\sum_{j=1}^n\big(T_i^{(m')}\big)^\alpha\lambda_{\alpha,j}e_j\in Z$$

avec $\lambda_{\alpha,j}\in R_m^{(i)}\big[T_i^{(m')}\big]$. Pour $0\leq\alpha<p^{m'-m}$, notons $\underline{\lambda}_\alpha$ le vecteur colonne dont les composantes sont $\lambda_{\alpha,1},\dots,\lambda_{\alpha,n}$. On a

$$\gamma_i^{p^m}(x)=\sum_{\alpha=0}^{p^{m'-m}-1}\sum_{j=1}^n\big(\varepsilon^{(m')}\big)^{p^m\alpha}\big(T_i^{(m')}\big)^\alpha\lambda_{\alpha,j}\gamma_i^{p^m}(e_j).$$

La projection de $\gamma_i^{p^m}(x)$ sur $\big(T_i^{(m')}\big)^\alpha$ est donc donnée par le vecteur colonne $\big(\varepsilon^{(m'-m)}\big)^\alpha M_i\underline{\lambda}_\alpha$ dans la base $\mathfrak{B}$. Si $\gamma_i^{p^m}(x)=x$, on a donc

$$M_i\underline{\lambda}_\alpha=\big(\varepsilon^{(m'-m)}\big)^{-\alpha}\underline{\lambda}_\alpha$$

pour tout $\alpha\in\{0\dots,p^{m'-m}-1\}$. Mais comme les racines $p^{m'-m}$-ièmes de l'unité autres que 1 ne sont pas valeurs propres de M_i, on a $\underline{\lambda}_\alpha\neq0\Rightarrow\alpha=0$. Ainsi

$$\gamma_i(x)=x\Rightarrow x\in\bigoplus_{j=1}^nR_m^{(i)}[p^{-1}]e_j.$$

Comme c'est vrai pour $i \in \{0, \dots, d\}$, et comme $\bigcap_{i=0}^{d} R_m^{(i)} = R_m$, le $R[p^{-1}]$-module Z^{Γ_R} est inclus dans $\bigoplus_{j=1}^{n} R_m[p^{-1}]e_j$. Comme ce dernier est de type fini donc noethérien, Z^{Γ_R} est aussi de type fini. $\square$

Remarque 5.3. Dans la preuve qui précède, on a en fait démontré que $\big(Z(r)\big)^{\gamma_0}$ est nul pour presque tout $r \in \mathbf{Z}$.

Lemme 5.4. *Soient $\mathscr{K}$ un corps et M un $\mathscr{K}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action linéaire continue de $\gamma_0^{p^m \mathbf{Z}_p}$ (l'adhérence dans Γ_R du sous-groupe engendré par $\gamma_0^{p^m}$), alors $\mathrm{H}^0\big(\gamma_0^{p^m \mathbf{Z}_p}, M(r)\big)$ et $\mathrm{H}^1\big(\gamma_0^{p^m \mathbf{Z}_p}, M(r)\big)$ sont nuls pour presque tout $r \in \mathbf{Z}$.*

Démonstration. Soit u l'automorphisme de M associé à $\gamma_0^{p^m}$. La cohomologie de $M(r)$ est calculée par le complexe $M(r) \xrightarrow{\gamma_0^{p^m}-1} M(r)$, c'est-à-dire par le complexe

$$M \xrightarrow{\chi(\gamma_0)^{rp^m} u - \mathrm{Id}_M} M.$$

Mais comme u a un nombre fini de valeurs propres, l'endomorphisme $\chi(\gamma_0)^{rp^m} u - \mathrm{Id}_M$ est bijectif sauf pour un nombre fini de valeurs de r. $\square$

5.5. **Invariants des $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^{+}$-représentations potentiellement libres de Γ_R.**

Lemme 5.6. *Soit Y une $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^{+}$-représentation potentiellement libre de rang fini de Γ_R. Alors il existe $r_Y \in \mathbf{N}$ tel que $\big(\mathrm{Fil}^{r_Y+1} Y\big)^{\Gamma_R} = 0$.*

Démonstration. Posons $Z = Y/(\mathrm{Fil}^1 \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^{+})Y$, c'est une $R_\infty[p^{-1}]$-représentation potentiellement libre de rang fini de Γ_R. D'après la proposition 5.2, il existe $r_Y \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $r > r_Y$, on a $\big(Z(r)\big)^{\Gamma_R} = 0$. Soit $r \geq r_Y$ et $y \in \big(\mathrm{Fil}^{r+1} Y\big)^{\Gamma_R}$. Notons $\overline{y}$ l'image de y dans $\mathrm{Gr}^{r+1} Y$, on a $g(\overline{y}) = \overline{y}$ pour tout $g \in \Gamma_R$. On a

$$\mathrm{Gr}^{r+1} Y = \bigoplus_{\substack{\underline{n} \in \mathbf{N}^{d+1} \\ |\underline{n}| = r+1}} Z(n_0)\underline{u}^{\underline{n}}$$

où pour $\underline{n} = (n_0, \dots, n_d) \in \mathbf{N}^{d+1}$ on a $|\underline{n}| = n_0 + \cdots + n_d$ et $\underline{u}^{\underline{n}} = \prod_{i=1}^{d} u_i^{n_i}$. Écrivons

$$\overline{y} = \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbf{N}^{d+1} \\ |\underline{n}| = r+1}} \overline{y}_{\underline{n}} t^{n_0} \underline{u}^{\underline{n}}$$

avec $\overline{y}_{\underline{n}} \in Z$. Comme $Z(r+1)^{\Gamma_R} = 0$ (car $r \geq r_Y$), on a $\overline{y}_{(r+1,0,\dots,0)} = 0$.

Soit $s \in \mathbf{N}_{>0}$ tel que pour tout $\underline{n} \in \mathbf{N}^{d+1}$ avec $|\underline{n}| = r+1$ et $n_1, \dots, n_d < s$, on a $\overline{y}_{\underline{n}} = 0$. Si $i \in \{1, \dots, d\}$ et $\lambda \in \mathbf{Z}_p$, on a $\gamma_i^\lambda(u_i) = T_i - [\varepsilon]^\lambda[\widetilde{T}_i] \equiv u_i - \lambda t T_i \mod \mathrm{Fil}^2 \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^{+}$, et donc

$$\gamma_i^\lambda\big(t^{n_0}\underline{u}^{\underline{n}}\big) = t^{n_0}(u_i - \lambda t T_i)^{n_i} \prod_{j \neq i} u_j^{n_j} \mod \mathrm{Fil}^{r+2} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^{+}$$

d'où

$$\gamma_i^\lambda(\overline{y}) = \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbf{N}^{d+1} \\ |\underline{n}| = r+1}} \gamma_i^\lambda(\overline{y}_{\underline{n}}) t^{n_0} (u_i - \lambda t T_i)^{n_i} \prod_{j \neq i} u_j^{n_j}.$$

Fixons $i \in \{1, \dots, d\}$ et $\underline{n} \in \mathbf{N}^{d+1}$ tel que $|\underline{n}| = r+1$ et $n_i = s$. Le coefficient de $t^{n_0+n_i} \prod_{j \neq i} u_j^{n_j}$ dans $\gamma_i^\lambda(\overline{y})$ vaut donc $\sum_{k=0}^{n_0+n_i} \gamma_i^\lambda(\overline{y}_{\underline{n}(k)})(-\lambda T_i)^k$ (où $\underline{n}(k) = (n_0 + n_i - k, n_1, \dots, n_{i-1}, k, n_{i+1}, \dots, n_d)$). Comme $\gamma_i^\lambda(\overline{y}) = \overline{y}$, cela implique que $\sum_{k=0}^{n_0+n_i} \gamma_i^\lambda(\overline{y}_{\underline{n}(k)})(-\lambda T_i)^k = \overline{y}_{\underline{n}(0)}$. Mais par hypothèse, on a $\overline{y}_{\underline{n}(k)} = 0$ si $k < s = n_i$, de sorte qu'en fait $\sum\limits_{k=n_i}^{n_0+n_i} \gamma_i^{\lambda}(\overline{y}_{\underline{n}(k)})(-\lambda T_i)^k = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbf{Z}_p$. Supposons $\lambda \neq 0$: en divisant par λ^s on a

$$(-T_i)^s \gamma_i^{\lambda}(\overline{y}_{\underline{n}}) = -\sum_{k=s+1}^{n_0+s} \gamma_i^{\lambda}(\overline{y}_{\underline{n}(k)})\lambda^{k-s}(-T_i)^k.$$

En faisant tendre λ vers 0, il vient $(-T_i)^s \overline{y}_{\underline{n}} = 0$ *i.e.* $\overline{y}_{\underline{n}} = 0$. Comme c'est vrai pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$ et tout $\underline{n} \in \mathbf{N}^{d+1}$ tel que $n_i = s$, on en déduit que pour tout $\underline{n} \in \mathbf{N}^{d+1}$ avec $|\underline{n}| = r+1$ et $n_1, \ldots, n_d \leq s$, on a $\overline{y}_{\underline{n}} = 0$. Une récurrence finie montre donc que $\overline{y} = 0$, et donc que $y \in \big(\operatorname{Fil}^{r+2} Y\big)^{\Gamma_R}$. Ainsi $y \in \bigcap\limits_{r \geq r_Y} \operatorname{Fil}^{r+1} Y = 0$ (car Y est projectif et $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$ séparé pour la filtration). On a bien $\big(\operatorname{Fil}^{r_Y+1} Y\big)^{\Gamma_R} = 0$. □

Proposition 5.7. *Soit Y une $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$-représentation potentiellement libre de rang fini de Γ_R. Alors Y^{Γ_R} est un $R[p^{-1}]$-module de type fini. En outre, la suite $\Big(\big(t^{-n}Y\big)^{\Gamma_R}\Big)_{n \in \mathbf{N}}$ est constante à partir d'un certain rang. En particulier, si Y est une l_{dR}-représentation régulière de Γ_R, alors Y^{Γ_R} est un $R[p^{-1}]$-module de type fini.*

Démonstration. D'après le lemme 5.6, il existe $r_Y \in \mathbf{N}$ tel que $\big(\operatorname{Fil}^{r_Y+1} Y\big)^{\Gamma_R} = 0$. Posons $Z = Y/\operatorname{Fil}^{r_Y+1} Y$. C'est une $R_\infty[p^{-1}]$-représentation potentiellement libre de Γ_R : d'après la proposition 5.2, le $R[p^{-1}]$-module Z^{Γ_R} est de type fini (donc noethérien). On dispose de la projection $f\colon Y^{\Gamma_R} \to Z^{\Gamma_R}$. Comme $\operatorname{Ker}(f) = \big(\operatorname{Fil}^{r_Y+1} Y\big)^{\Gamma_R} = 0$, elle est injective et Y^{Γ_R} est de type fini (car $R[p^{-1}]$ est noethérien).

Si maintenant $n \in \mathbf{N}$, on a la suite exacte $0 \to t^{-n}Y \to t^{-n-1}Y \to (Y/tY)(-n) \to 0$, d'où la suite exacte

$$0 \to \big(t^{-n}Y\big)^{\Gamma_R} \to \big(t^{-n-1}Y\big)^{\Gamma_R} \to \mathrm{H}^0(\Gamma_R, (Y/tY)(-n))$$

Mais d'après le lemme 5.4 appliqué à $m = 0$, $\mathscr{K} = \operatorname{Frac}\big(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+/t\,\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\big) = \operatorname{Frac}(R_\infty[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d]\!])$ et $M = \mathscr{K} \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+/t\,\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} (Y/tY)$, on a $\mathrm{H}^0(\mathbf{Z}_p\gamma_0, \mathscr{K} \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+/t\,\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} (Y/tY)(-n)) = 0$ et *a fortiori*

$$\mathrm{H}^0(\Gamma_R, (Y/tY)(-n)) = 0$$

pour presque tout $n \in \mathbf{N}$. Il en résulte que la suite $\Big(\big(t^{-n}Y\big)^{\Gamma_R}\Big)_{n \in \mathbf{N}}$ est stationnaire. □

Proposition 5.8. *Soit Y une $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$-représentation (resp. une l_{dR}-représentation) de Γ_R sans torsion. Alors l'application naturelle*

$$\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} \to Y$$
$$(resp.\ \mathrm{l}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} \to Y)$$

est injective.

Démonstration. Soit $B = \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$ (resp. $B = \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}$). On a

$$R[p^{-1}] \subseteq B^{\Gamma_R} \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{G}_R} = R[p^{-1}]$$

(*cf* [7, Proposition 5.2.12]) et donc $B^{\Gamma_R} = R[p^{-1}]$. En outre, comme $R_\infty[p^{-1}]$ est libre donc fidèlement plat sur $R[p^{-1}]$, l'anneau B est fidèlement plat sur $R[p^{-1}]$ (*cf* [16, Exercice 7.4]). Un raisonnement identique à celui de [7, Proposition 2.18] (utilisant le fait que $\operatorname{Frac}(R_\infty)[\![u_1, \ldots, u_d, t]\!]$ est un anneau local régulier donc factoriel) montre que $\operatorname{Frac}(B)^{\Gamma_R} = \operatorname{Frac}(R)$ (si on veut, on peut aussi plonger $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$ dans $\widehat{R_{\infty,(p)}}[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!]$ et invoquer [7, Proposition 2.18] pour montrer que $\operatorname{Frac}(B)^{\Gamma_R} \subseteq \operatorname{Frac}(R_\infty)$ et donc $\operatorname{Frac}(B)^{\Gamma_R} = \operatorname{Frac}(R)$). On peut donc appliquer [7, Proposition 3.3] : l'application $B \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} \to Y$ est injective (en fait, dans *loc. cit.*, on suppose que $Y = B^h$, mais seul le fait que Y est sans torsion est utilisé, pour avoir l'injectivité de l'application $Y \to \operatorname{Frac}(B) \otimes_B Y$). □

Lemme 5.9. *L'anneau C est fidèlement plat sur $R_\infty[p^{-1}]$.*

Démonstration. Soit $I \subseteq R_\infty[p^{-1}]$ un idéal de type fini. Il existe $m \in \mathbf{N}$ et $J \subseteq R_m[p^{-1}]$ un idéal tels que $I = \mathrm{Im}\big(R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R_m[p^{-1}]} J \to R_\infty[p^{-1}]\big)$. Notons $s\colon R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R_m[p^{-1}]} J \to I$ la surjection obtenue. Comme C est plat sur $R_m[p^{-1}]$ (*cf* [7, Théorème 3.2.3]), l'application naturelle $C \otimes_{R_m[p^{-1}]} J \to C$ est injective. On a la factorisation

$$\begin{tikzcd} C \otimes_{R_m[p^{-1}]} J \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "C\otimes s"'] & & C \\ & C \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} I \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Il en résulte que l'application $C \otimes s$ est injective, donc bijective, ce qui prouve l'injectivité de $C \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} I \to C$ et la platitude de C sur $R_\infty[p^{-1}]$.

Montrons que C est fidèle sur $R_\infty[p^{-1}]$. Il s'agit de voir que l'application $f\colon \mathrm{Spec}(C) \to \mathrm{Spec}(R_\infty[p^{-1}])$ est surjective. Supposons que ce n'est pas le cas : il existe $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(R_\infty[p^{-1}])$ qui n'est pas dans l'image de f. Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R[p^{-1}] \in \mathrm{Spec}(R[p^{-1}])$, alors aucun des idéaux premiers de $R_\infty[p^{-1}]$ qui sont au-dessus de $\mathfrak{p}$ n'appartient à l'image de f, parce que ceux-ci sont conjugués sous l'action de Γ_R (*cf* [16, Theorem 9.3]). Il en résulte que $\mathfrak{p}$ n'appartient pas à l'image de l'application $\mathrm{Spec}(C) \to \mathrm{Spec}(R[p^{-1}])$. Mais cette dernière est surjective d'après [7, Théorème 3.2.3] : contradiction. $\square$

Lemme 5.10. *Pour tout $r \in \mathbf{N}$, l'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ / \mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est fidèlement plat sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$.*

Démonstration. Comme $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}[\![u_1, \ldots, u_d]\!]$ (*cf* [7, Proposition 5.2.2]), l'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ / t\, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ = C[\![u_1, \ldots, u_d]\!]$ est plat sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / t\, \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ = R_\infty[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d]\!]$ d'après le lemme 5.9. Pour $r \in \mathbf{N}_{>0}$, posons $B_r = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ / t^{r+1}\, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Comme $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$ n'a pas de t-torsion, on a la suite exacte

$$0 \to \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / t^r\, \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ \xrightarrow{t} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / t^{r+1}\, \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ \to \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / t\, \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ \to 0$$

qui donne lieu à la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / t^{r+1}\, \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+}(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / t\, \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+, B_r) \to B_{r-1} \xrightarrow{t} B_r \to B_0 \to 0.$$

Comme $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ n'a pas de t-torsion ([7, Proposition 5.1.5]), on a donc

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / t^{r+1}\, \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+}(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / t\, \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+, B_r) = 0.$$

On peut donc appliquer le critère local de platitude (*cf* [16, Theorem 22.3]) : l'anneau B_r est plat sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / t^{r+1}\, \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$ pour tout $r \in \mathbf{N}$. Via le changement de base $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / t^{r+1}\, \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ \to \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$, on en déduit la platitude de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ / \mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$. Reste à vérifier la fidélité.

Soit M un $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$-module tel que $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ / \mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} M = 0$. En réduisant modulo $\mathrm{Fil}^1 \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$, on en déduit que $C \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} \big(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \mathrm{Fil}^1 \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\big) \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} M = 0$. Par fidélité de C sur $R_\infty[p^{-1}]$ (*cf* lemme 5.9), on a $\big(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \mathrm{Fil}^1 \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\big) \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} M = 0$ *i.e.* $M = \big(\mathrm{Fil}^1 \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\big) M$. On a donc

$$M = \big(\mathrm{Fil}^1 \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\big) M = \big(\mathrm{Fil}^2 \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\big) M = \cdots = \big(\mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\big) M = 0$$

et on a fini. $\square$

Remarque 5.11. Il serait intéressant de savoir si $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est plat sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$. Cela simplifierait la preuve du corollaire 5.12 (on n'aurait pas à travailler modulo $\mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$ pour tout $r \in \mathbf{N}$). Le problème est qu'on ne peut pas appliquer le critère local de platitude parce que $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$ n'est pas noethérien.

Corollaire 5.12. *Soit W une $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-représentation (resp. une B_{dR}-représentation régulière) libre de $\mathcal{G}_R$. Alors l'application naturelle*

$$\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} W^{\mathcal{G}_R} \to W$$

$$(\textit{resp. } \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} W^{\mathcal{G}_R} \to W)$$

est injective.

Démonstration. Posons $Y = \big(W^{\mathcal{H}_R}\big)_{\mathrm{f}}$ et $Y_r = Y/\operatorname{Fil}^{r+1} Y$ pour $r \in \mathbf{N}$. D'après les corollaires 3.5 et 3.21, on a un isomorphisme $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} Y \to W$. Par ailleurs, on a $W^{\mathcal{G}_R} \subseteq Y$ (*cf* proposition 3.19), de sorte que $W^{\mathcal{G}_R} = Y^{\Gamma_R}$. Il s'agit donc de prouver que l'application $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} Y$ est injective.

Commençons par montrer que pour tout $r \in \mathbf{N}$, l'application naturelle

$$f_r \colon \big(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\big) \otimes_{R[p^{-1}]} Y_r^{\Gamma_R} \to Y_r$$

est injective. On procède par récurrence sur r, le cas $r = 0$ résultant de la descente étale. Supposons $r \in \mathbf{N}_{>0}$. On a la suite exacte de $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$-modules $0 \to \operatorname{Gr}^r Y \to Y_r \to Y_{r-1} \to 0$ d'où une suite exacte de $R[p^{-1}]$-modules $0 \to \big(\operatorname{Gr}^r Y\big)^{\Gamma_R} \to Y_r^{\Gamma_R} \to Y_{r-1}^{\Gamma_R}$ et donc une suite exacte exacte de $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$-modules

$$0 \to \big(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\big) \otimes_{R[p^{-1}]} \big(\operatorname{Gr}^r Y\big)^{\Gamma_R} \to \big(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\big) \otimes_{R[p^{-1}]} Y_r^{\Gamma_R} \to \big(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\big) \otimes_{R[p^{-1}]} Y_{r-1}^{\Gamma_R}$$

par platitude de $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$ sur $R[p^{-1}]$. Comme $\big(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\big) \otimes_{R[p^{-1}]} \big(\operatorname{Gr}^r Y\big)^{\Gamma_R} \simeq R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} \big(\operatorname{Gr}^r Y\big)^{\Gamma_R}$ et $\big(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\big) \otimes_{R[p^{-1}]} Y_{r-1}^{\Gamma_R} \simeq \big(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\big) \otimes_{R[p^{-1}]} Y_{r-1}^{\Gamma_R}$, on en déduit le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} \big(\operatorname{Gr}^r Y\big)^{\Gamma_R} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_{(r)}"] & \big(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\big) \otimes_{R[p^{-1}]} Y_r^{\Gamma_R} \arrow[r] \arrow[d, "f_r"] & \big(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\big) \otimes_{R[p^{-1}]} Y_{r-1}^{\Gamma_R} \arrow[d, "f_{r-1}"] \\
\operatorname{Gr}^r Y \arrow[r, hook] & Y_r \arrow[r] & Y_{r-1}
\end{tikzcd}$$

L'application f_{r-1} est injective par hypothèse de récurrence et $f_{(r)}$ l'est par descente étale (on voit $\operatorname{Gr}^r Y$ comme une $R_\infty[p^{-1}]$-représentation), l'injectivité de f_r en résulte.

Par ailleurs, d'après la proposition 5.7 et sa preuve, l'application $Y^{\Gamma_R} \to Y_r^{\Gamma_R}$ est injective pour $r \geq r_Y$. Il en est de même de $\big(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\big) \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} \to \big(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\big) \otimes_{R[p^{-1}]} Y_r^{\Gamma_R}$ (car $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$ est libre sur $R[p^{-1}]$), et donc de $\big(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\big) \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} \to Y_r$. Comme $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est plat sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$ d'après le lemme 5.10, l'application

$$\big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big) \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} \to \big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big) \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} Y$$

est injective pour tout $r \geq r_Y$. Comme Y^{Γ_R} est de type fini sur $R[p^{-1}]$ d'après la proposition 5.7, on a $\varprojlim_r \big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big) \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R}$ (*cf* la preuve de [7, Théorème 5.4.1]). De même, comme Y est projectif de rang fini sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$, on a $\varprojlim_r \big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Fil}^{r+1} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big) \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} Y = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} Y$. En passant à la limite projective, on a l'injectivité de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} Y$. □

Remarque 5.13. L'énoncé qui précède généralise [7, proposition 8.2.4], qui traite le cas des B_{dR}-représentations de la forme $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ avec $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$. La méthode de *loc. cit.*, qui utilise des techniques de localisation, est totalement différente.

Soit Y une $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$-représentation (resp. une l_{dR}-représentation) potentiellement libre de Γ_R. Si $y \in Y^{\Gamma_R}$, alors $\nabla_i(y) = 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, d\}$ d'après les formules donnant ∇_i. On a donc l'inclusion $Y^{\Gamma_R} \subseteq Y^{\widetilde{\nabla}=0}$. Par $R_\infty[p^{-1}]$-linéarité, on en déduit une application

$$R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} \to Y^{\widetilde{\nabla}=0}.$$

Proposition 5.14. *Si Y est une $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$-représentation potentiellement libre (resp. une l_{dR}-représentation régulière) de Γ_R, l'application*

$$R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} \to Y^{\widetilde{\nabla}=0}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Soit Y une $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^{+}$-représentation potentiellement libre de Γ_R. Soit $R \subseteq S$ une extension finie normale telle que $R[p^{-1}] \subseteq S[p^{-1}]$ est étale galoisienne et $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^{+}(S) \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^{+}} Y$ est libre. Ce dernier est muni de l'action de $\Gamma_{S/R}$.

Pour $r \in \mathbf{N}$, posons $Y_r = Y/\operatorname{Fil}^{r+1} Y$ et $Y_r^{\widetilde{\nabla}} = \{y \in Y_r \ (\forall i \in \{0,\ldots,d\})\ \nabla_i(y) = 0\}$ (remarquons que la connexion $\widetilde{\nabla}$ n'a pas de sens sur Y_r). Soit $\mathfrak{B} = (e_1,\ldots,e_\delta)$ une base de $Y_{S,r} := S_\infty[p^{-1}] \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} Y_r$ sur $S_\infty[p^{-1}]$. Pour $m \in \mathbf{N}$, posons $Y_{S,r,m} = \bigoplus\limits_{j=1}^{\delta} S_m[p^{-1}]e_j$. L'action de $\Gamma_{S/R}$ sur $Y_{S,r}$ est décrite dans la base $\mathfrak{B}$ par un cocycle continu $\Gamma_{S/R} \to \mathsf{GL}_\delta(S_\infty[p^{-1}])$: il existe $m_0 \in \mathbf{N}$ tel que ce cocycle est en fait à valeurs dans $\mathsf{GL}_\delta(S_{m_0}[p^{-1}])$ (car $\Gamma_{S/R}$ est topologiquement de type fini). Il en résulte que les opérateurs ∇_i sont déjà définis sur Y_{S,r,m_0}.

Soit $m \geq m_0$. Comme l'action de Γ_S sur $Y_{S,r,m}^{\widetilde{\nabla}}$ est discrète, elle se factorise à travers un quotient de la forme $\Gamma_S/\Gamma_{S_{m'}}$ avec $m' \geq m$. Il en est alors de même de l'action de Γ_S sur $Y_{S,r,m'}^{\widetilde{\nabla}} = S_{m'}[p^{-1}] \otimes_{S_m[p^{-1}]} Y_{S,r,m}^{\widetilde{\nabla}}$. Par descente étale, on a donc $S_{m'}[p^{-1}] \otimes_{S[p^{-1}]} Y_{S,r,m'}^{\Gamma_S} \xrightarrow{\sim} Y_{S,r,m'}^{\widetilde{\nabla}}$. En passant à la limite inductive, on a donc

$$S_\infty[p^{-1}] \otimes_{S[p^{-1}]} Y_{S,r}^{\Gamma_S} \xrightarrow{\sim} Y_{S,r}^{\widetilde{\nabla}}$$

Mais $Y_{S,r}^{\Gamma_S} \xrightarrow{\sim} S[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y_{S,r}^{\Gamma_{S/R}} = S[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y_r^{\Gamma_R}$ (par descente étale encore) et $Y_{S,r}^{\widetilde{\nabla}} = S_\infty[p^{-1}] \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} Y_r^{\widetilde{\nabla}}$. On a donc $S_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y_r^{\Gamma_R} \xrightarrow{\sim} S_\infty[p^{-1}] \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} Y_r^{\widetilde{\nabla}}$. Comme $S_\infty[p^{-1}]$ est fidèlement plat sur $R_\infty[p^{-1}]$, on a

$$R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y_r^{\Gamma_R} \xrightarrow{\sim} Y_r^{\widetilde{\nabla}}$$

On a $Y = \varprojlim\limits_r Y_r$, de sorte que $Y^{\Gamma_R} = \varprojlim\limits_r Y_r^{\Gamma_R}$ et $Y^{\widetilde{\nabla}=0} = \varprojlim\limits_r Y_r^{\widetilde{\nabla}}$. En particulier, on a un isomorphisme

$$\varprojlim_r R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y_r^{\Gamma_R} \xrightarrow{\sim} Y^{\widetilde{\nabla}=0}$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base de $R_\infty[p^{-1}]$ sur $R[p^{-1}]$, et $(f_n^\vee)_{n\in\mathbf{N}}$ la base duale. Pour tout $r, n \in \mathbf{N}$, on dispose de $f_n^\vee \otimes 1\colon R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y_r^{\Gamma_R} \to Y_r^{\Gamma_R}$. En passant à la limite projective, on en déduit une application

$$f_n^\vee\colon \varprojlim_r R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y_r^{\Gamma_R} \to Y^{\Gamma_R}$$

et donc un homomorphisme $R[p^{-1}]$-linéaire

$$f^\vee = \prod_{n\in\mathbf{N}} f_n^\vee f_n\colon \varprojlim_r R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y_r^{\Gamma_R} \to \prod_{n\in\mathbf{N}} Y^{\Gamma_R} f_n$$

Mais d'après le lemme 5.6 et sa preuve, pour $r \geq r_Y$, les applications de transition $Y_{r+1}^{\Gamma_R} \to Y_r^{\Gamma_R}$ sont injectives. Il en résulte que l'application $f^\vee$ se factorise en une application

$$f^\vee\colon \varprojlim_r R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y_r^{\Gamma_R} \to \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} Y^{\Gamma_R} f_n = R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R}$$

inverse de l'application naturelle

$$R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} \to \varprojlim_r R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y_r^{\Gamma_R}$$

cette dernière est donc un isomorphisme, et donc l'application

$$R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} \to Y^{\widetilde{\nabla}=0}$$

est un isomorphisme.

Soient Y une l_{dR}-représentation régulière de Γ_R et $\mathcal{Y}$ une $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^{+}$-représentation potentiellement libre de Γ_R telle que $Y = \mathcal{Y}[t^{-1}]$. D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'application naturelle $R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} (t^{-n}\mathcal{Y})^{\Gamma_R} \to (t^{-n}\mathcal{Y})^{\widetilde{\nabla}=0}$ est bijective.

D'après la proposition 5.7, on a $Y^{\Gamma_R} = \big(t^{-n}\mathcal{Y}\big)^{\Gamma_R}$ pour $n \in \mathbf{N}$ assez grand : on a alors un isomorphisme $R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} \xrightarrow{\sim} (t^{-n}\mathcal{Y})^{\widetilde{\nabla}=0}$. Comme $Y^{\widetilde{\nabla}} = \varinjlim_n (t^{-n}\mathcal{Y})^{\widetilde{\nabla}=0}$, on en déduit que l'application

$$R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} \to Y^{\widetilde{\nabla}=0}$$

est un isomorphisme. □

Remarque 5.15. Pour l'injectivité, on peut aussi invoquer la proposition 5.8 et la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} \arrow[r] \arrow[d] & Y^{\widetilde{\nabla}=0} \arrow[d] \\ \mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Par contre, la surjectivité de l'application $R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} \to \varprojlim_r R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y_r^{\Gamma_R}$ nécessite la proposition 5.7.

Définition 5.16. Soit Y un module à connexion potentiellement libre sur $\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}$ (resp. l_{dR}). On dit que Y est *trivial* (ou que la connexion sur Y est triviale) si l'application naturelle

$$\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} Y^{\widetilde{\nabla}_Y=0} \to Y \quad (\text{resp. } \mathrm{l}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} Y^{\widetilde{\nabla}_Y=0} \to Y)$$

est un isomorphisme.

Théorème 5.17. *(1) Soient Y_1 et Y_2 deux $\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}$-représentations potentiellement libres de $\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}$. Alors on a un isomorphisme*

$$R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} \mathrm{Hom}_{\Gamma_R}(Y_1, Y_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{R}^{\mathrm{pl}}_{\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}}}(\Delta(Y_1), \Delta(Y_2)).$$

(2) Soit Y une $\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}$-représentation potentiellement libre de Γ_R. Alors Y est triviale (i.e. l'application naturelle $\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} \to Y$ est un isomorphisme) si et seulement si $\Delta(Y)$ est triviale.

Démonstration. (1) Posons $Y = \mathrm{Hom}_{\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}}(Y_1, Y_2)$. C'est une $\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}$-représentation potentiellement libre de Γ_R, et on a $Y^{\Gamma_R} = \mathrm{Hom}_{\Gamma_R}(Y_1, Y_2)$ et $Y^{\widetilde{\nabla}_Y} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{R}^{\mathrm{pl}}_{\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}}}(\Delta(Y_1), \Delta(Y_2))$: il suffit d'appliquer la proposition 5.14.

(2) D'après la proposition 5.14, l'application $R_\infty[p^{-1}] \otimes_{R[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} \to Y^{\widetilde{\nabla}=0}$ est un isomorphisme. On a donc le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} Y^{\Gamma_R} \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "(2)"'] & & \mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{R_\infty[p^{-1}]} Y^{\widetilde{\nabla}_Y=0} \arrow[dl, "(1)"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

de sorte que (1) est bijective si et seulement si (2) l'est.

□

6. Le cas géométrique, lien avec les modules de Higgs

Soient A une $\mathbf{Q}$-algèbre, $t \in A$ et $\mathscr{A} := A[\![u_1, \ldots, u_d]\!]$. On note $\widehat{\Omega}_{\mathscr{A}/A} = \bigoplus_{i=1}^d \mathscr{A}\, \mathrm{d}\, u_i$ le module des A-différentielles continues de $\mathscr{A}$ et, si t n'est pas diviseur de zéro, $\widehat{\Omega}^+_{\mathscr{A}/A} = \bigoplus_{i=1}^d \mathscr{A} \frac{\mathrm{d}\, u_i}{t}$ le module des A-différentielles continues à pôles logarithmiques le long de t de $\mathcal{A}$.

Lemme 6.1. *(cf* [15, Proposition 8.9]*). Soit M un $\mathscr{A}$-module potentiellement libre (i.e. tel qu'il existe une A-algèbre finie étale A' telle que $A' \otimes_A M$ est libre sur $A' \otimes_A \mathscr{A}$). Supposons M muni d'une connexion intégrable $\nabla \colon M \to M \otimes_{\mathscr{A}} \widehat{\Omega}_{\mathscr{A}/A}$.*

(1) Le A-module $M^{\nabla=0}$ des sections horizontales est potentiellement libre, de rang égal au rang de M sur $\mathscr{A}$, et on a un isomorphisme

$$\mathscr{A}\otimes_A M^{\nabla=0}\xrightarrow{\sim} M$$

de modules à connection.

(2) Munissons M de la filtration donnée par $\operatorname{Fil}^r M=(t,u_1,\dots,u_d)^r M$ *pour tout $r\in\mathbf{N}$. Alors pour tout $r\in\mathbf{N}$, on a*

$$M^{\nabla=0}\cap\operatorname{Fil}^r M=t^r M^{\nabla=0}$$

Démonstration. (1) On suit l'argument de *loc. cit.*. Quitte à remplacer A par une A-algèbre finie étale A', on peut supposer que M est libre sur $\mathscr{A}$. On pose alors $D_i=\nabla(\mathrm{d}/\mathrm{d}\,u_i)$ pour $i\in\{1,\dots,d\}$, et pour tout $\underline{n}=(n_1,\dots,n_d)\in\mathbf{N}^d$:

$$\underline{n}!=\prod_{i=1}^d n_i!\quad(-u)^{\underline{n}}=\prod_{i=1}^d(-u_i)_i^n\quad\text{ et }\quad D^{[\underline{n}]}=\frac{1}{\underline{n}!}\prod_{i=1}^d D_i^{n_i}$$

(on a $D^{[\underline{0}]}=\mathrm{Id}_M$). Soit alors $P=\sum_{\underline{n}\in\mathbf{N}^d}(-u)^{\underline{n}}D^{[\underline{n}]}\colon M\to M$ (la somme converge bien pour la topologie $(u_1,\dots,u_d)$-adique).

Pour $f\in\mathscr{A}$ et $m\in M$, on a $P(fm)=f(0)P(m)$ donc $(u_1,\dots,u_d)M\subseteq\operatorname{Ker}(P)$, et comme $P(m)\equiv m\mod(u_1,\dots,u_d)M$, on a en fait $\operatorname{Ker}(P)=(u_1,\dots,u_d)M$. Par ailleurs, on a $P_{|M^{\nabla=0}}=\mathrm{Id}_{M^{\nabla=0}}$ et $\operatorname{Im}(P)\subseteq M^{\nabla=0}$, de sorte que P est un projecteur A-linéaire de M sur $M^{\nabla=0}$. En particulier, P induit un isomorphisme

$$M/(u_1,\dots,u_d)M\xrightarrow{\sim}M^{\nabla=0}$$

Cela implique que M^{∇} est un A-module (potentiellement) libre de rang égal au rang de M sur $\mathscr{A}$. Par ailleurs, on dispose d'un homomorphisme $\mathscr{A}$-linéaire

$$\rho\colon\mathscr{A}\otimes_A M^{\nabla=0}\to M$$

qui est horizontal. C'est un isomorphisme, parce que les deux $\mathscr{A}$-modules sont libres de même rang et que ρ induit l'identité modulo $(u_1,\dots,u_d)\mathscr{A}$.

(2) Si $\underline{n}=(n_0,\dots,n_d)\in\mathbf{N}^{d+1}$, on pose $u^{\underline{n}}=\prod_{i=1}^d u_i^{n_i}$. Comme $\operatorname{Ker}(P)=(u_1,\dots,u_d)M$, on a

$$P(\operatorname{Fil}^r M)=P\left(\sum_{\substack{\underline{n}\in\mathbf{N}^{d+1}\\|\underline{n}|=r}}P(t^{n_0}u^{\underline{n}}M)\right)=t^rP(M)=t^rM^{\nabla=0}$$

vu que P est un projecteur sur $M^{\nabla=0}$. On a donc

$$t^rM^{\nabla=0}\subseteq M^{\nabla=0}\cap\operatorname{Fil}^r M=P(M^{\nabla=0}\cap\operatorname{Fil}^r M)\subseteq P(\operatorname{Fil}^r M)=t^rM^{\nabla=0}$$

et donc $M^{\nabla=0}\cap\operatorname{Fil}^r M=t^rM^{\nabla=0}$.

□

Corollaire 6.2. *Supposons t non diviseur de zéro. Soit M un $\mathscr{A}$-module potentiellement libre muni d'une connexion intégrable $\nabla\colon M\to M\otimes_{\mathscr{A}}\widehat{\Omega}^+_{\mathscr{A}/A}$. Écrivons $\nabla=\sum_{i=1}^d\nabla_i\otimes\frac{\mathrm{d}\,u_i}{t}$. Alors M est trivial (comme module à connexion) si et seulement si $\nabla_i(M)\subseteq tM$ pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$.*

Démonstration. Si $\nabla_i(M)\subseteq tM$ pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$, alors ∇ est en fait une connexion intégrable $M\to M\otimes_{\mathscr{A}}\widehat{\Omega}_{\mathscr{A}/A}$: il suffit d'appliquer le lemme qui précède. Réciproquement, supposons que ∇ est triviale : on a $M\xrightarrow{\sim}M^{\nabla=0}\otimes_A\mathscr{A}$ muni de la connexion triviale. Mais $\mathrm{d}\,u_i=t\otimes\frac{\mathrm{d}\,u_i}{t}$, donc $\mathrm{d}\mathscr{A}\subseteq t\widehat{\Omega}^+_{\mathscr{A}/A}$, de sorte que $\nabla_i(M)\subseteq tM$ pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$. □

Proposition 6.3. *Soient Y une $\mathbb{I}^+_{\mathrm{dR}}$-représentation potentiellement libre de $\widetilde{\Gamma}_R$ et $\widetilde{\nabla}_Y\colon Y\to Y\otimes_{\mathbb{I}^+_{\mathrm{dR}}}\Omega^+_{\mathbb{I}^+_{\mathrm{dR}}/\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}}$ la connexion associée. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Y est triviale comme représentation de $\widetilde{\Gamma}_R$;
(2) le module à connexion $(Y, \widetilde{\nabla}_Y)$ est trivial ;
(3) pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, on a $\nabla_i(Y) \subseteq tY$.
Lorsque ces conditions sont remplies, l'application naturelle

$$\mathbb{R}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{R}} Y^{\widetilde{\Gamma}_R} \to Y^{\widetilde{\nabla}=0}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}$-représentations de $\widetilde{\Gamma}_R$, le $\mathbb{R}$-module $Y^{\widetilde{\Gamma}_R}$ est projectif, et

$$Y^{\widetilde{\Gamma}_R} \cap \mathrm{Fil}^r Y = t^r Y^{\widetilde{\Gamma}_R}$$

pour tout $r \in \mathbf{N}$.

Démonstration. L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) est triviale. L'équivalence de (2) et (3) résulte du corollaire 6.2.

Suppposons le module à connexion $(Y, \widetilde{\nabla}_Y)$ trivial : $Y \xrightarrow{\sim} Y^{\widetilde{\nabla}=0} \otimes_{\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}} \mathbb{I}^+_{\mathrm{dR}}$. En particulier, le $\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}$-module $Y^{\widetilde{\nabla}=0}$ est potentiellement libre de même rang que Y sur $\mathbb{I}^+_{\mathrm{dR}}$.

Pour $r \in \mathbf{N}_{>0}$, posons $Y_r^{\widetilde{\nabla}} = Y^{\widetilde{\nabla}=0}/t^r Y^{\widetilde{\nabla}=0}$. D'après le lemme 6.1 (2), on a $Y^{\widetilde{\nabla}=0} \cap \mathrm{Fil}^r Y = t^r Y^{\widetilde{\nabla}=0}$, de sorte que $Y_r^{\widetilde{\nabla}} \subseteq (Y/\mathrm{Fil}^r Y)^{\widetilde{\nabla}}$ (où l'exposant $\widetilde{\nabla}$ désigne le sous-$\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}$-module des éléments tués par ∇_i pour $i \in \{1, \ldots, d\}$). L'action de $\widetilde{\Gamma}_R$ sur $(Y/\mathrm{Fil}^r Y)^{\widetilde{\nabla}}$ est discrète : il en est de même sur $Y_r^{\widetilde{\nabla}}$. Comme ce dernier est potentiellement libre sur $\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}/t^r \mathbb{R}_{\mathrm{dR}}$ et que $\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}/t^r \mathbb{R}_{\mathrm{dR}} = \mathbb{R}_\infty/t^r \mathbb{R}_\infty$, un raisonnement identique à celui de la proposition 5.14 montre que $\big(Y_r^{\widetilde{\nabla}}\big)^{\widetilde{\Gamma}_R}$ est un $\mathbb{R}/t^r\,\mathbb{R}$-module projectif et que l'homomorphisme naturel

$$\mathbb{R}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{R}} \big(Y_r^{\widetilde{\nabla}}\big)^{\widetilde{\Gamma}_R} \to Y_r^{\widetilde{\nabla}}$$

est un isomorphisme. Par compatibilité de la descente, on a $(\mathbb{R}/t^r\,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}/t^{r+1}\mathbb{R}} \big(Y_{r+1}^{\widetilde{\nabla}}\big)^{\widetilde{\Gamma}_R} \xrightarrow{\sim} \big(Y_r^{\widetilde{\nabla}}\big)^{\widetilde{\Gamma}_R}$ pour tout $r \in \mathbf{N}_{>0}$

D'après le lemme 6.4 appliqué au système projectif défini par $Z_r = \big(Y_r^{\widetilde{\nabla}}\big)^{\widetilde{\Gamma}_R}$, le $\mathbb{R}$-module $Z = \varprojlim_r \big(Y_r^{\widetilde{\nabla}}\big)^{\widetilde{\Gamma}_R}$ est projectif et l'application

$$\mathbb{R}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{R}} Z \xrightarrow{\sim} \varprojlim_r \left(\mathbb{R}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{R}} \big(Y_r^{\widetilde{\nabla}}\big)^{\widetilde{\Gamma}_R}\right)$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}$-modules. Comme $\varprojlim_r Y_r^{\widetilde{\nabla}} = Y^{\widetilde{\nabla}=0}$ (car $Y^{\widetilde{\nabla}=0}$ est un $\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}$-module projectif de rang fini) et donc $Z = \big(Y^{\widetilde{\nabla}=0}\big)^{\widetilde{\Gamma}_R} = Y^{\widetilde{\Gamma}_R}$, le $\mathbb{R}$-module $Y^{\widetilde{\Gamma}_R}$ est projectif et l'application naturelle

$$\mathbb{R}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{R}} Y^{\widetilde{\Gamma}_R} \to Y^{\widetilde{\nabla}=0}$$

est un isomorphisme. En étendant les scalaires de $\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}$ à $\mathbb{I}^+_{\mathrm{dR}}$, on en déduit que Y est triviale comme $\mathbb{I}^+_{\mathrm{dR}}$-représentation de $\widetilde{\Gamma}_R$. Enfin, le dernier énoncé résulte de l'égalité $Y^{\widetilde{\nabla}=0} \cap \mathrm{Fil}^r Y = t^r Y^{\widetilde{\nabla}=0}$ en prenant les invariants sous $\widetilde{\Gamma}_R$. $\square$

Lemme 6.4. *Soient A un anneau, B une A-algèbre et $t \in A$ tels que A et B sont séparés et complets pour la topologie t-adique. Pour tout $r \in \mathbf{N}$, soit Z_r un $A/t^r A$-module projectif de rang fini. On suppose que $Z_{r+1}/t^r Z_{r+1} \xrightarrow{\sim} Z_r$ pour tout $r \in \mathbf{N}$. Soit $Z = \varprojlim_r Z_r$ (les morphismes de transition $Z_{r+1} \to Z_r$ étant donnés par la réduction modulo t^r). Alors Z est un A-module projectif de rang fini et l'application naturelle*

$$B \otimes_A Z \to \varprojlim_r B \otimes_A Z_r$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Comme Z_1 est projectif de rang fini, il existe $n \in \mathbf{N}$ et des applications A/tA-linéaires $\varphi_1\colon (A/tA)^n \to Z_1$ et $\psi_1\colon Z_1 \to (A/tA)^n$ tels que le composé $\varphi_1 \circ \psi_1 = \mathrm{Id}_{Z_1}$. Soit $r \in \mathbf{N}_{>1}$. Supposons construites des suites $(\varphi_j)_{1\leq j<r}$ et $(\psi_j)_{1\leq j<r}$ où $\varphi_j\colon (A/t^jA)^n \to Z_j$ et $\psi_j\colon Z_j \to (A/t^jA)^n$ sont A/t^jA-linéaires et telles que $\varphi_j \circ \psi_j = \mathrm{Id}_{Z_j}$ pour tout $j \in \{1,\ldots,r-1\}$.

$$\begin{tikzcd} (A/t^rA)^n \arrow[r] \arrow[d, dotted, bend right, "\varphi_r"'] & (A/t^{r-1}A)^n \arrow[d, bend right, "\varphi_{r-1}"'] \\ Z_r \arrow[r] \arrow[u, dotted, bend right, "\psi_r"'] & Z_{r-1} \arrow[u, bend right, "\psi_{r-1}"'] \end{tikzcd}$$

Comme Z_r est un A/t^rA-module projectif, le composé $Z_r \to Z_{r-1} \xrightarrow{\psi_{r-1}} (A/t^{r-1}A)^n$ se relève en une application A/t^rA-linéaire $\psi_r\colon Z_r \to (A/t^rA)^n$. De même, comme $(A/t^rA)^n$ est libre sur A/t^rA, il existe $\varphi'_r\colon (A/t^rA)^n \to Z_r$ relevant le composé $(A/t^rA)^n \to (A/t^{r-1}A)^n \xrightarrow{\varphi_{r-1}} Z_{r-1}$. Le composé $\varphi'_r \circ \psi_r$ n'est pas égal à Id_{Z_r} en général, mais induit $\mathrm{Id}_{Z_{r-1}}$ modulo t^{r-1}. Mais on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{A/t^rA}((A/t^rA)^n, t^{r-1}Z_r) \arrow[r, "\varphi_r^*"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{A/t^rA}(Z_r, t^{r-1}Z_r) \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Hom}_{A/tA}((A/tA)^n, Z_1) \arrow[r, "\varphi_1^*"] & \mathrm{Hom}_{A/tA}(Z_1, Z_1) \end{tikzcd}$$

Comme $\varphi_1^*\colon \mathrm{Hom}_{A/tA}((A/tA)^n, Z_1) \to \mathrm{Hom}_{A/tA}(Z_1, Z_1)$ est surjectif (une section est donnée par ψ_1^*), il existe $\delta_r \in \mathrm{Hom}_{A/t^rA}((A/t^rA)^n, t^{r-1}Z_r)$ tel que $\varphi'_r \circ \psi_r - \mathrm{Id}_{Z_r} = \delta_r \circ \psi_r$. Si $\varphi_r = \varphi'_r - \delta_r$, on a bien $\varphi_r \circ \psi_r = \mathrm{Id}_{Z_r}$ et φ relève φ_{r-1}.

En passant à la limite projective, les systèmes $(\varphi_r)_{r\in\mathbf{N}_{>0}}$ et $(\psi_r)_{r\in\mathbf{N}_{>0}}$ fournissent des applications A-linéaires $\varphi\colon A^n \to Z$ et $\psi\colon Z \to A^n$ telles que $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Z$. Le A-module Z est donc projectif.

Pour tout $r \in \mathbf{N}_{>0}$, on a une décomposition de A/t^rA-modules $(A/t^rA)^n = Z_r \oplus \mathrm{Ker}(\varphi_r)$ et donc $A^n = Z \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$ en passant à la limite projective. De même, on a $(B/t^rB)^n = B \otimes_A Z_r \oplus B \otimes_A \mathrm{Ker}(\varphi_r)$ pour tout $r \in \mathbf{N}_{>0}$, et ces décompositions sont compatibles lorsque r varie, de sorte qu'on a $B^n = \varprojlim_r (B \otimes_A Z_r) \oplus \varprojlim_r (B \otimes_A \mathrm{Ker}(\varphi_r))$. On a donc

$$(B \otimes_A Z) \oplus (B \otimes_A \mathrm{Ker}(\varphi)) = B^n = \varprojlim_r (B \otimes_A Z_r) \oplus \varprojlim_r (B \otimes_A \mathrm{Ker}(\varphi_r))$$

qui implique $B \otimes_A Z \to \varprojlim_r B \otimes_A Z_r$ est un isomorphisme. □

Corollaire 6.5. *Soient Y_1, Y_2 deux $\mathbb{I}_{\mathrm{dR}}^+$-représentations triviales de $\widetilde{\Gamma}_R$. Alors on a un isomorphisme*

$$\mathbb{R}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_R}(Y_1, Y_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{R}^{\mathrm{pl}}_{\mathbb{I}_{\mathrm{dR}}^+}}(\Delta(Y_1), \Delta(Y_2))$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 6.3 à $Y = \mathrm{Hom}_{\mathbb{I}_{\mathrm{dR}}^+}(Y_1, Y_2)$ qui est une $\mathbb{I}_{\mathrm{dR}}^+$-représentation triviale de $\widetilde{\Gamma}_R$ puisque Y_1 et Y_2 le sont. □

Corollaire 6.6. *Soit V une $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)$-représentation de G_R. Alors V est de de Rham géométrique (c'est-à-dire la $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ représentation $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)} V$ est triviale) si et seulement si les opérateurs ∇_i associés à la $\widehat{\overline{K}}$-représentation déduite de V (en réduisant modulo t) sont nuls.*

Démonstration. Soit Y la $\mathbb{I}_{\mathrm{dR}}^+$-représentation de $\widetilde{\Gamma}_R$ associée à la $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ représentation $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)} V$. On a l'inclusion

$$Y/tY \subseteq \left((\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ / t\, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+) \otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)} V \right)^{H_R}$$

Comme $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+/t\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \simeq C[\![u_1,\dots,u_d]\!]$ (avec action triviale de G_R sur les u_i), on a

$$\left((\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+/t\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)\otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)} V\right)^{H_R} = X[\![u_1,\dots,u_d]\!]$$

où $X = (C\otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)} V)^{H_R}$. Mais les éléments de Y/tY ont des orbites qui engendrent des $\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}/t\,\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}$-modules de type fini : l'inclusion se factorise à travers $(Y/\operatorname{Fil}^1 Y)[\![u_1,\dots,u_d]\!]$:

$$Y/tY \subseteq (Y/\operatorname{Fil}^1 Y)[\![u_1,\dots,u_d]\!].$$

L'action de $\widetilde{\Gamma}_R$ sur les u_i étant triviale modulo t, les opérateurs ∇_i sont nuls sur $(Y/\operatorname{Fil}^1 Y)[\![u_1,\dots,u_d]\!]$ (car ils le sont sur $Y/\operatorname{Fil}^1 Y$ par hypothèse). C'est *a fortiori* le cas sur Y/tY : on a $\nabla_i(Y)\subseteq tY$ pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$, et Y est triviale (comme représentation de $\widetilde{\Gamma}_R$) en vertu de la proposition 6.3. La représentation V est donc de de Rham géométrique. □

Exemple : Soit $V\in\mathbf{Rep}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{G}_R)$. On a un isomorphisme de $\mathbb{R}[t^{-1}][G_K]$-modules filtrés

$$\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(V)\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}[t^{-1}]\otimes_{R[p^{-1}]}\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$$

En effet, on a un isomorphisme de B_{dR}-modules $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{R[p^{-1}]}\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)\xrightarrow{\sim}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbf{Q}_p}V$ compatible aux filtrations. En prenant les invariants sous G_R, on en déduit l'isomorphisme recherché (*cf* lemme 2.11). En particulier, en prenant le Gr^0, on obtient un isomorphisme de modules de Higgs (*cf* [11, Section 5, Example]) :

$$\mathrm{Gr}^0(\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(V))\xrightarrow{\sim}\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}C(-n)\otimes_{R[p^{-1}]}\mathrm{Gr}^n(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V))$$

6.7. **Liens entre représentations B_{dR}-admissibles et représentations $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-admissibles.** Le but de ce paragraphe est de montrer qu'il n'y a essentiellement aucune différence entre les notions de représentation « B_{dR}-admissible » et « $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-admissible », de sorte que le résultats qui précèdent (énoncés en termes de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-admissibilité) s'appliquent aussi bien aux $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)$-représentations régulières (rappelons qu'il s'agit des $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action de G_R, qui contiennent un $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)$-réseau stable sur lequel l'action est continue, *cf* définition 3.9).

Soit $V\in\mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)}(G_R)$ (resp. $V\in\mathbf{Rep}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)}(G_R)$). On dispose des homomorphismes G_R-équivariants

$$\alpha^+=\alpha^+_{\mathrm{dR}}(V)\colon\ \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}^+(V)\to\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)}V$$
$$(\text{resp.}\quad \alpha=\alpha_{\mathrm{dR}}(V)\colon\ \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbb{R}[t^{-1}]}\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(V)\to\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)}V)$$

Rappelons que V est $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-*admissible* (resp. B_{dR}-*admissible*) lorsque α^+ (resp. α) est un isomorphisme. Cela signifie que la $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-représentation $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)}V$ (resp. ...) est triviale. Cela définit des sous-catégories pleines $\mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K),\mathrm{dR}}(G_R)$ et $\mathbf{Rep}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K),\mathrm{dR}}(G_R)$ de $\mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)}(G_R)$ et $\mathbf{Rep}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)}(G_R)$ respectivement.

Soit $V\in\mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)}(G_R)$. On a bien sûr $\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(V[t^{-1}])=\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}^+(V)[t^{-1}]$ et $\alpha=\alpha^+[t^{-1}]$. En particulier, si α^+ est bijective, il en est de même de α : on a un foncteur

$$F\colon\ \mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K),\mathrm{dR}}(G_R)\to\mathbf{Rep}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K),\mathrm{dR}}(G_R)$$
$$V\mapsto V[t^{-1}]$$

Proposition 6.8. *La représentation $V\in\mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)}(G_R)$ est $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-admissible si et seulement si $V[t^{-1}]\in\mathbf{Rep}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)}(G_R)$ est B_{dR}-admissible.*

Au cours de la preuve, nous aurons besoin des résultats suivants. On pose $R_{\overline{K}}:=\widehat{R\mathcal{O}_{\overline{K}}}$.

Lemme 6.9. *Soit M un $R_{\overline{K}}$-module de type fini, plat comme $\widehat{\mathcal{O}_{\overline{K}}}$-module. Alors M est de présentation finie.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$. Choisissons une surjection $R_{\overline{K}}$-linéaire $u\colon L \to M$ avec L libre de rang fini sur $R_{\overline{K}}$ et soit N le noyau de u. Il suffit de voir que N est de type fini. Soit $J_n := p^{\delta n} R_{\overline{K}}$ pour $n \in \mathbf{N}$ (où $p^\delta \in \mathfrak{m}$ est un élément de valuation $0 < \delta \leq 1$). On considère l'anneau $\mathrm{Gr}_J\big(R_{\overline{K}}\big) = \bigoplus\limits_{n\in\mathbf{N}} J_n/J_{n+1}$; c'est une $R_{\overline{K}}/p^\delta R_{\overline{K}}$-algèbre engendrée par la classe de $p^\delta \in J_1/J_2$. Le $\mathrm{Gr}_J\big(R_{\overline{K}}\big)$-module $\mathrm{Gr}_J(N)$ est engendré par $N/p^\delta N$. Supposons $N/p^\delta N$ de type fini. Comme $R_{\overline{K}}$ est séparé et complet pour la topologie p-adique, N est aussi separé pour la topologie p-adique : on en déduit (*cf* [4, Proposition 10.24]) que N est de type fini. Il suffit donc de prouver que $N/p^\delta N$ est de type fini ou, ce qui est équivalent, que $M/p^\delta M$ est de présentation finie. Cela résulte du lemme suivant. □

Lemme 6.10. *Soit M un module de type fini sur $R_{\overline{K}}/pR_{\overline{K}}$, plat comme $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$-module. Alors, il existe δ tel que $M/p^\delta M$ est de présentation finie.*

Démonstration. Si $\delta \in \mathbf{Q}\cap]0,1]$, l'inclusion $\mathrm{W}(\overline{k}) \to \mathcal{O}_{\overline{K}}$ induit une application $\overline{k} \to \mathcal{O}_{\overline{K}}/p^\delta\mathcal{O}_{\overline{K}}$.

Commençons par supposer M plat sur $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$ (mais par forcément de type fini sur $R_{\overline{K}}/pR_{\overline{K}}$). Soit $0 \to N \to L \to M \to 0$ une suite exacte avec L libre sur $R_{\overline{K}}/pR_{\overline{K}}$. Comme M est plat sur $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$, il en est de même de N et les suites $0 \to N/p^\delta N \to L/p^\delta L \to M/p^\delta M \to 0$ et $0 \to N/\mathfrak{m}N \to L/\mathfrak{m}L \to M/\mathfrak{m}M \to 0$ sont exactes. On a donc un diagramme à ligne exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overline{N}\otimes_{\overline{k}}\big(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p^\delta\mathcal{O}_{\overline{K}}\big) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_N"] & \overline{L}\otimes_{\overline{k}}\big(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p^\delta\mathcal{O}_{\overline{K}}\big) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_L"] & \overline{M}\otimes_{\overline{k}}\big(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p^\delta\mathcal{O}_{\overline{K}}\big) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N/p^\delta N \arrow[r] & L/p^\delta L \arrow[r] & M/p^\delta M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(où on a posé $\overline{N} = N/\mathfrak{m}N$, $\overline{L} = L/\mathfrak{m}L$ et $\overline{M} = M/\mathfrak{m}M$)). L'application λ_L est un isomorphisme parce que L est libre : l'application λ_M est donc surjective. Comme c'est vrai pour tout $R_{\overline{K}}/pR_{\overline{K}}$-module, plat comme $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$-module, l'application λ_N est elle aussi surjective, de sorte que λ_M est en fait un isomorphisme. En particulier, on a $R_{\overline{K}}/p^\delta R_{\overline{K}} = \big(R_{\overline{K}}/\mathfrak{m}R_{\overline{K}}\big)\otimes_{\overline{k}}\big(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p^\delta\mathcal{O}_{\overline{K}}\big)$.

Supposons désormais que M est de type fini sur $R_{\overline{K}}/pR_{\overline{K}}$. Comme $R_{\overline{K}}/\mathfrak{m}R_{\overline{K}} = R\otimes_{\mathcal{O}_K}\overline{k}$ est noethérien, $\overline{M} = M/\mathfrak{m}M$ admet une présentation finie $\overline{L}' \to \overline{L} \to \overline{M} \to 0$ avec $\overline{L}'$ et $\overline{L}$ libres de rang fini sur $R_{\overline{K}}/\mathfrak{m}R_{\overline{K}}$. Soit $L_\delta := \overline{L}\otimes_{R_{\overline{K}}/\mathfrak{m}R_{\overline{K}}}\big(R_{\overline{K}}/p^\delta R_{\overline{K}}\big)$ et $L'_\delta := \overline{L}'\otimes_{R_{\overline{K}}/\mathfrak{m}R_{\overline{K}}}\big(R_{\overline{K}}/p^\delta R_{\overline{K}}\big)$. Soient $v\colon L'_1 \to L_1$ le changement de base du morphisme $\overline{L}' \to \overline{L}$ donné et $u\colon L'_1 \to M$ un morphisme $R_{\overline{K}}$-linéaire qui relève le morphisme $\overline{L} \to \overline{M}$. Puisque L'_1 est de type fini et $u\big((v(L'_1)\big) \subseteq \mathfrak{m}M$, il existe δ tel que $u\big((v(L'_1)\big) \subseteq p^\delta M$. On pose $v_\delta := v \mod p^\delta$ et $u_\delta := u \mod p^\delta$. Alors $u_\delta\circ v_\delta = 0$ et on obtient un morphisme $w_\delta\colon L_\delta/L'_\delta \to M/p^\delta M$. Il est surjectif par Nakayama puisqu'il est surjectif modulo $\mathfrak{m}$. Remarquons que L_δ/L'_δ est un $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p^\delta\mathcal{O}_{\overline{K}}$-module libre puisque il est obtenu par le changement de base $\overline{k} \to \mathcal{O}_{\overline{K}}/p^\delta\mathcal{O}_{\overline{K}}$ et que $M/p^\delta M$ est un $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p^\delta\mathcal{O}_{\overline{K}}$-module plat par hypothèse. On déduit de [17, §3.1.6] que w_δ est injectif et donc que c'est un isomorphisme. □

Rappelons que si A est une $\mathcal{O}_{K_\infty}$-algèbre et M un A-module, on dit que M est *presque nul* s'il est tué par l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{K_\infty}$. Un morphisme de A-modules $N_1 \to N_2$ est dit *presque injectif* si son noyau est presque nul. On dit que M est *presque plat* sur A si pour tout morphisme injectif de A-modules $N_1 \to N_2$, le morphisme $M\otimes_A N_1 \to M\otimes_A N_2$ est presque injectif. Ces notions (et bien d'autres) ont été introduites par Faltings dans [11] et [10], et developpées dans [14].

Lemme 6.11. *L'anneau C est plat sur $\widehat{R\mathcal{O}_{\overline{K}}}[p^{-1}] = \mathbb{R}/t\mathbb{R}$ et sur $R_{\infty,\overline{K}}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\widehat{\overline{R}}$ est presque plat sur $R_{\overline{K}} := \widehat{R\mathcal{O}_{\overline{K}}}$. Soit I un ideal de type fini de $R_{\overline{K}}$. Par presque platitude de $\overline{R}$ sur $R\mathcal{O}_{\overline{K}}$ (*cf* [10, Theorem 2.16]), on sait déjà que $\overline{R}$ est presque plat sur $R\mathcal{O}_{\overline{K}}$: on a donc la suite exacte

$$0 \to N \to \overline{R}\otimes_{R\mathcal{O}_{\overline{K}}} I \xrightarrow{f} \overline{R}\otimes_{R\mathcal{O}_{\overline{K}}} \widehat{R\mathcal{O}_{\overline{K}}}$$

où N est un $\overline{R}$-module presque nul. En complétant pour la topologie p-adique, on en déduit une suite exacte :

$$0 \to \widehat{N} \to \overline{R}\widehat{\otimes}_{R\mathcal{O}_{\overline{K}}} I \xrightarrow{\widehat{f}} \overline{R}\widehat{\otimes}_{R\mathcal{O}_{\overline{K}}} R_{\overline{K}}$$

de sorte que $\widehat{f}$ est presque injective. On a la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} \widehat{\overline{R}} \otimes_{R_{\overline{K}}} I \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & \widehat{\overline{R}} \arrow[d, "\simeq"] \\ \overline{R}\widehat{\otimes}_{R\mathcal{O}_{\overline{K}}} I \arrow[r, "\widehat{f}"] & \overline{R}\widehat{\otimes}_{R\mathcal{O}_{\overline{K}}} \widehat{R\mathcal{O}_{\overline{K}}}. \end{tikzcd}$$

Il suffit donc de voir que l'application c est presque injective. D'après le lemme 6.9 on peut choisir une surjection $R_{\overline{K}}$-linéaire $u\colon L \to I$ avec L libre de rang fini sur $R_{\overline{K}}$ et $M := \mathrm{Ker}(u)$ de type fini. Puisque I est sans p-torsion on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une suite exacte $0 \to M/p^nM \to L/p^nL \to I/p^nI \to 0$ et par presque platitude de $\overline{R}$ sur $R\mathcal{O}_{\overline{K}}$, une suite exacte

$$0 \to X_n \to M/p^nM \otimes_{R\mathcal{O}_{\overline{K}}} \overline{R} \to L/p^nL \otimes_{R\mathcal{O}_{\overline{K}}} \overline{R} \to I/p^nI \otimes_{R\mathcal{O}_{\overline{K}}} \overline{R} \to 0$$

où X_n est presque nul. On a le diagramme commutatif suivant, où la première ligne est exacte :

$$\begin{tikzcd} & M \otimes_{R_{\overline{K}}} \widehat{\overline{R}} \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & L \otimes_{R_{\overline{K}}} \widehat{\overline{R}} \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & I \otimes_{R_{\overline{K}}} \widehat{\overline{R}} \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & 0 \\ \varprojlim_n X_n \arrow[r, hook] & M\widehat{\otimes}_{R\mathcal{O}_{\overline{K}}} \overline{R} \arrow[r] & L\widehat{\otimes}_{R\mathcal{O}_{\overline{K}}} \overline{R} \arrow[r] & I\widehat{\otimes}_{R\mathcal{O}_{\overline{K}}} \overline{R} & \end{tikzcd}$$

où b est un isomorphisme puisque L est un module libre et a et c sont surjectives puisque M et I sont de type fini (*cf* [7, Proposition 9.2.4]). On conclut comme dans la preuve de [7, Proposition 9.2.6] que c est presque injective, ce qui achève la preuve. $\square$

Démonstration de la proposition 6.8. Il s'agit de prouver la réciproque : supposons que $V[t^{-1}]$ est $\mathrm{B_{dR}}$-admissible et montrons que V est $\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$-admissible. Conservons les notations du début de ce paragraphe.

Posons $M = \mathrm{Ker}(\alpha^+)$ et $M' = \mathrm{Coker}(\alpha^+)$: on a $M[t^{-1}] = M'[t^{-1}] = 0$, de sorte que M_0 et M_1 sont de t-torsion.

On a la suite exacte $0 \to \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{t} \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \to C[\![\underline{u}]\!] \to 0$ (avec $C[\![\underline{u}]\!] = C[\![u_1, \ldots, u_d]\!]$ pour alléger), et donc le diagramme à lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[r, "t"] \arrow[d, hook] & M \arrow[r] \arrow[d, hook] & M_0 \arrow[d, hook] & \\ & \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{D}^+_{\mathrm{dR}}(V) \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\alpha^+"] & \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{D}^+_{\mathrm{dR}}(V) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^+"] & C[\![\underline{u}]\!] \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{D}^+_{\mathrm{dR}}(V) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)} V \arrow[r, "t"] \arrow[d, two heads] & \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)} V \arrow[r] \arrow[d, two heads] & C[\![\underline{u}]\!] \otimes_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)} V \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\ & M' \arrow[r, "t"] & M' \arrow[r] & M'_0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où α_0 est l'application induite par α^+, $M_0 = \mathrm{Ker}(\alpha_0)$ et $M'_0 = \mathrm{Coker}(\alpha_0)$. Le diagramme du serpent fournit alors la suite exacte :

$$(*) \qquad M_0 \to M' \xrightarrow{t} M' \to M'_0 \to 0$$

Montrons que α_0 est un isomorphisme. Posons $\mathrm{D}_C(V)=\Big(C\otimes_{\widehat{\overline{K}}}(V/tV)\Big)^{G_R}$. C'est un $\widehat{R\mathcal{O}_{\overline{K}}}[p^{-1}]=\mathbb{R}/t\mathbb{R}$-module, et on dispose d'une application C-linéaire naturelle

$$\widetilde{\alpha}\colon C\otimes_{\mathbb{R}/t\mathbb{R}}\mathrm{D}_C(V)\to C\otimes_{\widehat{\overline{K}}}(V/tV).$$

Soit $W=C\otimes_{\widehat{\overline{K}}}\big(V/tV\big)$: c'est une C-représentation de G_R. D'après le theorème 2.6 il existe $S\in\mathscr{I}$ et une $S_{\infty,\overline{K}}$-représentation libre Y de $\widetilde{\Gamma}_{S/R}$ tels que $W=C\otimes_{S_{\infty,\overline{K}}[p^{-1}]}Y$ en tant que G_R-modules. Considérons $Y^{\widetilde{\nabla}}\subseteq Y$. L'action de $\widetilde{\Gamma}_{S/R}$ étant discrète sur $Y^{\widetilde{\nabla}}$, par descente étale $S_{\infty,\overline{K}}[p^{-1}]\otimes_{R_{\overline{K}}}\big(Y^{\widetilde{\nabla}}\big)^{\widetilde{\Gamma}_{S/R}}\xrightarrow{\sim}Y^{\widetilde{\nabla}}$ (*cf* preuve de la proposition 5.14). Mais $\big(Y^{\widetilde{\nabla}}\big)^{\widetilde{\Gamma}_{S/R}}=\mathrm{D}_C(V)$: on a donc $S_{\infty,\overline{K}}[p^{-1}]\otimes_{R_{\overline{K}}}\mathrm{D}_C(V)\subseteq Y$. Comme C est plat sur $S_{\infty,\overline{K}}$ d'après le lemme 6.11, l'application $\widetilde{\alpha}$ est injective.

Par ailleurs, en tensorisant la suite exacte $0\to\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\xrightarrow{t}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\to C[\![\underline{u}]\!]\to 0$ par V au-dessus de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)$ et en prenant les invariants sous G_R, on a la suite exacte

$$0\to\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}^+(V)\xrightarrow{t}\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}^+(V)\to(C[\![\underline{u}]\!]\otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)}V)^{G_R}$$

Mais l'action de G_R est triviale modulo t sur les u_i, de sorte que $(C[\![\underline{u}]\!]\otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)}V)^{G_R}=\mathrm{D}_C(V)[\![\underline{u}]\!]$, et on a une injection

$$\iota\colon\ \mathbb{D}_{\mathrm{dR}}^+(V)/t\,\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}^+(V)\to\mathrm{D}_C(V)[\![\underline{u}]\!]$$

L'application α_0 se décompose alors de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& C[\![\underline{u}]\!]\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}^+(V) \arrow[r, "\alpha_0"] & C[\![\underline{u}]\!]\otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)}V \arrow[dr, equal] & \\
C[\![\underline{u}]\!]\otimes_{\mathbb{R}/t\mathbb{R}}(\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}^+(V)/t\,\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}^+(V)) \arrow[ur, equal] \arrow[dr, "C[\![\underline{u}]\!]\otimes\iota"'] & & & C[\![\underline{u}]\!]\otimes_{\widehat{\overline{K}}}(V/tV) \\
& C[\![\underline{u}]\!]\otimes_{\mathbb{R}/t\mathbb{R}}\mathrm{D}_C(V) \arrow[urr, "\widetilde{\alpha}[\![\underline{u}]\!]"'] & &
\end{tikzcd}$$

D'après le lemme 6.11, l'application $C[\![\underline{u}]\!]\otimes\iota$ est injective, parce que ι l'est. Par ailleurs, comme $\widetilde{\alpha}$ est injective, il en est de même de $\widetilde{\alpha}[\![\underline{u}]\!]$. On en déduit que α_0 est injective, et donc que $M_0=0$. D'après la suite exacte $(*)$, on a donc la suite exacte $0\to M'\xrightarrow{t}M'\to M_0'$. Mais comme M' est de t-torsion, cela implique que $M'=0$, et donc aussi $M_0'=0$. Ainsi, α_0 est un isomorphisme.

Il en résulte $\widetilde{\alpha}[\![u]\!]$ est un isomorphisme : la $C[\![u]\!]$-représentation $C[\![\underline{u}]\!]\otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)}V$ de G_R est un produit de copies de $C[\![u]\!]$-représentations triviales. En particulier, les opérateurs ∇_i associés à la $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-représentation $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)}V$ de G_R sont nuls modulo t pour $i\in\{1,\dots,d\}$. D'après la proposition 6.3, cela implique que la $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-représentation $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)}V$ est triviale, *i.e.* que V est $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-admissible. □

Corollaire 6.12. *Le foncteur* $F\colon\ \mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K),\mathrm{dR}}(G_R)\to\mathbf{Rep}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K),\mathrm{dR}}(G_R)$ *est essentiellement surjectif, et identifie* $\mathbf{Rep}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K),\mathrm{dR}}(G_R)$ *à la catégorie* $\mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K),\mathrm{dR}}(G_R)$ *à isogénies près.*

Démonstration. Soit $\mathcal{V}\in\mathbf{Rep}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)}(G_R)$ et $V\subseteq\mathcal{V}$ un $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)$-réseau stable sous l'action de G_R. D'après la proposition 6.8, $\mathcal{V}$ est B_{dR}-admissible si et seulement si V est $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-admissible : cela prouve l'essentielle surjectivité.

Par ailleurs, si $V_1,V_2\in\mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K),\mathrm{dR}}(G_R)$, alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)}(V_1[t^{-1}],V_2[t^{-1}])=\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)}(V_1,V_2)[t^{-1}]$$

et en prennant les invariants sous G_R, il vient

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)}(G_R)}(V_1[t^{-1}],V_2[t^{-1}])=\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{O}_K)}(G_R)}(V_1,V_2)[t^{-1}]$$

ce qu'on voulait. □

6.13. **Applications globales aux fibrés de Higgs.**
Soit $X \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ un schéma propre, lisse sur K et géométriquement connexe. On suppose en outre qu'il est lisse sur $\mathcal{O}_K$ de dimension relative d, ou bien que c'est une courbe à réduction semi-stable. On dénote par $\widehat{X}$ le schéma formel défini par la complétion p-adique de X. Soient $\eta_1, \ldots, \eta_s$ les points de X qui sont de codimension 1 au-dessus du point fermé de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ (on a $s = 1$ lorsque X est lisse sur $\mathcal{O}_K$, et s est le nombre de composantes irréductibles de la fibre spéciale dans le cas où X est une courbe à réduction semi-stable). Pour $j \in \{1, \ldots, s\}$, on note $\widehat{\mathcal{O}}_{X,\eta_j}$ la complétion p-adique de la localisation de $\mathcal{O}_X$ en η_j. C'est un anneau de valuation discrète. Soit $\mathbf{K}_{\eta_j}$ une clôture algébrique du corps des fractions de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,\eta_j}$. Il définit un point géométrique $\overline{\eta}_j$ de X_K.

Soit $\mathcal{U} := \mathrm{Spf}(R_{\mathcal{U}}) \subseteq \widehat{X}$ un ouvert affine. On dit que $\mathcal{U}$ est « petit » si $R_{\mathcal{U}}$ satisfait les hypothèses du §2. Les hypothèses sur le morphisme $X \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ impliquent que $\widehat{X}$ admet une base pour la topologie de Zariski composée d'ouverts petits (*cf* remarque 2.3). Supposons $\mathcal{U}$ petit. Pour $j \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $\eta_j \in \mathcal{U}$, on a un morphisme naturel $R_{\mathcal{U}} \subseteq \mathbf{K}_{\eta_j}$. On définit $\overline{R}_{\mathcal{U},j}$ comme l'union des sous-$R_{\mathcal{U}}$-algèbres de $\mathbf{K}_{\eta_j}$ qui sont finies normales sur $R_{\mathcal{U}}$ et étales en inversant p. On note $G_{\mathcal{U},j}$ le groupe de Galois de $\overline{R}_{\mathcal{U},j}[p^{-1}]$ sur $R_{\mathcal{U}}\overline{K}$.

Notons $\overline{\eta}$ le point géométrique de $X_{\overline{K}}$ défini par une clôture algébrique $\mathbf{K}_\eta$ du corps des fonctions de $X_{\overline{K}}$ (rappelons que ce dernier est supposé lisse et connexe). Soit $V \in \mathbf{Rep}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)}\big(\pi_1\big(X_{\overline{K}}, \overline{\eta}\big)\big)$. Alors pour chaque $\mathcal{U} \subseteq \widehat{X}$ petit et $j \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $\eta_j \in \mathcal{U}$, si on choisit une immersion $\mathbf{K}_\eta \to \mathbf{K}_{\eta_j}$, on peut definir $V_{\mathcal{U},j} \in \mathbf{Rep}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)}\big(G_{\mathcal{U},j}\big)$ comme la représentation induite par le morphisme $G_{\mathcal{U},j} \to \pi_1\big(X_{\overline{K}}, \overline{\eta}\big)$. On pose $\mathbb{D}^+_{\mathrm{dR}}(V_{\mathcal{U},j}) = \Big(\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\left(\overline{R}_{\mathcal{U},j}, R_{\mathcal{U}}\right) \otimes_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)} V\Big)^{G_{\mathcal{U},j}}$ comme dans le paragraphe 2.7. Si $\eta_j \in \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ est un ouvert, on a un morphisme naturel $\overline{R}_{\mathcal{U},j} \subseteq \overline{R}_{\mathcal{U}',j}$ qui induit des morphismes $\mathrm{B}^{\nabla+}_{\mathrm{dR}}(\overline{R}_{\mathcal{U},j}, R_{\mathcal{U}}) \to \mathrm{B}^{\nabla+}_{\mathrm{dR}}(\overline{R}_{\mathcal{U}',j}, R_{\mathcal{U}'})$ et $\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}(\overline{R}_{\mathcal{U},j}, R_{\mathcal{U}}) \to \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}(\overline{R}_{\mathcal{U}',j}, R_{\mathcal{U}'})$. On obtient donc un morphisme des modules à connexion $\mathbb{D}^+_{\mathrm{dR}}(V_{\mathcal{U},j}) \to \mathbb{D}^+_{\mathrm{dR}}(V_{\mathcal{U}',j})$.

Proposition 6.14. *Soit $V \in \mathbf{Rep}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)}\big(\pi_1\big(X_{\overline{K}}, \overline{\eta}\big)\big)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(1) il existe un recouvrement $\{\mathcal{U}_i\}_i$ par des ouverts petits de $\widehat{X}$ tel que $V|_{\mathcal{U}_i}$ est de de Rham géométrique ;
(2) pour chaque ouvert petit $\mathcal{U}$ et tout $j \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $\eta_j \in \mathcal{U}$, la représentation $V|_{\mathcal{U},j}$ est de de Rham géométrique ;
(3) (Pureté) *V est de de Rham géométrique comme représentation de* $\mathrm{Gal}\big(\mathbf{K}_{\eta,j}/\widehat{\mathcal{O}}_{X,\eta_j}[p^{-1}]\big)$ *pour tout $j \in \{1, \ldots, s\}$;*
(4) le fibré de Higgs associé à la $\widehat{\overline{K}}$-représentation $V \otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)} \widehat{\overline{K}}$ par Faltings dans [11, Theorem 6] *a un champ de Higgs trivial.*

Supposons ces conditions satifaites. Alors :
(a) les modules $\mathbb{D}^+_{\mathrm{dR}}(V_{\mathcal{U},j})$, pour $\mathcal{U}$ petit, définissent un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_{\widehat{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)$-modules $\mathbb{D}^+_{\mathrm{dR}}(V)$ muni d'une connexion intégrable ∇_V ;
(b) le $\mathcal{O}_{\widehat{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \widehat{\overline{K}}$-module $\mathbb{D}^+_{\mathrm{dR}}(V_{\mathcal{U},j}) \otimes_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)} \widehat{\overline{K}}$ est le fibré de Higgs construit par Faltings (avec champ de Higgs trivial).

Démonstration. L'équivalence de (1)-(4) est une conséquence de la remarque 4.12 et du corollaire 6.6. L'assertion (a) est claire et (b) est une reformulation globale de la remarque 4.12. □

Si $V \in \mathbf{Rep}_{\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)}\big(\pi_1\big(X_{\overline{K}}, \overline{\eta}\big)\big)$ satisfait une des conditions équivalentes de la proposition 6.14, on dit que V est de *de Rham géométrique*. On note $\big(\mathbb{D}^+_{\mathrm{dR}}(V), \nabla_V\big)$ le $\mathcal{O}_{\widehat{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)$-module localement libre à connexion intégrable associé.

7. Application aux représentations p-adiques : lien avec les (φ, Γ)-modules

Si V est une représentation p-adique de $\mathcal{G}_R$, alors V définit une $\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$-représentation (resp. une B_{dR}-représentation) de $\mathcal{G}_R$ en posant $W^+ = \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ (resp. $W = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$), l'action de $\mathcal{G}_R$

étant donnée par $g(b\otimes v)=g(b)\otimes g(v)$. Remarquons que $W\in\mathbf{Rep}^{\mathrm{reg},1}_{\mathrm{B_{dR}}}(\mathcal{G}_R)$. On pose alors

$$\mathrm{D}^+_{\mathrm{dif}}(V)=\Delta\big((W^{+\mathcal{H}_R})_{\mathrm{f}}\big)\quad\text{ et }\quad\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}(V)=\Delta\big((W^{\mathcal{H}_R})_{\mathrm{f}}\big).$$

On définit ainsi des foncteurs

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^+_{\mathrm{dif}}\colon\ \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)&\to\mathscr{R}^{\mathrm{pl}}_{\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}}\\ \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}\colon\ \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)&\to\mathscr{R}^{\mathrm{reg,pl}}_{\mathrm{l_{dR}}}\end{aligned}$$

Bien sûr, on a $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}(V)=\mathrm{D}^+_{\mathrm{dif}}(V)[t^{-1}]$, $\mathrm{D}^+_{\mathrm{dif}}(V)^{\Gamma_R}=(\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbf{Q}_p}V)^{\mathcal{G}_R}$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}(V)^{\Gamma_R}=\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$.

Proposition 7.1. *Soit V une représentation p-adique de $\mathcal{G}_R$. Alors V est de de Rham positive (i.e. à poids de Hodge-Tate négatifs) si et seulement si $\mathrm{D}^+_{\mathrm{dif}}(V)$ est trivial (comme module à connexion sur $\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}$), et V est de de Rham si et seulement si $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}(V)$ est trivial.*

Démonstration. Pour les représentations de de Rham positives, cela résulte simplement du théorème 5.17 (2).

Supposons maintenant V de de Rham. Il existe $n\in\mathbf{Z}$ tel que $V(n)$ est positive : d'après ce qui précède, le module à connexion $Y^+:=\mathrm{D}^+_{\mathrm{dif}}(V(n))$ est trivial : l'application $\mathrm{l}^+_{\mathrm{dR}}\otimes_{R_\infty[p^{-1}]}Y^{+\widetilde{\nabla}=0}\to Y^+$ est bijective. En inversant t, on a la bijection $\mathrm{l_{dR}}\otimes_{R_\infty[p^{-1}]}Y^{+\widetilde{\nabla}=0}\to Y$ (où $Y=\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}(V)=Y^+[t^{-1}]$). En prenant les sections horizontales, il vient $Y^{\widetilde{\nabla}}=Y^{+\widetilde{\nabla}}$ et Y est un module à connexion trivial sur $\mathrm{l_{dR}}$.

Réciproquement, supposons que Y est triviale comme module à connexion sur $\mathrm{l_{dR}}$. Comme $Y^{\widetilde{\nabla}}$ est de type fini (c'est le cas de $Y=\mathrm{l_{dR}}\otimes_{R_\infty[p^{-1}]}Y^{\widetilde{\nabla}}$), il existe $n\in\mathbf{N}$ tel que $Y^{\widetilde{\nabla}}\subseteq t^{-n}Y^+$ où $Y^+:=\mathrm{D}^+_{\mathrm{dif}}(V)$. Quitte à remplacer V par $V(n)$ et donc Y^+ par $t^{-n}Y^+$, on peut supposer que $n=0$. On a alors $Y^{\widetilde{\nabla}}=Y^{+\widetilde{\nabla}}$, et donc $\mathrm{l_{dR}}\otimes_{R[p^{-1}]}Y^{+\Gamma_R}\xrightarrow{\sim}Y$ en vertu de la proposition 5.14. En étendant les scalaires à $\mathrm{B_{dR}}$, il vient $\mathrm{B_{dR}}\otimes_{\mathrm{R}[p^{-1}]}\mathrm{D_{dR}}(V)\xrightarrow{\sim}\mathrm{B_{dR}}\otimes_{\mathbf{Q}_p}V$ et V est de de Rham. □

Rappelons quelques notations de [2]. Soient $\widetilde{\mathbf{E}}^+=\mathscr{R}=\varprojlim\limits_{x\mapsto x^p}\overline{R}/p\overline{R}$ et $\overline{\pi}=\varepsilon-1\in\widetilde{\mathbf{E}}^+$. On pose $\widetilde{\mathbf{E}}=\widetilde{\mathbf{E}}^+\big[\overline{\pi}^{-1}\big]$,

$$\begin{aligned}v_{\mathbf{E}}\colon\widetilde{\mathbf{E}}&\to\mathbf{R}\cup\{\infty\}\\ x&\mapsto\frac{p}{p-1}\max\Big\{n\in\mathbf{Q},\ x\in\overline{\pi}^{-n}\widetilde{\mathbf{E}}^+\Big\}\end{aligned}$$

la pseudo-valuation « $\widetilde{p}$-adique », et $\widetilde{\mathbf{A}}:=\mathrm{W}\big(\widetilde{\mathbf{E}}\big)$. Ce dernier contient un anneau $\mathbf{A}$, construit dans [1], qui permet de classifier les représentations p-adiques de $\mathcal{G}_R$ en termes de (φ,Γ)-modules sur $\mathbf{A}_R=\mathbf{A}^{\mathcal{H}_R}$, généralisant l'équivalence de Fontaine (*cf* [12]). Si $r\in\mathbf{Q}_{>0}$, on note $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ le sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{A}}$ constitué des éléments $z=\sum\limits_{k=0}^{\infty}p^k[z_k]\in\widetilde{\mathbf{A}}$ tels que

$$\lim_{k\to\infty}rv_{\mathbf{E}}(z_k)+k=+\infty$$

Enfin, on pose $\mathbf{A}^{(0,r]}=\mathbf{A}\cap\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et $\mathbf{A}_R^{(0,r]}=\big(\mathbf{A}^{(0,r]}\big)^{\mathcal{H}_R}$. On montre (*cf* [2, Théorème 4.35]) que les représentations p-adiques sont « surconvergentes » : étant donnée $V\in\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$ une représentation p-adique, pour $r\in\mathbf{Q}_{>0}$ assez petit, le $\mathbf{A}_R^{(0,r]}$-module $\mathrm{D}^{(0,r]}(V)=\big(\mathbf{A}^{(0,r]}\otimes_{\mathbf{Z}_p}V\big)^{\mathcal{H}_R}$ est projectif de rang fini, et l'application naturelle

$$\mathbf{A}^{(0,r]}\otimes_{\mathbf{A}_R^{(0,r]}}\mathrm{D}^{(0,r]}(V)\to\mathbf{A}^{(0,r]}\otimes_{\mathbf{Z}_p}V$$

est un isomorphisme. L'intérêt de ce résultat est que les éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}$ ne convergent pas dans $\mathrm{B_{dR}}$ en général, contrairement aux éléments de $\varphi^{-n}\big(\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}\big)$ (pour $n\in\mathbf{N}$ assez grand), ce qui permet de relier $\mathrm{D}^{(0,r]}(V)$ à $\mathrm{D_{dR}}(V)$, comme nous allons le voir dans ce qui suit.

Soient $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et $r \in \mathbf{Q}_{>0}$. Si $r \geq r_n := \frac{1}{(p-1)p^{n-1}}$, on dispose de l'application injective

$$\begin{aligned} \iota_n \colon \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]} &\to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla} \\ z = \sum_{k=0}^{\infty} p^k [z_k] &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} p^k \big[z_k^{p^{-n}}\big] \end{aligned}$$

Lemme 7.2. *L'application ι_n est bien définie.*

Démonstration. Si $z \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$, on a $\lim\limits_{k\to\infty} r v_{\mathbf{E}}(z_k) + k = \infty$ et donc $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{p}{p-1} v_{\mathbf{E}}\big(z_k^{p^{-n}}\big) + k = \infty$. Comme $v_{\mathbf{E}}(\widetilde{p}) = 1$, on a

$$p^k \big[z_k^{p^{-n}}\big] = \big[z_k^{p^{-n}} \widetilde{p}^{\frac{p-1}{p}k}\big] b^k$$

avec $b = \frac{p}{[\widetilde{p}]^{\frac{p-1}{p}}}$ et $\lim\limits_{k\to\infty} v_{\mathbf{E}}\Big(z_k^{p^{-n}} \widetilde{p}^{\frac{p-1}{p}k}\Big) = \infty$. Il suffit de voir que $(b^k)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 dans $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$ (pour la topologie naturelle).

Soit $r \in \mathbf{N}_{>0}$. Rappelons que $\xi = [\widetilde{p}] - p$ est un générateur de $\mathrm{Ker}(\theta)$ dans $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$. On a

$$\begin{aligned} b^{2rp} = \frac{p^{2rp}}{(p+\xi)^{2rp}} &= p^{2r}\Big(1 + \frac{\xi}{p}\Big)^{-2r(p-1)} \\ &\equiv \sum_{s=0}^{r} \frac{c_s}{s!} p^{2r-s} \xi^s \mod \xi^{r+1}\, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+} \end{aligned}$$

avec $c_s \in \mathbf{Z}$ pour $s \in \{0, \ldots, r\}$. On a donc $b^{2rp} \in p\,\mathrm{W}(\mathcal{R}) + \xi^{r+1}\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$. Si $k \in \mathbf{N}$, on a $k = 2rpq + a$ avec $0 \leq a < 2rp$, de sorte que l'image de $b^k = b^a (b^{2rp})^q$ dans $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+} / \xi^{r+1}\, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$ appartient celle de $b^a p^q\, \mathrm{W}(\mathcal{R})$ et tend donc vers 0 (pour la topologie p-adique) lorsque k tend vers l'infini. $\square$

On note encore ι_n le composé de ι_n et de l'inclusion $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla} \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$.

Pour $r \in \mathbf{Q}_{>0}$, on pose $\mathrm{D}^{(0,r]}(V) = \big(\mathbf{B}^{(0,r]} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V\big)^{\mathcal{H}_R}$. D'après [2, Théorème 4.40], il existe $r_R \in \mathbf{R}_{>0}$ (qui dépend de V) tel que pour tout $r \in \mathbf{Q}_{>0}$ tel que $r < r_R$, on a $\mathbf{B}^{(0,r]} \otimes_{\mathbf{B}_R^{(0,r]}} \mathrm{D}^{(0,r]}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}^{(0,r]} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$.

En outre, d'après la proposition 8.6, il existe $N_R \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geq N_R$, on a

$$\iota_n\big(\mathbf{A}_R^{(0,r_n]}\big) \subseteq R_n[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!][t^{-1}] \subseteq \mathrm{l_{dR}} \subseteq \mathrm{B_{dR}}\,.$$

Proposition 7.3. *Si $n \in \mathbf{N}_{>0}$ est assez grand, l'application*

$$\mathrm{l_{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_R^{(0,r_n]}} \mathrm{D}^{(0,r_n]}(V) \to \mathrm{D_{dif}}(V)$$

est un isomorphisme de $\mathrm{l_{dR}}$-modules munis d'une action de Γ_R.

Démonstration. Quitte à remplacer R par une extension convenable et à effectuer une descente étale (*cf* proposition 3.3), on peut supposer que $\mathrm{D}^{(0,r_n]}(V)$ est libre sur $\mathbf{B}_R^{(0,r_n]}$ (*cf* [2, Théorème 4.35])). Soit $n \in \mathbf{N}_{>0}$ tel que $r_n = \frac{1}{(p-1)p^{n-1}} < r_R$, de sorte que

$$\mathbf{B}^{(0,r_n]} \otimes_{\mathbf{B}_R^{(0,r_n]}} \mathrm{D}^{(0,r_n]}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}^{(0,r_n]} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V.$$

En étendant les scalaires $\mathrm{B_{dR}}$ via ι_n, on en déduit un isomorphisme

$$\mathrm{B_{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_R^{(0,r_n]}} \mathrm{D}^{(0,r_n]}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{B_{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V.$$

Comme $\mathrm{B_{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V = \mathrm{B_{dR}} \otimes_{\mathrm{l_{dR}}} \mathrm{D_{dif}}(V)$, l'application

$$\mathrm{l_{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_R^{(0,r_n]}} \mathrm{D}^{(0,r_n]}(V) \xrightarrow{f} \mathrm{D_{dif}}(V) = \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{+}(V)[t^{-1}]$$

est un isomorphisme après tensorisation par $\mathrm{B_{dR}}$ au-dessus de $\mathrm{l_{dR}}$.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{l}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_R^{(0,r_n]}} \mathrm{D}^{(0,r_n]}(V) & \xrightarrow{f} & \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_R^{(0,r_n]}} \mathrm{D}^{(0,r_n]}(V) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}} \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}(V) \end{array}$$

Comme $\mathrm{D}^{(0,r_n]}(V)$ est libre sur $\mathbf{B}_R^{(0,r_n]}$, l'application $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_R^{(0,r_n]}} \mathrm{D}^{(0,r_n]}(V) \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_R^{(0,r_n]}} \mathrm{D}^{(0,r_n]}(V)$ (déduite de l'inclusion $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}} \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$) est injective. Il en résulte que f est injective. Reste à voir qu'elle est surjective.

Soit $\delta_1, \ldots, \delta_n$ une base de $\mathrm{D}^{(0,r_n]}(V)$ sur $\mathbf{B}_R^{(0,r_n]}$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $(\mathrm{Id} \otimes f)(\delta_j) \in t^{-N}\,\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^+(V)$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. Notons $\mathcal{D}$ le sous-$\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$-module de $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_R^{(0,r_n]}} \mathrm{D}^{(0,r_n]}(V)$ engendré par $1 \otimes \delta_1, \ldots, 1 \otimes \delta_n$. L'application f est obtenue à partir de

$$f^+ \colon \mathcal{D} \to t^{-N}\,\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^+(V)$$

en inversant t. D'après ce qui précède, elle est injective, de sorte qu'on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{D} \xrightarrow{f^+} t^{-N}\,\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^+(V) \to \mathcal{C} \to 0.$$

Comme $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes f^+$ est un isomorphisme, on a $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} \mathcal{C} = 0$, de sorte que $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} \mathcal{C}$ est de t-torsion. Comme $\mathcal{C}$ est de type fini, il existe $m_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} \mathcal{C}$ est tué par t^{m_0}.

En réduisant modulo $\mathrm{Fil}^{m+1}\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$, et en utilisant la fidèle platitude de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ / \mathrm{Fil}^{m+1}\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ sur $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \mathrm{Fil}^{m+1}\,\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$ (lemme 5.10), on en déduit que le module $\big(\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ / \mathrm{Fil}^{m+1}\,\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+\big) \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} \mathcal{C}$ est tué par t^{m_0} pour tout $m \in \mathbf{N}$. Mais $\mathrm{Im}(f^+)$ est un sous-l_{dR}-module libre de $t^{-N}\,\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+} \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^+(V)$, donc fermé pour la topologie définie par la filtration : la filtration induite sur le $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+$-module $\mathcal{C}$ est séparée. Il en résulte que $t^{m_0}\mathcal{C} = 0$ et que $f = f^+[t^{-1}]$ est un isomorphisme. □

Remarque 7.4. *A priori*, dans la preuve qui précède, l'entier N est non nul, de sorte qu'il est nécessaire d'inverser t dans proposition 7.3.

Théorème 7.5. *On a* $\mathrm{l}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_R^{(0,r_n]}} \mathrm{D}^{(0,r_n]}(V) \in \mathbf{Rep}_{\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}}^{\mathrm{reg,pl}}(\Gamma_R)$ *: on peut le munir d'une connexion (cf section 4.1), et l'isomorphisme*

$$\mathrm{l}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_R^{(0,r_n]}} \mathrm{D}^{(0,r_n]}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}(V)$$

est compatible aux connexions.

8. Appendicite : la rechute

Le but de cette section est de prouver la proposition 8.6.

Lemme 8.1. *La restriction* $\iota_n \colon \widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ *est continue (l'anneau* $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ *étant muni de la topologie faible et* $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ *de la topologie naturelle).*

Démonstration. Cela se vérifie modulo $\mathrm{Fil}^{m+1}\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ pour $m \in \mathbf{N}$. La topologie sur $\mathrm{B}_m = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ / \mathrm{Fil}^{m+1}\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est alors la topologie de Banach p-adique définie par l'image B_m^0 de $\mathrm{W}(\mathcal{R}) = \widetilde{\mathbf{A}}^+$ dans B_m. Il suffit donc de voir que $\iota_n \colon \widetilde{\mathbf{A}}^+ \to B_m^0$ est continue, où B_m^0 est muni de la topologie p-adique. Par définition de la topologie faible sur $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = \mathrm{W}(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$, cela se vérifie sur les composantes fantômes : il s'agit de voir que l'application $\varphi^{-n} \colon \widetilde{\mathbf{E}}^+ \to \widetilde{\mathbf{E}}^+ / \overline{\pi}^{m+1}\widetilde{\mathbf{E}}^+$ est continue, ce qui est clair. □

Rappelons que $R^0 = \mathcal{O}_K\{T_1^{\pm1}, \ldots, T_d^{\pm1}\}$ et $\mathbf{A}_{R^0}^+$ est l'adhérence de $\mathbf{A}_{\mathcal{O}_K}^+\big[[\widetilde{T}_1]^{\pm1}, \ldots, [\widetilde{T}_d]^{\pm1}\big]$ pour la topologie faible (*cf* [2, Proposition 4.49]). En outre, $\widetilde{R}$ s'obtient à partir de R^0 en itérant un nombre fini de fois les opérations suivantes :

(ét) complétion p-adique d'une extension étale ;

(loc) complétion p-adique d'une localisation ;

(comp) complétion par rapport à un idéal contenant p.
et $R[p^{-1}]/\widetilde{R}[p^{-1}]$ est une extension finie étale.

Enfin, on peut choisir $\alpha,\beta\in\mathbf{N}_{>0}$ tels que $\mathbf{A}_R^+\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p^\alpha}{\pi^\beta}\right\}$ (*cf* [Proposition 4.49 (e)-(ii)]AB). Si $p^{-n}\beta v_{\mathbf{E}}(\pi)<\alpha$, on a $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p^\alpha}{\pi^\beta}\right\}\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r_n]}$: posons $n_0(R)=\left\lceil\frac{\log\left(\frac{p\beta}{(p-1)\alpha}\right)}{\log(p)}\right\rceil$. Pour $n\geq n_0(R)$, on a $\mathbf{A}_R^+\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r_n]}$.

Pour $n\in\mathbf{N}$, notons θ_n le composé $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r_n]}\xrightarrow{\iota_n}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}\xrightarrow{\theta}C$.

Lemme 8.2. *Il existe $n(R)\geq n_0(R)$ tel que pour $n\geq n(R)$, on a $\theta_n(\mathbf{A}_R^+)\subseteq R_n$.*

Démonstration. Supposons $n\geq n_0(R)$. On a $\mathbf{A}_R^+\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r_n]}$. Si $x\in\widetilde{\mathbf{E}}_R^+$, on a

$$\theta_n([x])=\theta\big([x]^{p^{-n}}\big)=x^{(n)}\in\widehat{R}_\infty.$$

On a donc $\theta_n(\widetilde{\mathbf{A}}_R^+)\subseteq\widehat{R}_\infty$ en vertu du lemme 8.1. Par ailleurs, on a $\theta_n\Big(\frac{p^\alpha}{\pi^\beta}\Big)=\frac{p^\alpha}{(\varepsilon^{(n)}-1)^\beta}\in\mathfrak{m}_{K_n}$: on a encore $\theta_n\Big(\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p^\alpha}{\pi^\beta}\right\}\Big)\subseteq\widehat{R}_\infty$ par continuité. En particulier, on a $\theta_n(\mathbf{A}_R^+)\subseteq\widehat{R}_\infty$. Reste à montrer qu'en fait, on a $\theta_n(\mathbf{A}_R^+)\subseteq R_n$.

Commençons par rappeler qu'il existe $0<\delta_R<1$ et un entier $n'(R)$ tel que $p^{\delta_R}\in\mathcal{O}_{K_{n'(R)}}$ et $R_n+p^{\delta_R}R_{n+1}=R_{n+1}^p+p^{\delta_R}R_{n+1}$ pour tout $n\geq n'(R)$. L'anneau $\mathbf{E}_R^+$ est l'ensemble des $((a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots)\in\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+$ tels que $a_n\in R_n/p^{\delta_R}R_n$ pour tout $n\geq n'(R)$. Quitte à augmenter $n_0(R)$, on peut supposer que $n_0(R)\geq n'(R)$. Pour $n\geq n_0(R)$, l'application $\theta_n\colon\mathbf{A}_R^+\to\widehat{R}_\infty$ induit donc l'application surjective

$$\begin{aligned}\overline{\theta}_n\colon\ \mathbf{E}_R^+&\to R_n/p^{\delta_R}R_n\subseteq R_\infty/p^{\delta_R}R_\infty\\(a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots)&\mapsto a_n.\end{aligned}$$

<u>Réduction</u>. Si le lemme est vrai pour $\widetilde{R}$, alors il l'est pour R. Dans ce cas, l'extension $\mathbf{E}_{\widetilde{R}}\to\mathbf{E}_R$ est finie étale. On peut écrire $\mathbf{E}_R^+=\overline{C}/\overline{I}$ où $\overline{C}=\mathbf{E}_{\widetilde{R}}+[t_1,\ldots,t_h]$ et $\overline{I}\subseteq\overline{C}$ est un idéal contenant $\overline{f}_1,\ldots,\overline{f}_h$ vérifiant

$$\begin{cases}\overline{I}[\overline{\pi}^{-1}]=(\overline{f}_1,\ldots,\overline{f}_h)\overline{C}\\(\exists s\in\mathbf{N})\ \overline{\pi}^s\in\Big(\mathrm{Jac}\Big(\frac{\partial\overline{f}_i}{\partial t_j}\Big)_{1\leq i,j\leq h}\Big)\end{cases}$$

Soient alors $f_1,\ldots,f_h\in C:=\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^+[t_1,\ldots,t_h]$ des relèvements de $\overline{f}_1,\ldots,\overline{f}_h$ et I l'idéal de C qu'ils engendrent. Posons $A=C/I$. Alors la $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^+$-algèbre $\mathbf{A}_R^+$ est un quotient de A. Pour $n\geq\max(n(\widetilde{R}),n_0(R))$, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}A \arrow[r] \arrow[rrr, dotted, "\theta'_n"] & \mathbf{A}_R^+ \arrow[r] & \mathbf{E}_R^+ \arrow[r, "\overline{\theta}_n"] & R_n/p^{\delta_R}R_n\\ \mathbf{A}_{\widetilde{R}}^+ \arrow[u] \arrow[r, "\theta_n"] & \widetilde{R}_n \arrow[rr] & & R_n \arrow[u]\end{tikzcd}$$

Comme $\overline{\theta}_n(\overline{\pi}^s)=(\varepsilon^{(n)}-1)^s$, on peut appliquer le lemme de Hensel pour relever $\overline{\theta}_n$ en une (unique) application θ'_n (en pointillé) dès que $v_p((\varepsilon^{(n)}-1)^s)<\frac{\delta_R}{2}$, *i.e.* dès que $n\geq\frac{\log\left(\frac{2s}{(p-1)\delta_R}\right)}{\log(p)}+1$. Posons $n(R)=\max\Big(n(\widetilde{R}),n_0(R),\left\lceil\frac{\log\left(\frac{2s}{(p-1)\delta_R}\right)}{\log(p)}\right\rceil+1\Big)$. Pour $n\geq n(R)$, on a le diagramme (commutatif par unicité de θ'_n)

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_R^+ \arrow[r, "\theta_n"] \arrow[dr, dotted, "\theta_n"] & \widehat{R}_\infty \\
A \arrow[u, two heads] \arrow[r, "\theta'_n"] & R_n \arrow[u, hook] \\
\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^+ \arrow[u] \arrow[r, "\theta_n"] & \widetilde{R}_n \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Mais comme $A \to \mathbf{A}_R^+$ est surjective, on a $\theta_n(\mathbf{A}_R^+) = \theta'_n(A) \subseteq R_n$.

<u>Cas $R = \widetilde{R}$</u>. On a $\mathbf{A}_W^+ = W[\![\pi]\!]$ et $\theta_n(\pi) = \varepsilon^{(n)} - 1 \in W_n$ d'où $\theta_n(\mathbf{A}_W^+) \subseteq W_n$ par continuité (*cf* lemme 8.1) : on peut prendre $n(W) = 0$. D'après l'étape précédente (réduction) appliquée à l'extension finie $W \subseteq \mathcal{O}_K$, il existe $n(\mathcal{O}_K) \geq n_0(\mathcal{O}_K)$ tel que pour tout $n \geq n(\mathcal{O}_K)$, on a $\theta_n(\mathbf{A}_{\mathcal{O}_K}^+) \subseteq \mathcal{O}_{K_n}$.

Pour $i \in \{1, \ldots, d\}$, on a $\theta_n([\widetilde{T}_i]) = T_i^{(n)}$ et $\theta_n([\varepsilon]) = \varepsilon^{(n)}$. Si $n \geq n(R^0) := \max(n_0(R^0), n(\mathcal{O}_K))$, on a $\iota_n\big(\mathbf{A}_{\mathcal{O}_K}^+\big[[\widetilde{T}_1]^{\pm 1}, \ldots, [\widetilde{T}_d]^{\pm 1}\big]\big) \subseteq R_n^0$. Par continuité (*cf* lemme 8.1), on a alors $\iota_n(\mathbf{A}_{R^0}^+) \subseteq R_n^0$.

Il suffit désormais de montrer que si

$$\begin{cases} \theta_n(\mathbf{A}_R^+) \subseteq R_n, \\ S \text{ est une } R\text{-algèbre de type (ét), (loc) ou (comp),} \end{cases}$$

alors $\theta_n(\mathbf{A}_S^+) \subseteq S_n$.

• Supposons S/R de type (ét). L'extension $\mathbf{A}_R^+ \to \mathbf{A}_S^+$ relève l'extension formellement étale (pour la topologie $\overline{\pi}$-adique) $\mathbf{E}_R^+ \to \mathbf{E}_S^+$. Il en résulte que l'extension $\mathbf{A}_R^+ \to \mathbf{A}_S^+$ est formellement étale pour la topologie faible. Posons $n(S) = \max(n(R), n_0(S))$. Pour $n \geq n(S)$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_S^+ \arrow[r] \arrow[drr, dotted, "\theta'_n"] & \mathbf{E}_S^+ \arrow[r, "\overline{\theta}_n"] & S_\infty/p^{\delta_S}S_\infty \\
\mathbf{A}_R^+ \arrow[u] \arrow[r, "\theta_n"] & R_n \arrow[r] & S_n \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Comme S_n est séparé et complet pour la topologie p-adique et $\mathbf{A}_R^+ \to \mathbf{A}_S^+$ est formellement étale pour la topologie faible, il existe une unique application θ'_n (en pointillé) faisant commuter le diagramme. Pour la même raison, il existe une unique application $\mathbf{A}_S^+ \to \widehat{S}_\infty$ qui prolonge $\theta_n \colon \mathbf{A}_R^+ \to \widehat{R}_\infty$, et c'est θ_n. On a donc nécessairement $\theta'_n = \theta_n$ sur $\mathbf{A}_S^+$ et $\theta_n(\mathbf{A}_S^+) \subseteq S_n$ pour $n \geq n(S)$.

• Supposons S/R de type (loc). Il existe une partie multiplicative $\overline{U} \subseteq \mathbf{E}_R^+$ telle que $\mathbf{E}_S^+$ est le complété de $\overline{U}^{-1}\,\mathbf{E}_R^+$ pour la topologie $\overline{\pi}$-adique. Si U est l'image inverse de $\overline{U}$ dans $\mathbf{A}_R^+$, l'anneau $\mathbf{A}_S^+$ est le complété, pour la topologie faible, de $U^{-1}\mathbf{A}_R^+$. Comme $\overline{U}$ est constitué d'éléments inversibles dans $\mathbf{E}_S^+$, son image par $\overline{\theta}_n$ est inversible dans $S_n/p^{\delta_S}S_n$. Comme S_n est complet pour la topologie p-adique, cela implique que $\theta_n(U) \subseteq R_n$ est constitué d'éléments inversibles dans S_n. On a donc $\theta_n(U^{-1}\mathbf{A}_R^+) \subseteq S_n$, et donc $\theta_n(\mathbf{A}_S^+) \subseteq S_n$ par continuité (*cf* lemme 8.1).

• Supposons S/R de type (comp). Il existe un idéal $I \subseteq R$ contenant p et tel que S est le complété de R pour la topologie I-adique. Soit alors $\overline{J}$ l'idéal de $\mathbf{E}_R^+$ constitué des éléments $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ tels que $a_n \in IR_n/p^{\delta_R}R_n$ pour $n \geq n'(R)$. L'idéal $\overline{J}$ contient $\overline{\pi}$ et $\mathbf{E}_S^+$ est le complété de $\mathbf{E}_R^+$ pour la topologie $\overline{J}$-adique. Si J est l'image inverse de $\overline{J}$ dans $\mathbf{A}_R^+$, l'anneau $\mathbf{A}_S^+$ est le complété de $\mathbf{A}_R^+$ pour la topologie J-adique. On a $\overline{\theta}_n(\overline{J}) = IR_n/p^{\delta_R}R_n$ et donc $\theta_n(J) = I$. Comme S_n est complet pour la topologie I-adique, on a donc $\theta_n(\mathbf{A}_S^+) \subseteq S_n$. □

Remarque 8.3. Dans le cas non ramifié, on peut prendre $n(R) = 0$.

Lemme 8.4. *Il existe $N_R \geq n_0(R)$ tel que pour $n \geq N_R$, on a*

$$\iota_n\big(\mathbf{A}_R^+\big) \subseteq R_n[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!] \subseteq \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+ \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\,.$$

Démonstration. On procède de façon analogue à celle utilisée lors de la preuve du lemme 8.2, dont on conserve les notations.

<u>Réduction</u> : Si c'est vrai pour $\widetilde{R}$, ça l'est encore pour R. La $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^+$-algèbre $\mathbf{A}_R^+$ est un quotient de $A = C/I$ où $C = \mathbf{A}_{\widetilde{R}}^+[t_1, \ldots, t_h]$ et $I = (f_1, \ldots, f_h) \subseteq C$ est tel que $(p, \pi^s) \subseteq \Big(\mathrm{Jac}\big(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}\big)_{1 \leq i,j \leq h}\Big)$. Pour $n \geq N_R = \max(n(R), N_{\widetilde{R}})$, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[drr, dotted, "\iota'_n"] & \mathbf{A}_R^+ \arrow[r, "\theta_n"] & R_n[p^{-1}] \\
\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^+ \arrow[u] \arrow[r, "\iota_n"] & \widetilde{R}_n[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!] \arrow[r] & R_n[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Comme $\theta_n(\pi^s) = (\varepsilon^{(n)} - 1)^s$ est inversible dans $R_n[p^{-1}]$ donc dans $R_n[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!]$, on peut appliquer le lemme de Hensel pour relever θ_n en une (unique) application ι'_n (en pointillé). On a le diagramme (commutatif par unicité de ι'_n)

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_R^+ \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[dr, dotted, "\iota_n"] & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+\mathcal{H}_R} \\
A \arrow[u, two heads] \arrow[r, "\iota'_n"] & R_n[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!] \arrow[u, hook] \\
\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^+ \arrow[u] \arrow[r, "\iota_n"] & \widetilde{R}_n[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Mais comme $A \to \mathbf{A}_R^+$ est surjective, on a $\iota_n(\mathbf{A}_R^+) = \iota'_n(A) \subseteq R_n[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!]$.

<u>Cas $R = \widetilde{R}$</u>. On a $\mathbf{A}_W^+ = W[\![\pi]\!]$ et $\iota_n(\pi) = [\varepsilon]^{p^{-n}} - 1 = \varepsilon^{(n)} \exp(p^{-n} t) - 1 \in W_n[p^{-1}][\![t]\!]$: d'après le lemme 8.1, on peut poser $N_W = 0$. D'après l'étape précédente (réduction) appliquée à l'extension finie $W \subseteq \mathcal{O}_K$, il existe $N_{\mathcal{O}_K} \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N_{\mathcal{O}_K}$, on a $\iota_n(\mathbf{A}_{\mathcal{O}_K}^+) \subseteq K_n[\![t]\!]$. Pour $i \in \{1, \ldots, d\}$, on a

$$\iota_n([\widetilde{T}_i]) = [\widetilde{T}_i]^{p^{-n}} = (T_i - u_i)^{p^{-n}} = T_i^{(n)}(1 - T_i^{-1} u_i)^{p^{-n}} \in R_n^0[\![u_i]\!]$$

de sorte que $\iota_n\big(\mathbf{A}_{\mathcal{O}_K}^+\big[[T_1]^{\pm 1}, \ldots, [T_d]^{\pm 1}\big]\big) \subseteq R^0[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!]$. Comme $\mathbf{A}_{R^0}^+$ est le complété de $\mathbf{A}_{\mathcal{O}_K}^+\big[[T_1]^{\pm 1}, \ldots, [T_d]^{\pm 1}\big]$ pour la topologie faible, on a bien $\iota_n(\mathbf{A}_{R^0}^+) \subseteq R^0[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!]$ pour $n \geq N_{R^0} = N_{\mathcal{O}_K}$.

Comme lors de la preuve du lemme 8.2, il suffit désormais de montrer que si

$$\begin{cases} \iota_n(\mathbf{A}_R^+) \subseteq R_n[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!], \\ S \text{ est une } R\text{-algèbre de type (ét), (loc) ou (comp),} \end{cases}$$

alors $\iota_n(\mathbf{A}_S^+) \subseteq S_n[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!]$.

• Supposons S/R de type (ét). Posons $N_S = \max(N_R, n(S))$. Pour $n \geq n(S)$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_S^+ \arrow[rr, "\theta_n"] \arrow[drr, dotted, "\iota'_n"] & & S_n[p^{-1}] \\
\mathbf{A}_R^+ \arrow[u] \arrow[r, "\iota_n"] & R_n[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!] \arrow[r, hook] & S_n[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Comme $S_n[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!]$ est séparé et complet pour la topologie naturelle et $\mathbf{A}_R^+ \to \mathbf{A}_S^+$ est formellement étale pour la topologie faible, il existe une unique application ι'_n (en pointillé) faisant commuter le diagramme (*cf* lemme 8.1). Pour la même raison, il existe une unique application $\mathbf{A}_S^+ \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+\mathcal{H}_S}$ qui prolonge $\iota_n \colon \mathbf{A}_R^+ \to R_n[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!]$, et c'est ι_n. On a donc nécessairement $\iota'_n = \iota_n$ sur $\mathbf{A}_S^+$ et $\iota_n(\mathbf{A}_S^+) \subseteq S_n[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!]$ pour $n \geq N_S$.

• Supposons S/R de type (loc). Soit $n \geq N_S := \max(N_R, n(S))$. L'ensemble $\theta_n(U) \subseteq R_n[p^{-1}]$ est constitué d'éléments inversibles dans S_n. Il en résulte que $\iota_n(U)$ est constitué d'éléments inversibles dans $S_n[p^{-1}][\![u_1,\ldots,u_d,t]\!]$. On a donc $\iota_n(U^{-1}\mathbf{A}_R^+)\subseteq S_n[p^{-1}][\![u_1,\ldots,u_d,t]\!]$, et donc $\iota_n(\mathbf{A}_S^+)\subseteq S_n[p^{-1}][\![u_1,\ldots,u_d,t]\!]$ par continuité (*cf* lemme 8.1).

• Supposons S/R de type (comp). Soit $n\geq N_S:=\max(N_R,n(S))$. On a $\theta_n(J)=I$, donc $\iota_n(J)\subseteq I+(u_1,\ldots_u d,t)S_n[p^{-1}][\![u_1,\ldots,u_d,t]\!]$. Comme S_n est complet pour la topologie I-adique et $S_n[p^{-1}][\![u_1,\ldots,u_d,t]\!]$ pour la topologie $(u_1,\ldots,u_d,t)$-adique, on a $\iota_n(\mathbf{A}_S^+)\subseteq S_n[p^{-1}][\![u_1,\ldots,u_d,t]\!]$. □

Pour $r\in\mathbf{Q}_{>0}$, on pose $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right)_{\geq 0}=\left\{z\in\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]},\ w_r(z)\geq 0\right\}$. Si $r=\frac{a}{b}$ avec $a,b\in\mathbf{N}_{>0}$, notons $\widetilde{\mathcal{A}}_{R,(a,b)}$ l'adérence dans $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$ de $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left[\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\frac{p-1}{p}b}}\right]$ pour la topologie définie par w_r (ou la topologie p-adique, cela revient au même). D'après [2, Lemme 4.20], on a $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}=\widetilde{\mathcal{A}}_{R,(a,b)}\big[[\overline{\pi}]^{-1}\big]$. Notons $\mathcal{A}_{R,(a,b)}$ l'adhérence dans $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$ de $\mathbf{A}_R^+\left[\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\frac{p-1}{p}b}}\right]$ pour la topologie définie par w_r (ou la topologie p-adique).

Lemme 8.5. *On a* $\mathbf{A}_R^{(0,r]}=\mathcal{A}_{R,(a,b)}\big[[\overline{\pi}]^{-1}\big]$.

Démonstration. On pose $\left(\mathbf{A}_R^{(0,r]}\right)_{\geq 0}=\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right)_{\geq 0}\cap\mathbf{A}_R$. On a déjà $\mathcal{A}_{R,(a,b)}\subseteq\mathbf{A}_R^{(0,r]}$. Par ailleurs, on sait que $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right)_{\geq 0}\subseteq\frac{1}{[\overline{\pi}]^{\lceil\frac{a-1}{r}\rceil}}\widetilde{\mathcal{A}}_{R,(a,b)}$ (*cf* [2, Lemme 4.20]). Plus précisément, tout élément de $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$ s'écrit de façon unique

$$z=\sum_{k=0}^{\infty}[z_k]\left(\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\frac{p-1}{p}b}}\right)^{q_k}p^{s_k}$$

avec $\lim\limits_{k\to\infty}v_{\mathbf{E}}(z_k)=\infty$ et $rv_{\mathbf{E}}(z_k)+s_k\geq 0$ pour tout $k\in\mathbf{N}$ (où $k=aq_k+s_k$, $q_k,s_k\in\mathbf{N}$ et $0\leq s_k<a$ est la division euclidienne de k par a). Supposons que $z\in\left(\mathbf{A}_R^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$. Montrons par récurrence sur $n\in\mathbf{N}$ que

$$z\in\frac{1}{[\overline{\pi}]^{\lceil\frac{a-1}{r}\rceil}}\mathcal{A}_{R,(a,b)}\cap\mathbf{A}_R^{(0,r]}+p^n\mathbf{A}_R^{(0,r]}.$$

Écrivons donc $z=x_n+p^ny_n$ avec $x_n\in\frac{1}{[\overline{\pi}]^{\lceil\frac{a-1}{r}\rceil}}\mathcal{A}_{R,(a,b)}\cap\mathbf{A}_R^{(0,r]}$ et $y_n\in\mathbf{A}_R^{(0,r]}$. On peut donc écrire $p^ny_n=z-x_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}[y_{k,n}]\left(\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\frac{p-1}{p}b}}\right)^{q_k}p^{s_k}\in p^n\mathbf{A}_R^{(0,r]}$. Mais on a $rv_{\mathbf{E}}(y_{n,n})+s_n\geq 0$ donc $v_{\mathbf{E}}(y_{n,n})+\frac{a-1}{r}\geq 0$ *i.e.* $\overline{\pi}^{\lceil\frac{a-1}{r}\rceil}y_{n,n}\in\mathbf{E}_R^+$. Comme $\mathbf{A}_R^+\to\mathbf{E}_R^+$ est surjective, il existe $a_n\in\mathbf{A}_R^+$ relevant $\overline{\pi}^{\lceil\frac{a-1}{r}\rceil}y_{n,n}$, de sorte que $p^ny_n-\frac{1}{[\overline{\pi}]^{\lceil\frac{a-1}{r}\rceil}}a_n\left(\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\frac{p-1}{p}b}}\right)^{q_n}p^{s_n}\in p^{n+1}\mathbf{A}_R^{(0,r]}$. Il suffit maintenant de poser $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{[\overline{\pi}]^{\lceil\frac{a-1}{r}\rceil}}a_n\left(\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\frac{p-1}{p}b}}\right)^{q_n}p^{s_n}\in\frac{1}{[\overline{\pi}]^{\lceil\frac{a-1}{r}\rceil}}\mathcal{A}_{R,(a,b)}\cap\mathbf{A}_R^{(0,r]}$ et $y_{n+1}=\frac{z-x_{n+1}}{p^{n+1}}\in\mathbf{A}_R^{(0,r]}$.

Cela implique que $\left(\mathbf{A}_R^{(0,r]}\right)_{\geq 0}\subseteq\frac{1}{[\overline{\pi}]^{\lceil\frac{a-1}{r}\rceil}}\mathcal{A}_{R,(a,b)}$ et donc que $\mathbf{A}_R^{(0,r]}=\mathcal{A}_{R,(a,b)}\big[[\overline{\pi}]^{-1}\big]$. □

Proposition 8.6. *Pour* $n\geq N_R$, *on a*

$$\iota_n\big(\mathbf{A}_R^{(0,r_n]}\big)\subseteq R_n[p^{-1}][\![u_1,\ldots,u_d,t]\!][t^{-1}]\subseteq \mathrm{l}_{\mathrm{dR}}\subseteq\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\,.$$

Démonstration. D'après le lemme 8.5, il suffit de voir que $\iota_n\big(\mathcal{A}_{R,(1,(p-1)p^{n-1})}\big)\subseteq R_n[p^{-1}][\![u_1,\ldots,u_d,t]\!]$ (car $\iota_n([\overline{\pi}])\in R_n[p^{-1}][\![t]\!]$ d'après le lemme 8.4). Mais d'après le lemme 8.4, on sait déjà que $\iota_n\big(\mathbf{A}_R^+\big)\subseteq R_n[p^{-1}][\![u_1,\ldots,u_d,t]\!]$ (et que $\iota_n\left(\frac{p}{[\overline{\pi}]^{(p-1)^2p^{n-2}}}\right)\in R_n[p^{-1}][\![u_1,\ldots,u_d,t]\!]$). Par définition de $\mathcal{A}_{R,(1,(p-1)p^{n-1})}$, il suffit donc de montrer que ι_n est continue pour la topologie définie par w_{r_n}. Il suffit de le vérifier sur $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r_n]}\right)_{\geq 0}$. Mais si $n \in \mathbf{N}_{>0}$, la topologie définie par w_{r_n} sur

$$\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r_n]}\right)_{\geq 0} \Big/ p^n \left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r_n]}\right)_{\geq 0} = \left\{(z_0, \ldots, z_{n-1}) \in \mathrm{W}_n\left(\widetilde{\mathbf{E}}_R\right),\ 0 \leq k < n \Rightarrow v_{\mathbf{E}}(z_k) \geq -k/r_n\right\}$$

n'est autre que la topologie faible : on peut alors raisonner comme dans la preuve du lemme 8.1. $\square$

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{R}[p^{-1}] & \\
 & & S_\infty\overline{K} \arrow[ul, "H_S"'] \\
S_\infty[p^{-1}] \arrow[uur, "\mathcal{H}_S"'] & & S\overline{K} \arrow[u, "\widetilde{\Gamma}_S"'] \\
S[p^{-1}] \arrow[u, "\Gamma_S"] & & R\overline{K} \arrow[u] \arrow[uuul, "G_R"'] \\
 & R[p^{-1}] \arrow[ul] \arrow[uul, "\Gamma_{S/R}"'] \arrow[uuuu, "\mathcal{G}_R"'] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ & \\
 & & \mathbb{I}_{\mathrm{dR}}^+(S) \arrow[ul] \\
\mathrm{l}_{\mathrm{dR}}^+(S) \arrow[uur] & & \mathbb{S} \arrow[u] \\
S[p^{-1}] \arrow[u] & & \mathbb{R} \arrow[u] \arrow[uuul] \\
 & R[p^{-1}] \arrow[ul] \arrow[uul] \arrow[uuuu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Références

[1] F. Andreatta – « Generalized ring of norms and generalized (φ, Γ)-modules », *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série* **39** (2006), p. 599–647.

[2] F. Andreatta et O. Brinon – « Surconvergence des représentations p-adiques : le cas relatif », Représentations p-adiques de groupes p-adiques. I : représentations galoisiennes et (φ, Γ)-modules, Astérisque, vol. 319, Société Mathématique de France, 2008, p. 39–116.

[3] F. Andreatta et A. Iovita – « Global applications of relative (φ, Γ)-modules I », Représentations p-adiques de groupes p-adiques. I : représentations galoisiennes et (φ, Γ)-modules, Astérisque, vol. 319, Société Mathématique de France, 2008, p. 339–420.

[4] M. Atiyah et i. G. Macdonald – *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, 1969.

[5] L. Berger – « Représentations p-adiques et équations différentielles », *Invent. Math.* **148** (2002), p. 219–284.

[6] O. Brinon – « Une généralisation de la théorie de Sen », *Mathematische Annalen* **327** (2003), p. 793–813.

[7] ———, *Représentations p-adiques cristallines et de de Rham dans le cas relatif*, Mémoires de la SMF, vol. 112, Société Mathématique de France, 2008.

[8] F. Cherbonnier et P. Colmez – « Représentations p-adiques surconvergentes », *Invent. Math.* **133** (1998), p. 581–611.

[9] ———, « Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local », *JAMS* **12** (1999), p. 241–268.

[10] G. Faltings – « Almost étale extensions », Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques. II, Astérisque, vol. 279, Société Mathématique de France, 2002, p. 185–270.

[11] ———, « A p-adic Simpson correspondance », *Advances in Math.* **198** (2005), p. 847–862.

[12] J.-M. Fontaine – « Représentations p-adiques des corps locaux. I », Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progress in Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 249–309.

[13] ———, « Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques », Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques. III, Astérisque, vol. 295, Société Mathématique de France, 2004, p. 1–115.

[14] O. Gabber et L. Ramero – *Almost ring theory*, Lecture Notes in Math., vol. 1800, Springer Verlag, 2003.

[15] N. Katz – « Nilpotent connexions and the monodromy theorem : applications of a result of Turrittin », *Publ. Math. IHES* **39** (1970), p. 176–232.

[16] H. Matsumura – *Commutative ring theory, second edition*, vol. 8, Cambridge university Press, 1986.

[17] M. Raynaud et L. Gruson – « Critères de platitude et de projectivité », *Invent. Math.* **13** (1971), p. 1–89.

[18] S. Sen – « Continuous cohomology and p-adic Galois representation », *Invent. Math.* **62** (1980), p. 89–116.

[19] J. Tate – « Relations between K_2 and Galois cohomology », *Invent. Math.* **36** (1976), p. 257–274.

Università di Milano, Dipartimento di Matematica, via Cesare Saldini 50, 20133 Milano, Italia
E-mail address: Fabrizio.Andreatta@mat.unimi.it

Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse, France
E-mail address: brinon@math.univ-paris13.fr