RAPPRESENTAZIONI DI GALOIS p-ADICHE E (φ,Γ)-MODULI

STEFANO VIGNI

SOMMARIO. In questi appunti forniamo un resoconto introduttivo (senza dimostrazioni) della teoria di Fontaine delle rappresentazioni di Galois p-adiche in termini di φ-moduli e (φ,Γ)-moduli.

1. INTRODUZIONE

Scopo di queste note informali è descrivere secondo Fontaine le rappresentazioni p-adiche del gruppo di Galois di un campo locale di caratteristica 0 tramite opportuni moduli ([Fo]). Ci occuperemo esclusivamente degli aspetti introduttivi della teoria, e anche limitatamente a questi il resoconto non ha alcuna pretesa di completezza. La strategia che seguiremo può essere divisa schematicamente in tre passi:

(1) classificazione delle rappresentazioni di campi locali in caratteristica p (φ-*moduli*);
(2) legame fra caratteristica p e caratteristica 0 (*campi di norme*);
(3) classificazione delle rappresentazioni di campi locali in caratteristica 0 ((φ,Γ)-*moduli*).

Per un'introduzione più dettagliata all'argomento rimandiamo a [He].

2. φ-MODULI E (φ,Γ)-MODULI: DEFINIZIONI GENERALI

Cominciamo col descrivere alcune costruzioni algebriche generali. Seguiremo essenzialmente [Fo, §A.1.1 e §A.3.3]. Nel prosieguo A sarà sempre un anello commutativo unitario.

2.1. **La categoria ΦM_A.** Sia $\sigma : A \to A$ un omomorfismo di anelli fissato. La coppia (A,σ) verrà talvolta detta σ-*anello*. L'omomorfismo σ induce nel modo ovvio una nuova struttura di A-modulo su A, e indicheremo A_σ l'A-modulo così ottenuto. Esplicitamente, se $a \in A$ e $b \in A_\sigma$ la moltiplicazione di b per a è data da $a * b := \sigma(a)b$. Se poi M è un A-modulo definiamo l'A-modulo M_σ come $M_\sigma := A_\sigma \otimes_A M$. In altre parole, $M_\sigma = M$ come gruppo abeliano e la moltiplicazione esterna su M_σ è data da $a \star m := \sigma(a)m$.

2.1.1. φ-*moduli.* Possiamo ora dare la seguente

Definizione 2.1. Un φ-*modulo sopra* (A,σ) (o semplicemente *sopra* A) è un A-modulo M più un'applicazione

$$\varphi : M \longrightarrow M$$

che sia σ-lineare, ossia additiva e tale che $\varphi(am) = \sigma(a)\varphi(m)$ per ogni $a \in A$ e ogni $m \in M$.

Equivalentemente, la Definizione 2.1 può essere riformulata dicendo che un φ-modulo sopra (A,σ) è un A-modulo M più un'applicazione lineare $\varphi : M \to M_\sigma$.

2.1.2. *Morfismi di φ-moduli.* Siano (M_1,φ_1) e (M_2,φ_2) due φ-moduli sopra (A,σ). Un morfismo da (M_1,φ_1) a (M_2,φ_2) è un'applicazione A-lineare $\psi : M_1 \to M_2$ tale che il quadrato

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\psi} & M_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} \\ M_1 & \xrightarrow{\psi} & M_2 \end{array}$$

è commutativo. Otteniamo in questo modo la categoria dei φ-moduli sopra il σ-anello A, che denoteremo $\Phi M_{(A,\sigma)}$ o semplicemente ΦM_A.

Siao ora $A_\sigma[\varphi]$ l'anello (non commutativo se $\sigma \neq \mathrm{id}_A$) generato da A e da un elemento φ con la relazione $\varphi \cdot \lambda = \sigma(\lambda)\varphi$ per ogni $\lambda \in A$. Si può allora verificare che ΦM_A è la categoria degli $A_\sigma[\varphi]$-moduli a sinistra, da cui deduciamo che ΦM_A è una categoria abeliana. Inoltre ΦM_A è naturalmente dotata di prodotto tensore: il tensore di due φ-moduli (M_1, φ_1) e (M_2, φ_2) sopra A è il φ-modulo $(M_1 \otimes_A M_2, \varphi)$ con $\varphi(m_1 \otimes m_2) := \varphi_1(m_1) \otimes \varphi_2(m_2)$.

Per semplicità, d'ora in avanti faremo la seguente

Ipotesi 2.2. *L'anello A è noetheriano.*

2.1.3. *φ-moduli étale.* La nozione di modulo étale, che ora introduciamo, avrà nel seguito un ruolo centrale.

Definizione 2.3. Un φ-modulo (M, φ) sopra A si dice *étale* se M è finitamente generato su A e $\varphi(M)$ genera M come A-modulo.

Otteniamo così una sottocategoria piena $\Phi M_A^{\text{ét}} \subset \Phi M_A$.

2.1.4. *Funtorialità.* Siano (A_1, σ_1) e (A_2, σ_2) due σ-anelli, e sia $\alpha : A_1 \to A_2$ un omomorfismo di σ-anelli, ossia un omomorfismo di anelli tale che il quadrato

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha} & A_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_1} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_2} \\ A_1 & \xrightarrow{\alpha} & A_2 \end{array}$$

commuta. Se M è un φ-modulo sopra (A_1, σ_1) allora $\alpha^*(M) := A_2 \otimes_{A_1} M$ è un φ-modulo sopra (A_2, σ_2). Nella definizione di $\alpha^*(M)$ la struttura di A_1-modulo su A_2 è (ovviamente) indotta da α. Otteniamo un funtore covariante additivo

$$\alpha^* : \Phi M_{(A_1,\sigma_1)} \longrightarrow \Phi M_{(A_2,\sigma_2)}.$$

Inoltre si può provare che

$$A_1,\ A_2 \text{ noetheriani e } \sigma\text{-piatti} \quad \Longrightarrow \quad \alpha^*\big(\Phi M_{A_1}^{\text{ét}}\big) \subset \Phi M_{A_2}^{\text{ét}},$$

cioè α^* manda φ-moduli étale sopra A_1 in φ-moduli étale sopra A_2.

2.2. **La categoria $\Phi\Gamma M_A$.** Sia (A, σ) come prima, ma supponiamo che A sia anche dotato dell'azione di un gruppo Γ compatibile con la struttura di anello di A e commutante con σ. In altre parole, per ogni $\gamma \in \Gamma$ si ha un omomorfismo di anelli $\gamma : A \to A$ tale che

$$\gamma\big(\sigma(a)\big) = \sigma\big(\gamma(a)\big) \qquad \forall\ a \in A.$$

2.2.1. *(φ, Γ)-moduli.* Tenendo conto della Γ-struttura aggiunta su A, diamo la

Definizione 2.4. Un *(φ, Γ)-modulo sopra* (A, σ) (o semplicemente *sopra* A) è un φ-modulo M sopra (A, σ) dotato di un'azione Γ-lineare di Γ che commuta con φ.

Esplicitamente, per ogni $\gamma \in \Gamma$ abbiamo un'applicazione additiva $\gamma : M \to M$ tale che

$$\gamma(am) = \gamma(a)\gamma(m), \qquad \gamma\big(\varphi(m)\big) = \varphi\big(\gamma(m)\big) \qquad \forall\ a \in A,\ \forall\ m \in M.$$

La nozione di morfismo di (φ, Γ)-moduli è ovvia. Si ha allora la categoria abeliana $\Phi\Gamma M_A$, anch'essa munita di prodotto tensore. La definizione di (φ, Γ)-modulo *étale* sopra A è analoga alla Definizione 2.3, e la categoria $\Phi\Gamma M_A^{\text{ét}}$ così ottenuta è una sottocategoria piena di $\Phi\Gamma M_A$.

Osservazione 2.5. Nel seguito A e M avranno sempre una topologia "naturale", e tutte le applicazioni che compaiono nelle definizioni di φ-moduli e (φ, Γ)-moduli sopra A verranno (implicitamente) supposte continue rispetto a tali topologie.

3. Protagonisti e notazioni

Nel resto della nostra trattazione adotteremo le seguenti notazioni:

- $k = k_F$: campo perfetto (i.e., $x \mapsto x^p$ automorfismo di k) di char $p > 0$;
- $W(k)$: vettori di Witt di k;
- $F := W(k)[1/p] = \mathrm{frac}\big(W(k)\big)$: campo delle frazioni di $W(k)$.

Sappiamo che F è assolutamente non ramificato (ossia, p è un uniformizzante in $W(k)$) e di char 0. Fissiamo una chiusura algebrica $\bar{F}$ di F. Sia poi $K \subset \bar{F}$ un'estensione finita *totalmente ramificata* di F, e scegliamo un uniformizzante π per K (in particolare, $K = F(\pi)$). Sia infine $K_\infty \subset \bar{F}$ un'estensione (infinita) di K che sia "aritmeticamente profinita" (nel seguito, APF) secondo Fontaine e Wintenberger ([FoWi]). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissiamo una radice p^n-esima $\pi^{p^{-n}}$ di π in $\bar{F}$ in modo tale che il sistema $(\pi^{p^{-n}})_{n\in\mathbb{N}}$ sia compatibile nel senso ovvio. I casi di interesse per noi saranno i seguenti due:

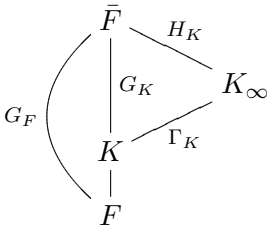
(a) $K_\infty = \bigcup_n K_n$ con $K_n := K(\boldsymbol{\mu}_{p^n})$ (caso "classico");
(b) $K_\infty = \bigcup_n K_n$ con $K_n := K\big(\pi^{p^{-n}}\big)$ (per applicazioni ai lavori di Kisin).

Qui $\boldsymbol{\mu}_{p^n}$ indica le radici p^n-esime dell'unità. In effetti, un risultato generale assicura che K_∞/K è APF sia in (a) sia in (b) (per (b), si veda [Br, Lemme 2.1.1]).

Osservazione 3.1. Nel caso (a) (caso "ciclotomico") l'estensione K_∞/K è di Galois, mentre così non è nel caso (b). Più precisamente, è semplice vedere che nel secondo caso la chiusura galoisiana di K_∞ in $\bar{F}$ è il campo $K_\infty(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$.

Sarà utile tenere a mente il seguente diagramma di estensioni di campi e gruppi di Galois:

(1)



Naturalmente il gruppo Γ_K compare solo nel caso (a) in cui K_∞/K è di Galois. Introdotta la notazione necessaria, possiamo ora sinteticamente affermare che lo scopo di queste note è "descrivere" *à la* Fontaine le rappresentazioni p-adiche del gruppo G_K in termini di φ-moduli e di (φ,Γ)-moduli.

4. Campi locali in caratteristica $p > 0$

Sia $C := \hat{\bar{F}}$ il completamento di $\bar{F}$ rispetto alla metrica p-adica e sia $\mathcal{O}_C$ il suo anello degli interi. In particolare, $C = \mathbb{C}_p := \hat{\bar{\mathbb{Q}}}_p$ se k è un campo finito.

4.1. **L'anello $\widetilde{\mathbb{E}}^+$ e il campo $\widetilde{\mathbb{E}}$.** Sia $0 < \varepsilon \leq 1$ e sia $\mathfrak{A}_\varepsilon := \{x \in \mathcal{O}_C \mid v_p(x) \geq \varepsilon\}$. Definiamo

$$\widetilde{\mathbb{E}}^+_\varepsilon := \big\{(x_n)_{n\geq 0} \in (\mathcal{O}_C/\mathfrak{A}_\varepsilon)^{\mathbb{N}} \;\big|\; x_{n+1}^p = x_n \text{ per ogni } n \geq 0\big\} = \varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_C/\mathfrak{A}_\varepsilon;$$

con somma e prodotto definiti componente per componente, $\widetilde{\mathbb{E}}^+_\varepsilon$ è un anello locale perfetto di char p. Consideriamo poi l'insieme

$$\varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_C = \big\{x = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{O}_C^{\mathbb{N}} \;\big|\; x_{n+1}^p = x_n \text{ per ogni } n \geq 0\big\}$$

sul quale definiamo una struttura di anello tramite le operazioni seguenti:

$$(x \cdot y)_n := x_n y_n, \qquad (x+y)_n := \lim_{m\to+\infty} \big(x_{n+m} + y_{n+m}\big)^{p^m}. \tag{2}$$

Per ogni ε come sopra vi è un'applicazione naturale

$$\pi_\varepsilon : \varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_C \longrightarrow \widetilde{\mathbb{E}}^+_\varepsilon \tag{3}$$

indotta dalla proiezione quoziente, e si può verificare che π_ε è un isomorfismo di anelli. Pertanto $\widetilde{\mathbb{E}}^+_\varepsilon$ non dipende da ε, e indicheremo tale anello $\widetilde{\mathbb{E}}^+$. Poniamo poi $\widetilde{\mathbb{E}} := \mathrm{frac}(\widetilde{\mathbb{E}}^+)$. Grazie all'isomorfismo (3) possiamo scrivere

$$\widetilde{\mathbb{E}} = \varprojlim_{x\mapsto x^p} C,$$

con somma e prodotto definite come in (2). Allora $\widetilde{\mathbb{E}}$ è un campo di char p sul quale abbiamo una valutazione data da

$$v_{\mathbb{E}}(x) := v_p(x_0).$$

Inoltre $\widetilde{\mathbb{E}}^+$ è l'anello degli interi di $\widetilde{\mathbb{E}}$. Osserviamo che G_F agisce (per continuità) su C e $\mathcal{O}_C$, e quindi G_F agisce su $\widetilde{\mathbb{E}}^+$ e $\widetilde{\mathbb{E}}$ componente per componente.

4.1.1. *I campi $\widetilde{\mathbb{E}}_K$ e $\mathbb{E}_K$.* Sia, come sopra, $0 < \varepsilon \leq 1$. Definiamo i due anelli seguenti:

$$\widetilde{\mathbb{E}}^+_K := \big\{(x_n)_{n\geq 0} \in \widetilde{\mathbb{E}}^+ \;\big|\; x_n \in \mathcal{O}_{K_\infty}/\mathfrak{A}_\varepsilon \text{ per ogni } n \geq 0\big\}$$

e

$$\mathbb{E}^+_K := \big\{(x_n)_{n\geq 0} \in \widetilde{\mathbb{E}}^+ \;\big|\; x_n \in \mathcal{O}_{K_n}/\mathfrak{A}_\varepsilon \text{ per } n \gg 0\big\}.$$

Anche in questo caso, $\widetilde{\mathbb{E}}^+_K$ e $\mathbb{E}^+_K$ non dipendono da ε. Come prima, passiamo ai campi dei quozienti e otteniamo

$$\widetilde{\mathbb{E}}_K := \mathrm{frac}(\widetilde{\mathbb{E}}^+_K), \qquad \mathbb{E}_K := \mathrm{frac}(\mathbb{E}^+_K).$$

Osservazione 4.1. Equivalentemente, con le notazioni del diagramma (1):

$$\widetilde{\mathbb{E}}^+_K := \big(\widetilde{\mathbb{E}}^+\big)^{H_K}, \qquad \widetilde{\mathbb{E}}_K = \widetilde{\mathbb{E}}^{H_K}.$$

Si noti che $\mathbb{E}^+_K$ è l'anello degli interi di $\mathbb{E}_K$.

Il risultato seguente racchiude le proprietà fondamentali degli anelli appena introdotti.

Proposizione 4.2. (1) *$\widetilde{\mathbb{E}}$ è un campo completo rispetto alla valutazione $v_{\mathbb{E}}$ con campo residuo k_F. L'azione naturale di G_F su $\widetilde{\mathbb{E}}$ è continua.*

(2) *$\mathbb{E}_F = k_F(\!(\bar\pi)\!)$ e, in generale, $\mathbb{E}_K$ è un campo completo per una valutazione discreta con campo residuo k_{K_∞}.*

(3) *Il campo $\mathbb{E} := \bigcup_{K\subset \bar F} \mathbb{E}_K$ è una chiusura separabile di $\mathbb{E}_F$ stabile per G_F, e si ha:*

$$[K : F] < \infty \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Gal}(\mathbb{E}/\mathbb{E}_K) = H_K.$$

In particolare, H_K agisce in modo continuo su $\mathbb{E}$ munito della topologia discreta.

(4) *$\widetilde{\mathbb{E}}$ (risp., $\widetilde{\mathbb{E}}_K$) è il completamento di $\mathbb{E}$ (risp., di $\mathbb{E}_K^{p^{-\infty}}$) per $v_{\mathbb{E}}$. In particolare, $\widetilde{\mathbb{E}}$ è algebricamente chiuso e $\widetilde{\mathbb{E}}_K = \widetilde{\mathbb{E}}^{H_K}$.*

4.2. **L'anello $\mathbb{A}_K$.** Vogliamo introdurre un certo anello $\mathbb{A}_K$ su cui agisce un sollevamento φ del Frobenius e tale che $\mathbb{A}_K/p\mathbb{A}_K = \mathbb{E}_K$. Per semplicità di descrizione ci limiteremo al caso in cui $K = F$ (caso "non ramificato"), accennando poi brevemente al caso generale.

4.2.1. *Caso "non ramificato" ($K = F$, caso "facile").* Consideriamo qui il caso ciclotomico ($K_\infty = K(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$, caso (a)); considerazioni analoghe possono essere compiute nel caso (b). Con le notazioni precedentemente introdotte, si ha che $\mathbb{E}_F^+ = k_F[\![\bar{\pi}]\!]$. Sia poi $[\varepsilon] \in W(\widetilde{\mathbb{E}}^+)$ il sollevamento di Teichmüller di $\varepsilon \in \widetilde{\mathbb{E}}^+$ e poniamo $\mathbb{A}_F^+ := W(k)[\![[\varepsilon]-1]\!]$. Definiamo quindi

$$\mathbb{A}_F := \mathbb{A}_F^+\left(\widehat{\frac{1}{[\varepsilon]-1}}\right) \subset \widetilde{\mathbb{A}} := W(\widetilde{\mathbb{E}}),$$

dove il simbolo $\widehat{(\dots)}$ indica il completamento p-adico. L'azione del Frobenius su $\widetilde{\mathbb{E}}$ si solleva ad un'azione su $\mathbb{A}_F$, e indicheremo φ il Frobenius che agisce su questo anello. Inoltre $\mathbb{A}_F$ ammette un'azione di Γ_F (nel caso (a) che stiamo considerando). Infine, per costruzione:

$$\mathbb{A}_F/p\mathbb{A}_F = \mathbb{E}_F.$$

4.2.2. *Caso generale ($F \subsetneq K$).* In questo caso abbiamo ramificazione iniziale. Si può allora provare che non esiste un anello $\mathbb{A}_K^+$ come sopra, ossia non esiste una "struttura intera" del tipo precedentemente descritto. È pertanto più complicato provare l'esistenza di $\mathbb{A}_K$. Per farlo si sfrutta il seguente risultato generale: esiste un'unica estensione finita étale $\mathbb{A}_F \hookrightarrow \mathbb{A}_K$ che faccia commutare il triangolo

(4)
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_F & \hookrightarrow & \mathbb{A}_K \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \widetilde{\mathbb{A}} \end{array}$$

e tale che il triangolo commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_F & \hookrightarrow & \mathbb{E}_K \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \widetilde{\mathbb{E}} \end{array}$$

si ottenga da (4) per riduzione modulo p. Su $\widetilde{\mathbb{A}}$ agiscono il Frobenius φ e il gruppo G_K, e si può provare che $\mathbb{A}_K$ è stabile per φ e Γ_K.

Notazione. D'ora in avanti poniamo $G_{\mathbb{E}_K} := \mathrm{Gal}(\mathbb{E}/\mathbb{E}_K)$, sicché $G_{\mathbb{E}_K} = H_K$ per il punto (c) della Proposizione 4.2.

4.3. **Rappresentazioni p-adiche: terminologia.** Se G è un gruppo profinito chiamiamo *rappresentazione $\mathbb{Z}_p$-adica* (risp., *rappresentazione $\mathbb{Q}_p$-adica*) *di G* uno $\mathbb{Z}_p$-modulo finitamente generato (risp., un $\mathbb{Q}_p$-spazio vettoriale di dimensione finita) su cui G agisce in modo continuo. Denotiamo queste due categorie abeliane $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G)$ e $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G)$, rispettivamente.

Sulla scia di [Fo], nel seguito lavoreremo con la categoria $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G)$. Si noti tuttavia che il funtore

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G) & \longrightarrow & \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G) \\ V & \longmapsto & V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \end{array}$$

è (essenzialmente) suriettivo; quindi i risultati ottenuti per la categoria $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G)$ possono essere facilmente reinterpretati nella categoria $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G)$.

4.4. **Il Teorema di Fontaine-Katz.** Sia $\mathbb{B}_K := \mathrm{frac}(\mathbb{A}_K)$ e sia $\mathbb{B}_K^{\mathrm{nr}}$ un'estensione algebrica non-ramificata di $\mathbb{B}_K$ il cui campo residuo è separabilmente chiuso (per esempio, si può scegliere come $\mathbb{B}_K^{\mathrm{nr}}$ il campo delle frazioni dell'henselianizzato stretto di $\mathbb{A}_K$ in una chiusura algebrica di $\mathbb{B}_K$). Identifichiamo il campo residuo di $\mathbb{B}_K^{\mathrm{nr}}$ con $\mathbb{E}_K^{\mathrm{sep}} = \mathbb{E}$. Allora si ha un'ulteriore identificazione

$$G_{\mathbb{E}_K} = \mathrm{Gal}(\mathbb{B}_K^{\mathrm{nr}}/\mathbb{B}_K),$$

e $G_{\mathbb{E}_K}$ agisce per continuità sul completamento $\widehat{\mathbb{B}^{\mathrm{nr}}_K}$. Sia infine $\mathbb{A}^{\mathrm{sep}}_K$ tale che $\mathbb{A}^{\mathrm{sep}}_K/p\mathbb{A}^{\mathrm{sep}}_K = \mathbb{E}$. Il risultato seguente, presente (almeno implicitamente) già in lavori di Katz (si veda [Ka, Section 4]), è dovuto nella formulazione che riportiamo a Fontaine.

Teorema 4.3 (Fontaine-Katz)**.** *Se $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_{\mathbb{E}_K})$ allora*

$$\mathbb{D}(V) := \left(V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{A}^{\mathrm{sep}}_K\right)^{G_{\mathbb{E}_K}} \in \Phi M^{\mathrm{\acute{e}t}}_{\mathbb{A}_K}.$$

Viceversa, se $M \in \Phi M^{\mathrm{\acute{e}t}}_{\mathbb{A}_K}$ allora

$$\mathbb{V}(M) := \left(M \otimes_{\mathbb{A}_K} \mathbb{A}^{\mathrm{sep}}_K\right)^{\varphi=1} \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_{\mathbb{E}_K}).$$

I due funtori $\mathbb{D}$ e $\mathbb{V}$ sono l'uno l'inverso dell'altro e stabiliscono un'equivalenza

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_{\mathbb{E}_K}) \cong \Phi M^{\mathrm{\acute{e}t}}_{\mathbb{A}_K}$$

di categorie abeliane.

Per la dimostrazione si rimanda a [Fo, Proposition 1.2.6].

5. Il campo delle norme

La teoria di Fontaine e Wintenberger ([FoWi], [Wi]) fornisce un isomorfismo canonico fra $G_{\mathbb{E}_K}$ e H_K (si veda Proposizione 4.2 (3)). Descriviamo brevemente tale risultato.

Con le notazioni precedenti, si ponga

$$\mathcal{N}_K := \varprojlim_n K_n$$

dove il limite proiettivo è effettuato relativamente alle applicazioni di transizione $\mathrm{Norm}_{K_{n+1}/K_n}$ date dalla norma. Dotiamo $\mathcal{N}_K$ di una struttura di anello commutativo ponendo

$$(x \cdot y)_n := x_n y_n, \qquad (x+y)_n := \lim_{m \to +\infty} \mathrm{Norm}_{K_{n+m}/K_n}(x_{n+m} + y_{n+m})$$

per ogni coppia di elementi $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{N}_K$. Una verifica diretta mostra che, con queste due operazioni, l'anello $\mathcal{N}_K$ è un campo.

Definizione 5.1. Il campo $\mathcal{N}_K$ è detto *campo delle norme* dell'estensione K_∞/K.

Un ruolo cruciale è giocato dalla seguente

Proposizione 5.2. *Con le notazioni usuali, valgono le seguenti proprietà:*

1. *il campo delle norme $\mathcal{N}_K$ è un campo locale di caratteristica p isomorfo a $\mathbb{E}_K$;*
2. *vi è un'identificazione naturale* $\mathrm{Gal}(\mathcal{N}^{\mathrm{sep}}_K/\mathcal{N}_K) \cong H_K$.

Per quanto riguarda (1), conseguenza della teoria della ramificazione, si veda [ChCo, §I]; per la dimostrazione di (2) si rimanda a [Wi, Corollaire 3.2.3].

6. Campi locali in caratteristica 0 (caso ciclotomico)

Poniamoci nel caso ciclotomico, in cui è definito il gruppo $\Gamma_K = G_K/H_K$, e torniamo al nostro obiettivo di "descrivere" le rappresentazioni p-adiche del gruppo G_K.

6.1. **Il Teorema di Fontaine.** Per il Teorema 4.3 e la Proposizione 5.2 sappiamo che vi è un'equivalenza di categorie

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(H_K) \cong \Phi M^{\text{ét}}_{\mathbb{A}_K}$$

definita come segue:

$$V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(H_K) \longmapsto \mathbb{D}(V) := \left(V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{A}_K^{\mathrm{sep}}\right)^{H_K} \in \Phi M^{\text{ét}}_{\mathbb{A}_K}.$$

Sia ora $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$. In particolare $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(H_K)$, quindi possiamo associare a V un φ-modulo étale $\mathbb{D}(V)$ su $\mathbb{A}_K$. Inoltre $\mathbb{D}(V)$ è naturalmente dotato di un'azione di Γ_K, e si verifica facilmente che

$$\mathbb{D}(V) \in \Gamma\Phi M^{\text{ét}}_{\mathbb{A}_K}.$$

In conclusione, possiamo allora enunciare il fondamentale risultato di Fontaine secondo cui le rappresentazioni $\mathbb{Z}_p$-adiche di G_K corrispondono ai (φ,Γ)-moduli étale su $\mathbb{A}_K$.

Teorema 6.1 (Fontaine)**.** *Il funtore $\mathbb{D}$ descritto sopra induce un'equivalenza*

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K) \cong \Gamma\Phi M^{\text{ét}}_{\mathbb{A}_K}$$

di categorie abeliane.

Per i dettagli della dimostrazione si veda [Fo, Théorème 3.4.3].

Riferimenti bibliografici

[Br] C. Breuil, Une application de corps de normes, *Compos. Math.* **117** (1999), 189–203.

[ChCo] F. Cherbonnier, P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), 241–268.

[Fo] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux. In *The Grothendieck Festschrift II*, 249–309.

[FoWi] J.-M. Fontaine, J.-P. Wintenberger, Le "corps de normes" de certaines extensions algébriques de corps locaux, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **288** (1979), 367–370.

[He] L. Herr, Φ-Γ-modules and Galois cohomology. In *Invitation to higher local fields*, Geometry and Topology Monographs **3**, 263–272.

[Ka] N. Katz, p-adic properties of modular schemes and modular forms. In *Modular functions III*, 69–190.

[Wi] J.-P. Wintenberger, Le corps de normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **16** (1983), 59–89.

Dipartimento di Matematica, Università di Milano, Via C. Saldini 50, 20133 Milano, Italia
E-mail address: stevigni@mat.unimi.it