SURCONVERGENCE DES REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES : LE CAS RELATIF

F. ANDREATTA & O. BRINON

Version du 4 août 2006.

Résumé. On généralise le formalisme de Tate-Sen, ce qui permet d'étendre la théorie de Sen et de prouver la surconvergence des représentations p-adiques dans le cas relatif.

Abstract. We generalize Tate-Sen's formalism; this allows to extend Sen's theory and to prove the overconvergence of p-adic representations in the relative case.

1. Introduction

Soit V un anneau de valuation discrète complet, de caractéristique 0, de corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$. On note K son corps des fractions et v la valuation normalisée par $v(p) = 1$. On fixe une clôture algébrique $\overline{K}$ de K et on note $\overline{V}$ l'anneau des entiers de $\overline{K}$. La valuation v s'étend de façon unique en une valuation de $\overline{K}$, on note encore v. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on choisit $\varepsilon^{(n)} \in \overline{K}$ une racine p^n-ième de l'unité, de sorte que $\left(\varepsilon^{(n+1)}\right)^p = \varepsilon^{(n)}$. Soit $K_\infty = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} K\left[\varepsilon^{(n)}\right]$ l'extention cyclotomique de K. C'est une extension galoisienne de K, dont le groupe de Galois s'identifie, via le caractère cyclotomique χ, à un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^\times$. Écrivons $\mathrm{Im}(\chi) \simeq \mathbf{Z}_p \times F$ où F est fini. Pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on pose $K_n = K_\infty^{p^{n+1}\mathbf{Z}_p}$, et $K_0 = K$. On note V_n le normalisé de V dans K_n (c'est l'anneau des entiers de K_n) et on pose $V_\infty = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} V_n$. Enfin, pour $\delta \in v\big(\overline{K}^\times\big)$, on note p^δ un élément de valuation δ dans V_∞.

Posons $G_K = \mathrm{Gal}\left(\overline{K}/K\right)$ et notons $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G_K)$ la catégorie des représentations p-adiques de G_K, dont les objets sont les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie, munis d'une action linéaire et continue de G_K et les morphismes les applications $\mathbf{Q}_p$-linéaires équivariantes. Dans [16], Fontaine a construit un corps $\mathcal{E}$ de valuation discrète de caractéristique 0, absolument non ramifié, de corps résiduel imparfait, muni d'un opérateur de Frobenius φ et d'une action de $\mathrm{Gal}\left(K_\infty/K\right)$ qui commutent. En utilisant la théorie du corps des normes (*cf.* [15]), il construit un isomorphisme $\mathrm{Gal}\left(\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}/\mathcal{E}\right) \simeq \mathrm{Gal}\left(\overline{K}/K_\infty\right)$ et en déduit une équivalence de catégories ([16, Théorème 3.4.3]) entre $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G_K)$ et la catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathcal{E}$, donnée par le foncteur $V \mapsto \mathrm{D}(V) = \left(\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V\right)^{\mathrm{Gal}\left(\overline{K}/K_\infty\right)}$. Un (φ,Γ)-module étale sur $\mathcal{E}$ est $\mathcal{E}$-espace vectoriel D de dimension finie muni d'un opérateur de Frobenius φ et d'une action de $\mathrm{Gal}\left(K_\infty/K\right)$ semi-linéaires et qui commutent, et qui contient un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-réseau $\mathcal{D}$ (où $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ désigne l'anneau des entiers de $\mathcal{E}$) tel que le linéarisé de Frobenius $\varphi \otimes 1\colon \mathcal{D} \otimes^{\varphi}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \to \mathcal{D}$ est un isomorphisme. Notons qu'il existe une version "entière" de ce qui précède, s'appliquant aux $\mathbf{Z}_p$-représentations de G_K, *i.e.* aux $\mathbf{Z}_p$-modules de type fini munis d'une action linéaire et continue de G_K.

Dans [7], le résultat de Fontaine est raffiné de la façon suivante. Les corps $\mathcal{E}$ et $\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}$ (notés $\mathbf{B}_K$ et $\mathbf{B}$ respectivement par Colmez, et c'est ce système de notation qui est adopté dans ce travail) admettent les sous-corps $\mathbf{B}_K^\dagger$ et $\mathbf{B}^\dagger$ respectivement, constitués des éléments dits surconvergents (car ils admettent une description en termes de fonctions analytiques sur des couronnes). Comme précédemment, ces corps permettent de construire un foncteur $V \mapsto \mathrm{D}^\dagger(V) = \left(\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V\right)^{\mathrm{Gal}\left(\overline{K}/K_\infty\right)}$ de la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G_K)$ et la catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathbf{B}_K^\dagger$. Le résutat principal de [7] est que ce foncteur est une équivalence de catégories, *i.e.* que le foncteur D se factorise par $\mathrm{D}^\dagger$ (*loc. cit.* Proposition III.5.1 et Corollaire III.5.2).

Parmi les applications principales de ce résultat, il y a les formules de réciprocité explicites, qui permettent de reconstruire les invariants $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ à partir de $\mathrm{D}^\dagger(V)$ (ce qui n'est pas possible à partir de $\mathrm{D}(V)$, parce qu'il n'y a pas de morphisme naturel de $\mathbf{B}$ dans $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ ou de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ dans $\mathbf{B}$, *cf.* [7, II]). C'est l'un des points de départ des travaux de Berger, Colmez, Fontaine et al. qui ont permis la preuve de la conjecture de monodromie p-adique (*cf.* [10]).

Décrivons maintenant le cadre dans lequel on va travailler. Soit d un entier, $T_1, \dots, T_d$ des indéterminées et $R^0 = V\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\}$ le séparé complété de $V[T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}]$ pour la topologie p-adique. On se donne un anneau $\widetilde{R}$ obtenu à partir de R^0 en itérant les opérations suivantes :

(ét) complétion p-adique d'une extension étale ;

(loc) complétion p-adique d'une localisation ;

(comp) complétion par rapport à un idéal contenant p.

On suppose en outre que $V[T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}] \to \widetilde{R}$ est à fibres géométriquement régulières ou que $\widetilde{R}$ est de dimension de Krull inférieure à 2, et que $k \to \widetilde{R} \otimes_V k$ est géométriquement intègre. Il en résulte que $T_1, \dots, T_d$ est une p-base de $\widetilde{R} \otimes_V k$. Dans ces conditions, le théorème de pureté de Faltings s'applique, cf. 3.2.

Soit E une clôture algébrique de $\operatorname{Frac}(\widetilde{R})$. On note $\overline{R}$ la réunion des sous-$\widetilde{R}$-algèbres finies S de E telles que $S[p^{-1}]$ est une extension étale de $\widetilde{R}[p^{-1}]$. On se donne une sous-$\widetilde{R}$-algèbre finie R de E telle que :

- R est normale et plate sur $\widetilde{R}$;
- $R[p^{-1}]$ est étale sur $\widetilde{R}[p^{-1}]$.

En particulier, R est séparée et complète pour la topologie p-adique, et $R \subset \overline{R}$.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on choisit $T_i^{(n)} \in \overline{R}$ une racine p^n-ième de T_i, de sorte que $\left(T_i^{(n+1)}\right)^p = T_i^{(n)}$. On pose $R'_n = R\left[T_1^{(n)}, \dots, T_d^{(n)}\right]$ et on note R_n le normalisé de $R'_n.V_n$ dans $\overline{R}$ (on a $R_n[p^{-1}] = (R'_n.V_n)[p^{-1}]$) et $R_\infty = \bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} R_n$. En particulier, on a $R_\infty \subset \overline{R}$.

On pose $\mathcal{G}_R = \operatorname{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$, $\Gamma_R = \operatorname{Gal}\left(R_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ et $\mathcal{H}_R = \operatorname{Ker}(\mathcal{G}_R \to \Gamma_R)$. L'anneau $\overline{R}$ est stable par $\mathcal{G}_R$. Le groupe Γ_R s'insert dans la suite exacte

$$1 \to \widetilde{\Gamma}_R \to \Gamma_R \to \Gamma_V \to 1$$

où $\widetilde{\Gamma}_R = \operatorname{Gal}\left(R_\infty[p^{-1}]/R.V_\infty[p^{-1}]\right)$ s'identifie à un sous-groupe d'indice fini de $\widetilde{\Gamma}_{\widetilde{R}} = \bigoplus\limits_{i=1}^{d} \mathbf{Z}_p\, \gamma_i$ où γ_i est défini par :

$$\gamma_i\left(T_j^{(n)}\right) = \begin{cases} \varepsilon^{(n)} T_i^{(n)} & \text{si } j = i \\ T_j^{(n)} & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Si $g \in \Gamma_R$, on a les relations $g\gamma_i g^{-1} = \gamma_i^{\chi(g)}$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$. On choisit γ_0 un générateur de la partie libre de $\operatorname{Gal}\left(R_\infty[p^{-1}]/R'_\infty[p^{-1}]\right)$.

Si B est une sous-$\widetilde{R}$-algèbre de $\overline{R}$, on note $\widehat{B} = \varprojlim_n B/p^n B$ son séparé complété pour la topologie p-adique. Par continuité, $\mathcal{G}_R$ agit sur $\widehat{\overline{R}}$. On prolonge la valuation p-adique sur $\overline{K}$ en une application $v \colon \overline{R}[p^{-1}] \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ en posant

$$v(x) = \max\left\{n \in \mathbf{Q}, x \in p^n \overline{R}\right\}.$$

Ce n'est pas une valuation en général (à moins que R soit local), mais vérifie les propriétés (i)-(iv) de la section suivante.

Dans [2], la théorie de (φ, Γ)-modules et l'équivalence de catégories de [16] ont été généralisées aux $\mathbf{Z}_p$-représentations de $\mathcal{G}_R$: on a des anneaux $\mathbf{A}_R \subset \mathbf{A}$ (généralisant $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}}$) et une équivalence de catégories

$$\mathbf{Rep}_{\mathbf{Z}_p}(\mathcal{G}_R) \longrightarrow \mathbf{Mod}^{\text{ét}}_{\mathbf{A}_R}(\varphi, \Gamma_R), \quad V \longmapsto (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathcal{H}_R}$$

(*cf.* théorème 4.39). L'objectif principal de ce travail est de prouver l'analogue de [7, Proposition III.5.1] à ce cadre (théorème 4.40).

Le plan de l'article est le suivant.

La preuve de la surconvergence des représentations p-adiques repose sur des techniques dues à Sen, qui ont été axiomatisées dans le cas « classique » par Colmez (formalisme de Tate-Sen [10]). L'objet de la première partie de ce travail est de généraliser ces axiomes au cas « général ». Rappelons que la méthode de Sen comporte deux étapes, une descente de $\mathcal{G}_R$ à $\mathcal{H}_R$, et une « décomplétion », qui fait intervenir des « traces normalisées de Tate généralisées » (*cf.* section 2).

Cela permet d'étendre (théorème 3.1) un résultat classique de Sen (c'était l'objet de [6] dans le cas où $R[p^{-1}]$ est un corps, à corps résiduel non nécessairement parfait) : l'application naturelle

$$\varinjlim_S \mathrm{H}^1\left(\operatorname{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathrm{GL}_n\left(S_\infty[p^{-1}]\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(\mathcal{G}_R, \mathrm{GL}_n\left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)\right)$$

déduite des inclusions $S_\infty \subset \widehat{\overline{R}}$, est bijective (la limite inductive étant prise sur les sous-R-algèbres S de $\overline{R}$ telles que $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne). Cet énoncé se reformule en termes de $\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]$-représentations (corollaire 3.13). Notons que Faltings a démontré un résultat similaire cf. remarque 3.14.

Dans la dernière partie, on rappelle les constructions et résultats de [2] qui nous sont utiles, on définit éléments surconvergents et on applique le formalisme de Tate-Sen pour prouver le théorème 4.40, qui affirme qu'on a une équivalence de catégories

$$\mathbf{Rep}_{\mathbf{Z}_p}(\mathcal{G}_R) \longrightarrow \mathbf{Mod}^{\text{ét}}_{\mathbf{A}_R^\dagger}(\varphi, \Gamma_R), \quad V \longmapsto (\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathcal{H}_R}$$

où $\mathbf{A}^\dagger$ (resp. $\mathbf{A}_R^\dagger$) désigne le sous-anneau des éléments surconvergents de $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{A}_R$).

La motivation principale de ce travail est d'étendre les formules de réciprocité au cas relatif, c'est-à-dire de relier [2] et [5] (où les anneaux $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$, B_{dR} sont construits et les notions de représentation p-adique cristalline, de de Rham sont étudiées dans la situation considérée dans cette article).

Cet article doit beaucoup a P. Colmez : sans [10] et [11], il n'aurait d'ailleurs certainement pas vu le jour. Les auteurs lui sont reconnaissants de leur avoir en outre communiqué des travaux non publiés.

Pendant l'élaboration de ce travail, le second auteur a bénéficié du soutien du Marie Curie Research Training Network dans le cadre du Réseau de Géométrie Algébrique et d'Arithmetique Européen, à l'Università degli Studi di Padova et à la Graduate School of Mathematical Sciences de Tokyo. Il remercie ces deux institutions pour leur hospitalité, ainsi que F. Baldassarri et T. Saito pour leur accueil.

2. La méthode de Sen généralisée

Ce qui suit est une généralisation de propriétés démontrées par Sen dans [23], l'axiomatisation qui en est faite étant directement inspirée par l'exposé de Colmez dans [10, 3.2 et 3.3].

Soient p un nombre premier, G un groupe profini et H un sous-groupe fermé distingué de G tel que $\Gamma = G/H$ est muni d'un homomorphisme $\chi\colon \Gamma \to \mathbf{Z}_p^\times$ d'image ouverte et de noyau isomorphe à $\mathbf{Z}_p^d$. On suppose que $\gamma g \gamma^{-1} = g^{\chi(\gamma)}$ pour tout $g \in \mathrm{Ker}(\chi)$ et tout $\gamma \in \Gamma$.

Soit $\widetilde{\Lambda}$ une $\mathbf{Z}_p$-algèbre intègre munie d'une application $v\colon \widetilde{\Lambda} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ telle que :

(i) $v(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$;
(ii) $v(xy) \geq v(x) + v(y)$;
(iii) $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$;
(iv) $v(p) > 0$ et $v(px) = v(p) + v(x)$.

L'anneau $\widetilde{\Lambda}$ est donc muni d'une topologie séparée. Supposons de plus $\widetilde{\Lambda}$ complet pour cette topologie, et muni d'une action continue de G, telle que $v(g(x)) = v(x)$ si $x \in \widetilde{\Lambda}$ et $g \in G$.

Écrivons $\mathrm{Ker}(\chi)$ comme un sous-groupe d'un groupe $\bigoplus_{i=1}^{d} \mathbf{Z}_p\, \gamma_i$, de sorte qu'il existe $m_0 \in \mathbf{N}$ tel que $p^{m_0} \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbf{Z}_p\, \gamma_i \subseteq \mathrm{Ker}(\chi)$. Par ailleurs, écrivons $\mathrm{Im}(\chi) = \mathbf{Z}_p\, \chi(\gamma_0) \oplus F$ où F est un groupe fini.

Pour $i \in \{0, \dots, d\}$, on se donne une suite croissante $\left(\Lambda_m^{(i)}\right)_{m \geq m_0}$ de sous-anneaux fermés de $\widetilde{\Lambda}^H$ stables par Γ. On suppose que $\left(\widetilde{\Lambda}, \left(\Lambda_m^{(i)}\right)_{\substack{0 \leq i \leq d \\ m \geq m_0}}\right)$ satisfait aux conditions suivantes (conditions de *Tate-Sen*) :

(TS1) Il existe $c_1 \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que quels que soient les sous-groupes ouverts distingués $H_1 \subseteq H_2$ de H, il existe $\alpha \in \widetilde{\Lambda}^{H_1}$ vérifiant $v(\alpha) > -c_1$ tel que $\sum_{\tau \in H_2/H_1} \tau(\alpha) = 1$.

(TS2) Pour tout $i \in \{0, \dots, d\}$ et tout $m \geq m_0$, il existe une suite d'applications $\tau_m^{(i)}\colon \widetilde{\Lambda}^H \to \Lambda_m^{(i)}$ vérifiant :

(a) $\tau_m^{(i)}$ est $\Lambda_m^{(i)}$-linéaire et $\tau_m^{(i)}(x) = x$ si $x \in \Lambda_m^{(i)}$;

(b) il existe $c_2 \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que pour tout $x \in \widetilde{\Lambda}^H$, on a $v\left(\tau_m^{(i)}(x)\right) \geq v(x) - c_2$ et $\lim_{m \to \infty} \tau_m^{(i)}(x) = x$;

(c) $\tau_m^{(i)}$ commute aux $\tau_{m'}^{(j)}$ et à l'action de Γ.

(TS3) Notons $X_m^{(i)} = \left(1 - \tau_m^{(i)}\right)\left(\widetilde{\Lambda}^H\right)$. Alors $1 - \gamma_i^{p^m}$ est inversible sur $X_m^{(i)}$ et il existe $c_3 \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que pour tout $x \in X_m^{(i)}$, on a $v\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)^{-1}(x)\right) \geq v(x) - c_3$. En outre, il existe $c_4 \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ et tout $x \in \Lambda_m^{(i)}$, on a $v\left(\left(\gamma_i^{p^m} - 1\right)(x)\right) \geq v(x) + c_4$.

Remarquons que la condition (iv) implique $v(1) = 0$. Soit $n \in \mathbf{N}_{>0}$. Si $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{M}_n(\widetilde{\Lambda})$, on pose $v(U) = \min_{1 \leq i,j \leq n} v(u_{i,j})$. Dans tout ce qui suit, $\widetilde{\Lambda}$ et ses sous-anneaux seront munis de la topologie définie par v. Ainsi, quand on parlera de cocycles et d'ensembles de cohomologie, il s'agira toujours (même lorsque ce n'est pas précisé) de cocycles et de cohomologie *continus*.

Lemme 2.1. ([23, Lemma 1]). *Soient H_0 un sous-groupe ouvert distingué de H, $m > c_1$ un entier (où c_1 est la constante de (TS1)) et $U\colon H_0 \to \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)$ un cocycle continu tel que pour tout $g \in H_0$, on a $v\left(U_g - 1\right) > m$. Alors il existe $B \in \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)$ vérifiant $v(B-1) > m - c_1$ tel que si $U'_g := B^{-1}U_g g(B)$, on a $v\left(U'_g - 1\right) > m+1$ pour tout $g \in H_0$.*

Démonstration. Comme $v(1) = 0$ et $v\left(U_g - 1\right) > m > c_1 > 0$, on a $v(U_g) \geq 0$ pour tout $g \in H_0$. Comme U est continu, il existe un sous-groupe ouvert distingué H_1 de H_0 tel que

$$g' \in H_1 \Rightarrow v\left(U_{g'} - 1\right) > m + c_1 + 1.$$

Soit T un ensemble de représentants de H_0/H_1. La condition (TS1) fournit un élément $\alpha \in \widetilde{\Lambda}^{H_1}$ tel que $v(\alpha) > -c_1$ et $\sum\limits_{\tau\in T} \tau(\alpha) = 1$. On considère la série de Poincaré

$$B = \sum_{\tau\in T} \tau(\alpha) U_\tau.$$

Pour $g \in H_0$, on a $g(B) = \sum\limits_{\tau\in T} g\tau(\alpha)g(U_\tau)$. Si $\tau \in T$, la condition de cocycle implique que $g\left(U_\tau\right) = U_g^{-1}U_{g\tau}$. Par ailleurs, l'élément $g\tau$ s'écrit de façon unique $\tau'g'$ avec $\tau' \in T$ et $g' \in H_1$. On a alors

$$v\left(U_{g\tau} - U_{\tau'}\right) = v\left(U_{\tau'g'} - U_{\tau'}\right) = v\left(U_{\tau'}\tau'(U_{g'}) - U_{\tau'}\right) > m + c_1 + 1,$$

car $v\left(\tau'\left(U_{g'} - 1\right)\right) = v\left(U_{g'} - 1\right) > m + c_1 + 1$ (on a $g' \in H_1$) et $v\left(U_{\tau'}\right) \geq 0$. Comme $v\left(U_g^{-1}\right) \geq 0$, on a $v\left(g(U_\tau) - U_g^{-1}U_{\tau'}\right) > m + c_1 + 1$. Par ailleurs, on a $g\tau(\alpha) = \tau'g'(\alpha) = \tau'(\alpha)$ (car $\alpha \in \widetilde{\Lambda}^{H_1}$). Comme $v(\tau'(\alpha)) = v(\alpha) > -c_1$, on a $v\left(g\tau(\alpha)g\left(U_\tau\right) - \tau'(\alpha)U_g^{-1}U_{\tau'}\right) > m+1$. Enfin, τ' décrit T quand τ décrit T, d'où $\sum\limits_{\tau\in T} \tau'(\alpha)U_g^{-1}U_{\tau'} = U_g^{-1}B$. On a donc $v\left(g(B) - U_g^{-1}B\right) > m+1$.
Par ailleurs, on a $B-1 = \sum\limits_{\tau\in T} \tau(\alpha)(U_\tau - 1)$ vu que $\sum\limits_{\tau\in T}\tau(\alpha) = 1$. Comme $v(\alpha) > -c_1$ et $v\left(U_\tau - 1\right) > m$, on a donc $v(B-1) > m - c_1 > 0$. Comme $\widetilde{\Lambda}$ est complet, la série $1 + (1-B) + (1-B)^2 + \cdots$ converge : on a $B \in \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)$. Enfin, comme $v\left(g(B) - U_g^{-1}B\right) > m+1$, $v\left(U_g\right) \geq 0$ et $v\left(B^{-1}\right) \geq 0$, on a bien $v\left(B^{-1}U_g g(B) - 1\right) > m+1$. □

Proposition 2.2. ([23, Proposition 4]). *Si $g \mapsto U_g$ est un cocycle continu $H \to \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)$, il existe un sous-groupe ouvert H_0 de H tel que la restriction de U à H_0 soit cohomologue au cocycle trivial.*

Démonstration. Comme U est continu, il existe un sous-groupe ouvert distingué H_0 de H tel que $v(U_g - 1) > c_1 + 1$ pour tout $g \in H_0$. En partant de $U_1 = U_{|H_0}$, une application répétée du lemme 2.1 fournit une suite de cocycles $\left(U_m\colon H_0 \to \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)\right)_{m\geq 1}$ et une suite $(B_m)_{m\geq 1}$ d'éléments de $\mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)$ telles que

(1) $v\left(B_m - 1\right) > m$,
(2) $U_{m+1}(g) = B_m^{-1}U_m(g)g(B_m)$,
(3) $v\left(U_m(g) - 1\right) > m + c_1$

pour tout $g \in H_0$. La condition (1) assure que le produit infini $B = \prod\limits_{m=1}^{\infty} B_m$ converge dans $\mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)$. Les conditions (2) et (3) impliquent que $B^{-1}U_g g(B) = 1$ pour tout $g \in H_0$: la restriction de U à H_0 est cohomologue au cocycle trivial. □

Corollaire 2.3. *On a* $\mathrm{H}^1\left(H, \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)\right) = \varinjlim_{\substack{H_0 \trianglelefteq H\\ \text{ouvert}}} \mathrm{H}^1\left(H/H_0, \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}^{H_0}\right)\right)$.

Démonstration. Cela résulte de la proposition 2.2 et de la suite d'inflation-restriction

$$1 \to \mathrm{H}^1\left(H/H_0, \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}^{H_0}\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(H, \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(H_0, \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)\right).$$

□

Remarque 2.4. Dans les applications, l'extension $\widetilde{\Lambda}^{H_0}/\widetilde{\Lambda}^H$ est étale, si bien que dans certaines situations favorables on peut, étant donné un cocyle $U\colon G \to \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}\right)$ et quitte à remplacer H par H_0, supposer qu'il provient par inflation-restriction d'un cocyle $U\colon \Gamma \to \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}^H\right)$. Ce qui suit a pour but montrer que l'ensemble $\mathrm{H}^1\left(\Gamma, \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}^H\right)\right)$ est isomorphe à $\mathrm{H}^1\left(\Gamma, \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_\infty\right)\right)$ où Λ_∞ est un anneau plus simple que $\widetilde{\Lambda}^H$, que nous allons maintenant définir.

Pour $j \in \{0, \dots, d\}$ et $m \geq m_0$, on pose $\Lambda_m^{(\geq j)} = \bigcap\limits_{i=j}^{d} \Lambda_m^{(i)}$. On pose $\Lambda_m = \Lambda_m^{(\geq 0)} = \bigcap\limits_{i=0}^{d} \Lambda_m^{(i)}$ et $\Lambda_\infty = \bigcup\limits_{m=m_0}^{\infty} \Lambda_m$. On a donc la situation suivante

$$\begin{tikzcd}
& \widetilde{\Lambda}^H & & \\
\Lambda_\infty \arrow[ur] & \Lambda_m^{(i)} \arrow[u] & \cdots & \Lambda_m^{(d)} \arrow[ull] \\
& & \Lambda_m^{(\geq i)} \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& \Lambda_m \arrow[uul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

L'inclusion $\Lambda_\infty \subset \widetilde{\Lambda}^H$ induit une application

$$\iota \colon \mathrm{H}^1\left(\Gamma, \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_\infty\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(\Gamma, \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}^H\right)\right).$$

Theorème 2.5. ([23, Proposition 6]). *L'application ι est bijective.*

D'après (TS2) (a), l'opérateur $\tau_m^{(i)}$ est un projecteur de $\widetilde{\Lambda}^H$ sur $\Lambda_m^{(i)}$. En particulier, on a $X_m^{(i)} = \operatorname{Ker}\left(\tau_m^{(i)}\right)$ et pour $x \in \widetilde{\Lambda}^H$, on a $x \in \Lambda_m^{(i)} \Leftrightarrow \tau_m^{(i)}(x) = x$. De plus, d'après la condition (TS2) (b), $\tau_m^{(i)} \colon \widetilde{\Lambda}^H \to \Lambda_m^{(i)}$ est continu, ainsi, $\widetilde{\Lambda}^H = X_m^{(i)} \oplus \Lambda_m^{(i)}$ est une décomposition en somme de sous-espaces fermés. Par ailleurs, comme $\tau_m^{(i)}$ commute à Γ d'après (TS2) (c), les sous-espaces $X_m^{(i)}$ et $\Lambda_m^{(i)}$ sont stables par Γ.

Pour $i \in \{0, \dots, d\}$, posons $\Lambda_\infty^{(i)} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \Lambda_m^{(i)}$.

Lemme 2.6. *Le sous-espace $\Lambda_{m'}^{(j)}$ est stable par $\tau_m^{(i)}$ pour tous $j \in \{0, \dots, d\}$ et $m' \in \mathbf{N}_{\geq m_0} \cup \{\infty\}$.*

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $m' \geq m_0$. D'après (TS2) (c), on a $\tau_{m'}^{(j)} \circ \tau_m^{(i)} = \tau_m^{(i)} \circ \tau_{m'}^{(j)}$. Si $x \in \Lambda_{m'}^{(j)}$, on a donc $\tau_{m'}^{(j)}\left(\tau_m^{(i)}(x)\right) = \tau_m^{(i)}(x)$, soit $\tau_m^{(i)}(x) \in \Lambda_{m'}^{(j)}$. □

Proposition 2.7. ([23, Proposition 3]). *Soit $W \subset \widetilde{\Lambda}^H$ un sous-$\Lambda_m^{(i)}$-module de type fini stable par $\gamma_i^{p^m}$. Alors $W \subset \Lambda_\infty^{(i)}$.*

Démonstration. Soit $w_1, \dots, w_r$ une famille génératrice de W sur $\Lambda_m^{(i)}$, et w le vecteur colonne dont les composantes sont $w_1, \dots, w_r$. Comme W est stable par $\gamma_i^{p^m}$, pour tout $m' \geq m$ il existe $M_{m'} \in \mathrm{M}_r\left(\Lambda_m^{(i)}\right)$ telle que $\gamma_i^{p^{m'}}(w) = M_{m'}w$. Par continuité de l'action de Γ, on a $\lim\limits_{m' \to \infty} M_{m'} = 1$. Il existe $m' \geq m_0$ tel que $v\left(M_{m'} - 1\right) \geq c_3 + 1$. Posons $x_{m'} = \left(1 - \tau_{m'}^{(i)}\right)(w)$. C'est un vecteur colonne à coefficients dans $X_{m'}^{(i)}$. Par ailleurs, comme $M_{m'}$ est à coefficients dans $\Lambda_m^{(i)} \subseteq \Lambda_{m'}^{(i)}$, on a $\tau_{m'}^{(i)}\left(M_{m'}\right) = M_{m'}$, et donc $\gamma_i^{p^{m'}}\left(x_{m'}\right) = M_{m'}x_{m'}$ vu que $\tau_{m'}^{(i)}$ commute à l'action de Γ (condition (TS2) (c)). En particulier, on a $x_{m'} = \left(\gamma_i^{p^{m'}} - 1\right)^{-1}\left((M_{m'} - 1)x_{m'}\right)$ (rappelons que $1 - \gamma_i^{p^{m'}}$ est inversible sur $X_{m'}^{(i)}$ d'après (TS3)). D'après la condition (TS3) encore, on a donc

$$v\left(x_{m'}\right) \geq v\left((M_{m'} - 1)x_{m'}\right) - c_3 \geq v\left(M_{m'} - 1\right) + v\left(x_{m'}\right) - c_3 \geq v\left(x_{m'}\right) + 1,$$

d'où $v\left(x_{m'}\right) = +\infty$ *i.e.* $x_{m'} = 0$, soit $\tau_{m'}^{(i)}(w) = w$: le vecteur w est à coefficients dans $\Lambda_{m'}^{(i)}$. On a donc $W \subset \Lambda_{m'}^{(i)} \subset \Lambda_\infty^{(i)}$. □

Lemme 2.8. *L'application ι est injective.*

Démonstration. Soit $U, U' \colon \Gamma \to \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_\infty\right)$ deux cocycles. Comme Γ est topologiquement engendré par un nombre fini d'éléments, il existe un entier m tel que $U_g, U'_g \in \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m\right)$ pour tout $g \in \Gamma$. Supposons que U et U' sont cohomologues dans $\mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}^H\right)$: il existe $M \in \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}^H\right)$ tel que pour tout $g \in \Gamma$, on a $M^{-1}U_g g(M) = U'_g$, soit $g(M) = U_g^{-1}MU'_g$. Pour $i \in \{0, \dots, d\}$, notons W_i le sous-$\Lambda_m^{(i)}$-module de $\widetilde{\Lambda}^H$ engendré par les coefficients de la matrice M. D'après ce qui précède, ce sous-module est stable par $\gamma_i^{p^m}$. Comme il est de type fini, la proposition 2.7 assure que $W_i \subset \Lambda_\infty^{(i)}$. La matrice M est donc à coefficients dans $\left(\Lambda_\infty^{(0)} \cap \cdots \cap \Lambda_\infty^{(d)}\right) = \Lambda_\infty$, et les cocycles U et U' sont déjà cohomologues dans $\mathrm{GL}_n\left(\Lambda_\infty\right)$. □

Lemme 2.9. ([23, Proposition 2 (b)]). *Soient $m \geq m_0$, $c \in \Lambda_m^{(i)}$ et $y \in X_m^{(i)}$ tels que $v\left(c + \left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(y)\right) \geq (c_2 + c_3)r$. Alors $v(y) \geq (c_2 + c_3)(r - 1)$.*

Démonstration. Posons $z = c + \left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(y)$. On a $v\left(\left(1-\tau_m^{(i)}\right)(z)\right) = v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(y)\right) \geq (c_2+c_3)r - c_2$ d'après la propriété (TS2)(b) (car $c \in \Lambda_m^{(i)}$ est invariant par $\tau_m^{(i)}$ et $y \in X_m^{(i)} = \operatorname{Ker}\left(\tau_m^{(i)}\right)$). La condition (TS3) appliquée à y implique alors $v(y) \geq (c_2+c_3)r - c_2 - c_3$. □

Lemme 2.10. ([23, Lemma 3]). *Pour $i \in \{0,\ldots,d\}$, l'application*

$$\mathrm{H}^1\left(\Gamma, \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_\infty^{(\geq i)}\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(\Gamma, \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_\infty^{(\geq i+1)}\right)\right)$$

(déduite de l'inclusion $\Lambda_\infty^{(\geq i)} \subset \Lambda_\infty^{(\geq i+1)}$) est surjective (où on a posé $\Lambda_\infty^{(\geq i)} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Lambda_m^{(\geq i)}$ pour $i \leq d$ et $\Lambda_\infty^{(\geq d+1)} = \widetilde{\Lambda}^H$).

Démonstration. Il s'agit de montrer que tout cocycle $U\colon \Gamma \to \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_\infty^{(\geq i+1)}\right)$ est cohomologue à un cocycle à valeurs dans $\mathrm{GL}_n\left(\Lambda_\infty^{(\geq i)}\right)$. Comme Γ est topologiquement engendré par un nombre fini d'éléments, il existe un entier $m \geq m_0$ tel que U est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m^{(\geq i+1)}\right)$ ($= \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}^H\right)$ si $i=d$).
Par continuité de U, on peut supposer (quitte à augmenter m) que $v\left(U_{\gamma_i^{p^m}} - 1\right) \geq 3(c_2+c_3)$. Soient $A_3 = U_{\gamma_i^{p^m}}$, $B_3 = R_3 = 1 \in \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m^{(\geq i)}\right)$. On va construire par récurrence des suites $(A_r)_{r\geq 3}$, $(B_r)_{r\geq 3}$ et $(R_r)_{r\geq 3}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) $A_r, B_r \in \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m^{(\geq i+1)}\right)$ et $R_r \in \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m^{(\geq i)}\right)$ pour tout $r \geq 3$,

(ii) $A_{r+1} = B_{r+1}^{-1} A_r \gamma_i^{p^m}(B_{r+1})$ pour tout $r \geq 3$,

(iii) $v(A_r - R_r) \geq (c_2+c_3)r$ et $v(B_r - 1) \geq (c_2+c_3)(r-1)$ pour tout $r \geq 3$.

Remarquons déjà que les conditions (ii) et (iii) impliquent que $v(A_{r+1} - A_r) \geq (c_2+c_3)r$. En particulier, on a $v(A_r - A_3) \geq 3(c_2+c_3)$ et *a fortiori* $v(A_r - 1) \geq 3(c_2+c_3)$.

Supposons A_r, B_r, R_r construits. Posons $R_{r+1} = \tau_m^{(i)}(A_r) \in \mathrm{M}_n\left(\Lambda_m^{(i)}\right)$. D'après le lemme 2.6, le sous-espace $\Lambda_m^{(\geq i+1)}$ est stable par $\tau_m^{(i)}$, comme $A_r \in \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m^{(\geq i+1)}\right)$, on a aussi $R_{r+1} \in \mathrm{M}_n\left(\Lambda_m^{(\geq i+1)}\right)$ et donc $R_{r+1} \in \mathrm{M}_n\left(\Lambda_m^{(\geq i)}\right)$. On a $R_{r+1} - A_r = -\left(1-\tau_m^{(i)}\right)(A_r) \in \mathrm{M}_n\left(X_m^{(i)}\right)$: d'après la propriété (TS3), il existe $S_r \in \mathrm{M}_n\left(X_m^{(i)}\right)$ tel que $R_{r+1} - A_r = \left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(S_r)$.
Par ailleurs, comme $A_r, R_r \in \mathrm{M}_n\left(\Lambda_m^{(\geq i+1)}\right)$, la matrice $R_{r+1} - A_r = \left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(S_r)$ est tuée par $\tau_m^{(j)}$ pour $j \in \{i+1,\ldots,d\}$. Par injectivité de $1-\gamma_i^{p^m}$ sur $X_m^{(i)}$ (condition (TS3)), il en est de même de S_r *i.e.* $S_r \in \mathrm{M}_n\left(\Lambda_m^{(\geq i+1)}\right)$.
On a $v(A_r - R_r) \geq (c_2+c_3)r$ donc $v\left(R_r - R_{r+1} + \left(1-\gamma_i^{p^m}\right)S_r\right) \geq (c_2+c_3)r$. D'après le lemme 2.9, on a en fait $v(S_r) \geq (c_2+c_3)(r-1)$. Posons $B_{r+1} = 1 - S_r$, on a donc $v(B_{r+1}-1) \geq (c_2+c_3)(r-1)$. Posons $N_r = A_r - 1$, on a $v(N_r) \geq 3(c_2+c_3)$ d'après ce qui précède.
La matrice B_{r+1} est inversible et $B_{r+1}^{-1} = 1 + S_r + S_r^2 + \cdots \in \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m^{(\geq i+1)}\right)$ (car $v(S_r) \geq (c_2+c_3)(r-1)$, $r \geq 3$ et $\Lambda_m^{(\geq i+1)}$ est fermé dans $\widetilde{\Lambda}^H$). Soit $A_{r+1} = B_{r+1}^{-1} A_r \gamma_i^{p^m}(B_{r+1})$, on a

$$v\left(A_{r+1} - (1+S_r)(1+N_r)\left(1-\gamma_i^{p^m}(S_r)\right)\right) \geq 2(c_2+c_3)(r-1).$$

Comme $2(c_2+c_3)(r-1) \geq (c_2+c_3)(r+1)$ (on a $r \geq 3$), $v(S_r N_r) \geq (c_2+c_3)(r+2)$ et $v\left(S_r \gamma_i^{p^m} S_r\right) \geq 2(c_2+c_3)(r-1)$, on a donc

$$v\left(A_{r+1} - 1 - N_r - \left(1-\gamma_i^{p^m}\right)S_r\right) \geq (c_2+c_3)(r+1)$$

i.e. $v(A_{r+1} - R_{r+1}) \geq (c_2+c_3)(r+1)$.

Ces suites étant construites, posons $B = B_3 B_4 \cdots$. Les inégalités $v(B_r - 1) \geq (c_2+c_3)(r-2)$ impliquent que le produit converge dans $\mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m^{(\geq i+1)}\right)$. Par ailleurs, les suites $(A_r)_{r\geq 3}$ et $(R_r)_{r\geq 3}$ sont de Cauchy donc convergent dans $\mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m^{(\geq i)}\right)$ (rappelons que $\Lambda_m^{(\geq i)}$ est fermé dans $\widetilde{\Lambda}$ qui est complet). Par construction, elles ont la même limite qu'on note R. On a alors $B^{-1} U_{\gamma_i^{p^m}} \gamma_i^{p^m}(B) = R \in \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m^{(\geq i)}\right)$: quitte à tordre le cocycle U par B, on peut supposer que $U_{\gamma_i^{p^m}} \in \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m^{(\geq i)}\right)$.

Premier cas : $i \in \{1,\ldots,d\}$. Pour $j \in \{1,\ldots,d\}$, on a $U_{\gamma_i^{p^m}} \gamma_i^{p^m}\left(U_{\gamma_j}\right) = U_{\gamma_j} \gamma_j\left(U_{\gamma_i^{p^m}}\right)$. Si $M = U_{\gamma_i^{p^m}} \in \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m^{(\geq i)}\right)$, on a donc $\gamma_i^{p^m}\left(U_{\gamma_j}\right) = M^{-1} U_{\gamma_j} \gamma_j(M)$. Soit W_j le sous-$\Lambda_m^{(i)}$-module de $\widetilde{\Lambda}^H$ engendré par les coefficients de U_{γ_j}. Il est de type fini, et stable par $\gamma_i^{p^m}$ (parce que $\Lambda_m^{(i)}$ est stable par γ_j). D'après la proposition 2.7, on a $W_j \subset \Lambda_\infty^{(i)}$: quitte à augmenter m, on peut supposer $U_{\gamma_j} \in \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m^{(i)}\right)$ et donc $U_{\gamma_j} \in \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m^{(\geq i)}\right)$ pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$. Comme les $(\gamma_j)_{1\leq j\leq d}$ sont des générateurs topologiques de $\mathrm{Ker}(\chi)$ et U est continu, on a en fait $U_h \in \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m^{(\geq i)}\right)$ pour tout $h \in \mathrm{Ker}(\chi)$.

Si $g \in \Gamma$, on a $g^{-1}\gamma_i^{p^m} g = h \in \mathrm{Ker}(\chi)$ d'où $U_{\gamma_i^{p^m}}\gamma_i^{p^m}(U_g) = U_g g(U_h)$ et donc $\gamma_i^{p^m}(U_g) = U_{\gamma_i^{p^m}}^{-1} U_g g(U_h)$. Soit W_g le sous-$\Lambda_m^{(i)}$-module de $\widetilde{\Lambda}^H$ engendré par les coefficients de U_g, il est de type fini, et stable par $\gamma_i^{p^m}$ car $U_{\gamma_i^{p^m}}, U_h \in \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m^{(i)}\right)$ et $\Lambda_m^{(i)}$ est stable par Γ. On en déduit comme précédement que $W_g \subset \Lambda_\infty^{(i)}$: quitte à augmenter m, on peut supposer $U_g \in \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m^{(i)}\right)$ et donc $U_g \in \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m^{(\geq i)}\right)$. En faisant ce qui précède pour une famille *finie* de générateurs topologiques de Γ, on se ramène à $U_g \in \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m^{(\geq i)}\right)$ pour tout $g \in \Gamma$, et on a fini.

<u>Deuxième cas</u> : $i = 0$. On a $U_{\gamma_0^{p^m}} \in \mathrm{GL}_n(\Lambda_m)$ et $U_g \in \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m^{(\geq 1)}\right)$ pour tout $g \in \Gamma$. Pour $j \in \{1, \ldots, d\}$ et $\alpha \in \mathbf{Z}_p$, posons $M_j(\alpha) = \left(1 - \tau_m^{(0)}\right)\left(U_{\gamma_j^{p^m\alpha}}\right)$, c'est une matrice à coefficients dans $X_m^{(0)}$. Par ailleurs, d'après la condition (TS2)(b), l'application $\alpha \mapsto M_j(\alpha)$ est continue. Il s'agit de montrer que quitte à augmenter m, on a $M_j(1) = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$.
Comme U est continu, on peut supposer, quitte à augmenter m, que $v\left(\left(U_{\gamma_j^{p^m\alpha}} - 1\right)\right) \geq v(p) + 2c_2$ pour tout $\alpha \in \mathbf{Z}_p$. D'après la propriété (TS2)(b), on a alors $v(M_j(\alpha)) \geq v(p) + c_2$ et $v\left(\tau_m^{(0)}\left(U_{\gamma_j^{p^m\alpha}}\right) - 1\right) \geq v(p) + c_2$.

Lemme 2.11. *Sous les conditions qui précèdent, pour $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_p$, on a*

$$v(M_j(\alpha\beta)) \geq v(M_j(\alpha)) + v_p(\beta)\min(v(p), c_4). \tag{1}$$

Démonstration. Si $\beta \in \mathbf{N}$, on a $U_{\gamma_j^{p^m\alpha\beta}} = U_{\gamma_j^{p^m\alpha}}\gamma_j^{p^m\alpha}\left(U_{\gamma_j^{p^m\alpha}}\right)\cdots\gamma_j^{p^m\alpha(\beta-1)}\left(U_{\gamma_j^{p^m\alpha}}\right)$. En écrivant $U_{\gamma_j^{p^m\alpha}} = \tau_m^{(0)}\left(U_{\gamma_j^{p^m\alpha}}\right) + M_j(\alpha)$ et en développant, $U_{\gamma_j^{p^m\alpha\beta}}$ s'écrit comme la somme de termes de trois types :

(a) $\tau_m^{(0)}\left(U_{\gamma_j^{p^m\alpha}}\right)\gamma_j^{p^m\alpha}\left(\tau_m^{(0)}\left(U_{\gamma_j^{p^m\alpha}}\right)\right)\cdots\gamma_j^{p^m\alpha(\beta-1)}\left(\tau_m^{(0)}\left(U_{\gamma_j^{p^m\alpha}}\right)\right)$;

(b) $\tau_m^{(0)}\left(U_{\gamma_j^{p^m\alpha}}\right)\gamma_j^{p^m\alpha}\left(\tau_m^{(0)}\left(U_{\gamma_j^{p^m\alpha}}\right)\right)\cdots\gamma_j^{rp^m\alpha}(M_j(\alpha))\cdots\gamma_j^{p^m\alpha(\beta-1)}\left(\tau_m^{(0)}\left(U_{\gamma_j^{p^m\alpha}}\right)\right)$ pour $r \in \{0, \ldots, \beta - 1\}$;

(c) des produits contenant au moins deux facteurs conjugués de $M_j(\alpha)$.

Le terme (a) est à coefficients dans $\Lambda_m^{(0)}$, donc d'image nulle par $1-\tau_m^{(0)}$. Les termes de type (b) sont à coefficients dans $X_m^{(0)}$ (car c'est un $\Lambda_m^{(0)}$-module) : il sont donc fixes par $1-\tau_m^{(0)}$. Par ailleurs, comme $v\left(\tau_m^{(0)}\left(U_{\gamma_j^{p^m\alpha}}\right) - 1\right) \geq v(p) + c_2$, le réel

$$v\left(\tau_m^{(0)}\left(U_{\gamma_j^{p^m\alpha}}\right)\gamma_j^{p^m\alpha}\left(\tau_m^{(0)}\left(U_{\gamma_j^{p^m\alpha}}\right)\right)\cdots\gamma_j^{rp^m\alpha}(M_j(\alpha))\cdots\gamma_j^{p^m\alpha(\beta-1)}\left(\tau_m^{(0)}\left(U_{\gamma_j^{p^m\alpha}}\right)\right) - \gamma_j^{rp^m\alpha}(M_j(\alpha))\right)$$

est $\geq v(M_j(\alpha)) + v(p) + c_2$. Les termes T de types (c) vérifient $v(T) \geq 2v(M_j(\alpha))$, donc (d'après la propriété (TS2)(b)) $v\left(\left(1 - \tau_m^{(0)}\right)(T)\right) \geq 2v(M_j(\alpha)) - c_2 \geq v(M_j(\alpha)) + v(p)$.
Dans tous les cas, on a $v\left(M_j(\alpha\beta) - \sum_{r=0}^{\beta-1}\gamma_j^{rp^m\alpha}(M_j(\alpha))\right) \geq v(M_j(\alpha)) + v(p)$. En particulier, on a toujours $v(M_j(\alpha\beta)) \geq v(M_j(\alpha))$, inégalité qui reste vraie pour $\beta \in \mathbf{Z}_p$ par continuité.
Dans le cas $\beta = p$, on a $v\left(M_j(p\alpha) - \sum_{r=0}^{p-1}\gamma_j^{rp^m\alpha}(M_j(\alpha))\right) \geq v(M_j(\alpha)) + v(p)$ et donc

$$v(M_j(p\alpha)) \geq \min\left(v(pM_j(\alpha)), v\left(\sum_{r=0}^{p-1}\left(\gamma_j^{rp^m\alpha} - 1\right)(M_j(\alpha))\right), v(M_j(\alpha)) + v(p)\right).$$

On a $v\left(\left(\gamma_j^{p^m\alpha} - 1\right)(M_j(\alpha))\right) \geq v(M_j(\alpha)) + c_4$ d'après la condition (TS3) (car $M_j(\alpha) = \left(1 - \tau_m^{(0)}\right)\left(U_{\gamma_j^{p^m\alpha}}\right)$ est à coefficients dans $\Lambda_m^{(j)}$ d'après le lemme 2.6 et le fait que c'est le cas pour $U_{\gamma_j^{p^m\alpha}}$ par hypothèse), et donc $v(M_j(p\alpha)) \geq v(M_j(\alpha)) + \min(v(p), c_4)$.
Si $\beta \in \mathbf{Z}_p\setminus\{0\}$, on a $\beta = p^{v_p(\beta)}\beta'$ avec $\beta' \in \mathbf{Z}_p^\times$. Comme $v(M_j(\alpha\beta')) \geq v(M_j(\alpha))$ d'après ce qui précède, on a bien l'inégalité (1). □

Quitte à augmenter m, on peut supposer que $v\left(U_{\gamma_j^{p^m\alpha}} - 1\right) \geq c_2 + c_3 + 1$ pour tout $j \in \{0, \ldots, d\}$ et tout $\alpha \in \mathbf{Z}_p$. Pour $j \in \{1, \ldots, d\}$, on a $\gamma_0^{p^m}\gamma_j^{p^m} = \gamma_j^{p^m\chi(\gamma_0)^{p^m}}\gamma_0^{p^m}$ et donc $U_{\gamma_0^{p^m}}\gamma_0^{p^m}\left(U_{\gamma_j^{p^m}}\right) = U_{\gamma_j^{p^m\chi(\gamma_0)^{p^m}}}\gamma_j^{p^m\chi(\gamma_0)^{p^m}}\left(U_{\gamma_0^{p^m}}\right)$.

En appliquant $1-\tau_m^{(0)}$ à l'égalité précédente, on a

$$U_{\gamma_0^{p^m}}\gamma_0^{p^m}\left(M_j(1)\right)=M_j\left(\chi(\gamma_0)^{p^m}\right)\gamma_j^{p^m\chi(\gamma_0)^{p^m}}\left(U_{\gamma_0^{p^m}}\right),$$

Comme $v\left(U_{\gamma_0^{\pm p^m}}-1\right)\geq c_2+c_3+1$ et $v\left(M_j\left(\chi(\gamma_0)^{p^m}\right)\right)\geq v\left(M_j(1)\right)$ d'après ce qui précède, on en déduit

$$v\left(\gamma_0^{p^m}\left(M_j(1)\right)-M_j\left(\chi(\gamma_0)^{p^m}\right)\right)\geq v\left(M_j(1)\right)+c_2+c_3+1. \tag{2}$$

On a $U_{\gamma_j^{p^m\chi(\gamma_0)^{p^m}}}=U_{\gamma_j^{p^m}}\gamma_j^{p^m}\left(U_{\gamma_j^{p^m(\chi(\gamma_0)^{p^m}-1)}}\right)$, donc

$$U_{\gamma_j^{p^m\chi(\gamma_0)^{p^m}}}=\left(\tau_m^{(0)}\left(U_{\gamma_j^{p^m}}\right)+M_j(1)\right)\gamma_j^{p^m}\left(\tau_m^{(0)}\left(U_{\gamma_j^{p^m(\chi(\gamma_0)^{p^m}-1)}}\right)+M_j\left(\chi(\gamma_0)^{p^m}-1\right)\right).$$

En développant et en appliquant $1-\tau_m^{(0)}$, il vient

$$\begin{aligned}M_j\left(\chi(\gamma_0)^{p^m}\right)&=M_j(1)\gamma_j^{p^m}\tau_m^{(0)}\left(U_{\gamma_j^{p^m(\chi(\gamma_0)^{p^m}-1)}}\right)+\tau_m^{(0)}\left(U_{\gamma_j^{p^m}}\right)\gamma_j^{p^m}\left(M_j\left(\chi(\gamma_0)^{p^m}-1\right)\right)\\&\quad+(1-\tau_m^{(0)})\left(M_j(1)\gamma_j^{p^m}\left(M_j\left(\chi(\gamma_0)^{p^m}-1\right)\right)\right).\end{aligned}$$

On a l'inégalité $v\left(U_{\gamma_j^{p^m}}-1\right)\geq c_2+c_3+1$, donc $v\left(\tau_m^{(0)}\left(U_{\gamma_j^{p^m}}\right)-1\right)\geq c_3+1$. De même, on a

$$v\left(\tau_m^{(0)}\left(U_{\gamma_j^{p^m(\chi(\gamma_0)^{p^m}-1)}}\right)-1\right)\geq c_3+1.$$

Par ailleurs, on a $v\left(M_j\left(\chi(\gamma_0)^{p^m}-1\right)\right)\geq v\left(M_j(1)\right)$ (lemme 2.11). On a donc

$$v\left(M_j\left(\chi(\gamma_0)^{p^m}\right)-M_j(1)-\gamma_j^{p^m}\left(M_j\left(\chi(\gamma_0)^{p^m}-1\right)\right)\right)\geq\min\left(v\left(M_j(1)\right)+c_3+1,2v\left(M_j(1)\right)\right).$$

Comme $v\left(U_{\gamma_j^{p^m}}-1\right)\geq c_2+c_3+1$, on a $v\left(M_j(1)\right)\geq c_3+1$ d'après la condition (TS2)(b). En particulier, l'inégalité précédente implique

$$v\left(M_j\left(\chi(\gamma_0)^{p^m}\right)-M_j(1)\right)\geq\min\left(v\left(M_j(1)\right)+c_3+1,v\left(M_j\left(\chi(\gamma_0)^{p^m}-1\right)\right)\right).$$

Avec l'inégalité (2), on en déduit

$$v\left(\left(\gamma_0^{p^m}-1\right)\left(M_j(1)\right)\right)\geq\min\left(v\left(M_j(1)\right)+c_3+1,v\left(M_j\left(\chi(\gamma_0)^{p^m}-1\right)\right)\right).$$

Comme $\lim\limits_{m\to\infty}\chi(\gamma_0)^{p^m}=1$, on peut supposer, quitte à augmenter m, que $v_p\left(\chi(\gamma_0)^{p^m}-1\right)\min(v(p),c_4)\geq c_3+1$, l'inégalité (1) implique alors $v\left(M_j\left(\chi(\gamma_0)^{p^m}-1\right)\right)\geq v\left(M_j(1)\right)+c_3+1$ et donc $v\left(\left(\gamma_0^{p^m}-1\right)\left(M_j(1)\right)\right)\geq v\left(M_j(1)\right)+c_3+1$. D'après la condition (TS3), on a $v\left(M_j(1)\right)\geq v\left(M_j(1)\right)+1$, d'où $M_j(1)=0$, ce qu'on voulait. Ainsi, quitte à augmenter m, on peut supposer que $U_g\in\mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m^{(0)}\right)$ et donc $U_g\in\mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m\right)$ pour tout $g\in p^m\,\mathrm{Ker}(\chi)$.

Soit $g\in\mathrm{Ker}(\chi)$. On a $\gamma_0^{p^{m'}}g=g^{\chi(\gamma_0)^{p^{m'}}}\gamma_0^{p^{m'}}$ et donc $U_{\gamma_0^{p^{m'}}}\gamma_0^{p^{m'}}\left(U_g\right)=U_g g\left(U_{g^{\chi(\gamma_0)^{p^{m'}}-1}}\right)g^{\chi(\gamma_0)^{p^{m'}}}\left(U_{\gamma_0^{p^{m'}}}\right)$. Comme $\lim\limits_{m'\to\infty}\chi(\gamma_0)^{p^{m'}}-1=0$, on a $g^{\chi(\gamma_0)^{p^{m'}}-1}\in p^m\,\mathrm{Ker}(\chi)$ et donc $U_{g^{\chi(\gamma_0)^{p^{m'}}-1}}\in\mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m\right)$ pour $m'\geq m$ assez grand : quitte à remplacer m par m', on peut supposer $U_{g^{\chi(\gamma_0)^{p^m}-1}}\in\mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m\right)$. Les matrices $U_{\gamma_0^{p^m}}^{-1}$ et $g\left(U_{g^{\chi(\gamma_0)^{p^m}-1}}\right)g^{\chi(\gamma_0)^{p^m}}\left(U_{\gamma_0^{p^m}}\right)$ sont alors à coefficients dans Λ_m (rappelons que ce dernier est stable par Γ par hypothèse). Si W_g désigne le sous $\Lambda_m^{(0)}$-module de $\widetilde{\Lambda}^H$ engendré par les coefficients de U_g, alors W_g est de type fini et stable par $\gamma_0^{p^m}$: d'après la proposition 2.7, on a $W_g\subset\Lambda_\infty^{(0)}$. Quitte à augmenter m, on peut donc supposer $U_g\in\mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m\right)$. En faisant ce qui précède pour $g=\gamma_1,\ldots,\gamma_d$, on trouve $m\in\mathbf{N}$ tel que $U_g\in\mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m\right)$ pour tout $g\in\mathrm{Ker}(\chi)$.

Soit $g\in\Gamma$. Comme $\mathrm{Im}(\chi)$ est commutatif, il existe $h\in\mathrm{Ker}(\chi)$ tel que $\gamma_0^{p^m}g\gamma_0^{-p^m}=gh$. On a alors $U_{\gamma_0^{p^m}}\gamma_0^{p^m}\left(U_g\right)=U_g g\left(U_{h\gamma_0^{p^m}}\right)$. D'après ce qui précède, les matrices $U_{\gamma_0^{p^m}}$ et $U_{h\gamma_0^{p^m}}$ sont à coefficients dans Λ_m. On en déduit comme précédemment que U_g est en fait à coefficients dans $\Lambda_\infty^{(0)}$ et donc que quitte à augmenter m, on peut supposer $U_g\in\mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m\right)$. En faisant ce qui précède pour une famille *finie* de générateurs topologiques de Γ, on se ramène à $U_g\in\mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m\right)$ pour tout $g\in\Gamma$, et on a fini. $\square$

Démonstration. (du théorème 2.5). L'injectivité de ι est l'objet du lemme 2.8. Sa surjectivité résulte de l'application du lemme 2.10 à $i = d, d-1, \dots, 0$, qui implique que chaque flèche dans le composé

$$\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathrm{GL}_n(\Lambda_\infty)) \to \cdots \to \mathrm{H}^1\left(\Gamma, \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_\infty^{(\geq i)}\right)\right) \to \cdots \to \mathrm{H}^1\left(\Gamma, \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\Lambda}^H\right)\right)$$

est surjective. □

3. La théorie de Sen pour $R[p^{-1}]$

On applique les techniques de la section 2 pour prouver le résultat suivant.

Theorème 3.1. *Pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, l'application*

$$\varinjlim_{S_\infty} \mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathrm{GL}_n\left(S_\infty[p^{-1}]\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(\mathcal{G}_R, \mathrm{GL}_n\left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)\right)$$

déduite des l'inclusions $S_\infty \subset \widehat{\overline{R}}$ est bijective (la limite inductive étant prise sur les sous-R_∞-algèbres S_∞ de $\overline{R}$ telles que $S_\infty[p^{-1}]$ est finie étale comme $R_\infty[p^{-1}]$–algèbre et est galoisienne sur $R[p^{-1}]$).

Modulo la remarque 2.4, il suffit de montrer que les conditions de Tate-Sen sont remplies pour $\widetilde{\Lambda} = \widehat{\overline{R}}[p^{-1}]$ muni de l'application v, $G = \mathcal{G}_R$, $H = \mathcal{H}_R$, ainsi que l'égalité $\Lambda_\infty[p^{-1}] = R_\infty[p^{-1}]$. Remarquons que $\Gamma = \Gamma_R$ satisfait les hypothèses de la section 2.

Soit $N \in \mathbf{N}$ et S_N une R_N-algèbre finie et normale telle que $R_N[p^{-1}] \subset S_N[p^{-1}]$ est étale. Pour chaque $n \geq N$, on note S_n le normalisé de $S_N \otimes_{\widetilde{R}_N} \widetilde{R}_n$ et $S_\infty = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} S_n$. Soit M_n (resp. L_n) l'anneau total des fractions de S_n (resp. de $\widetilde{R}_n$). On dispose de la trace $\mathrm{Tr}_{M_n/L_n} \colon M_n \to L_n$. Comme $\widetilde{R}_n$ est normal et S_n entier sur $\widetilde{R}_n$, l'application Tr_{M_n/L_n} envoie S_n dans $\widetilde{R}_n$. Comme $\widetilde{R}_N[p^{-1}] \subseteq S_N[p^{-1}]$ est étale, il existe un unique idempotent $\mathfrak{e}_{S_n/\widetilde{R}_n} = \mathfrak{e}_n \in \left(S_n \otimes_{\widetilde{R}_n} S_n\right)[p^{-1}]$ caractérisé par $m_n(x) = \left(\mathrm{Tr}_{M_n/L_n} \otimes \mathrm{Id}\right)(\mathfrak{e}_n.x)$ pour tout $x \in \left(S_n \otimes_{\widetilde{R}_n} S_n\right)[p^{-1}]$, où $m_n \colon M_n \otimes_{L_n} M_n \to M_n$ est la multiplication.

Dans [2], le théorème de pureté de Faltings ([12, Theorem 3.1], [13, Theorem 4]) est raffiné de la façon suivante :

Theorème 3.2. (Refined almost étalness, [2, Theorems 5.1 & 5.11]). *Il existe un entier ℓ (qui ne dépend que de S) tel que $p^{\ell p^{-n}} \mathfrak{e}_n \in S_n \otimes_{\widetilde{R}_n} S_n$.*

Corollaire 3.3. *Soient $N \in \mathbf{N}$ et $S_N \subseteq S'_N$ deux $\widetilde{R}_N$-algèbres finies normales telles que $\widetilde{R}_N[p^{-1}] \subseteq S_N[p^{-1}] \subseteq S'_N[p^{-1}]$ soient étales. Avec les notations qui précèdent, il existe un entier δ (qui ne dépend que de S_N et S'_N) tel que $S_n/\mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(S'_n)$ est tué par $p^{\delta p^{-n}}$ pour chaque $n \geq N$.*

Démonstration. Soit S''_N le normalisé de S'_N dans une clôture galoisienne de $S'_N[p^{-1}]$. Comme pour $n \geq N$ on a (avec des notations évidentes), $\mathrm{Tr}_{M''_n/M_n}(S''_n) \subseteq \mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(S'_n)$ on a une surjection $S_n/\mathrm{Tr}_{M''_n/M_n}(S''_n) \twoheadrightarrow S_n/\mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(S'_n)$ et quitte à remplaçer S'_N par S''_N, on peut supposer que $S'_N[p^{-1}]/\widetilde{R}[p^{-1}]$ est galoisienne.

D'après le théorème 3.2, on a $p^{\ell p^{-n}} \mathfrak{e}_{S'_N/\widetilde{R},n} \in S'_n \otimes_{\widetilde{R}_n} S'_n$ où ℓ est un entier indépendant de $n \geq N$. Par ailleurs, l'idempotent $\mathfrak{e}_n = \mathfrak{e}_{S'_N/S_N,n} \in \left(S'_n \otimes_{S_n} S'_n\right)[p^{-1}]$ est l'image de $\mathfrak{e}_{S'_N/\widetilde{R},n}$ par l'homomorphisme surjectif $\left(S'_n \otimes_{\widetilde{R}_n} S'_n\right)[p^{-1}] \twoheadrightarrow \left(S'_n \otimes_{S_n} S'_n\right)[p^{-1}]$. En effet, ces idempotents correspondent au facteur associé à l'identité de $\mathrm{Gal}\left(S'_n[p^{-1}]/S_n[p^{-1}]\right)$ et de $\mathrm{Gal}\left(S'_n[p^{-1}]/\widetilde{R}_n[p^{-1}]\right)$ respectivement et l'homomorphisme n'est autre que la projection associée à l'inclusion $\mathrm{Gal}\left(S'_n[p^{-1}]/S_n[p^{-1}]\right) \subseteq \mathrm{Gal}\left(S'_n[p^{-1}]/\widetilde{R}_n[p^{-1}]\right)$. On a donc aussi $p^{\ell p^{-n}} \mathfrak{e}_n \in S'_n \otimes_{S_n} S'_n$.

Écrivons $p^{\ell p^{-n}} \mathfrak{e}_n = \sum_{i=1}^r \lambda_i \otimes \mu_i$ avec $\lambda_i, \mu_i \in S'_n$. On a alors $p^{\ell p^{-n}} = m_n\left(p^{\ell p^{-n}} \otimes 1\right) = \sum_{i=1}^r \mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(\lambda_i)\mu_i$. En prenant la norme de cette égalité on voit que $p^{\ell p^{-n}[M'_n:M_n]}$ est la somme des $\prod_{i=1}^r \prod_{g \in G_i} g\left(\mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(\lambda_i)\mu_i\right)$, indexée par les partitions $G_1 \coprod \cdots \coprod G_r = \mathrm{Gal}\left(S'_n[p^{-1}]/S_n[p^{-1}]\right)$. En regroupant les termes pour lesquels on a $\mathrm{Card}(G_i) = n_i$ avec $\underline{n} = (n_1, ..., n_r) \in \mathbf{N}^r$ fixé, $p^{\ell p^{-n}[M'_n:M_n]}$ peut s'écrire comme une somme d'éléments de la forme $a_{\underline{n}} \prod_{i=1}^r \mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(\lambda_i)^{n_i}$ où $a_{\underline{n}} \in S'_n$ est invariant sous $\mathrm{Gal}\left(S'_n[p^{-1}]/S_n[p^{-1}]\right)$, donc dans S_n vu que ce dernier est normal. On a donc $p^{\ell p^{-n}[M'_n:M_n]} \in \mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(S'_n)$. La suite $([M'_n : M_n])_{n \geq N}$ étant bornée, il suffit de prendre $\delta = \ell \max_{n \geq N}\left([M'_n : M_n]\right)$. □

Soit S_∞ une R_∞-algèbre normale telle que $R_\infty[p^{-1}] \subset S_\infty[p^{-1}]$ est finie et étale. Alors, il existe $N \in \mathbf{N}$ et une R_N-algèbre finie et normale telle que $R_N[p^{-1}] \subset S_N[p^{-1}]$ est étale et S_∞ est la normalisation de $S_N \otimes_{\widetilde{R}_N} \widetilde{R}_\infty$.

Proposition 3.4. *La propriété (TS1) est vérifiée.*

Démonstration. Il s'agit de voir qu'il existe un entier c_1 tel que pour tous $H_1 \subseteq H_2$ sous-groupes ouverts distingués de $\mathcal{H}_R$, il existe $\alpha \in \left(p^{-c_1}\widehat{\overline{R}}\right)^{H_1}$ tel que $\sum\limits_{\tau \in H_2/H_1} \tau(\alpha) = 1$. Montrons que $c_1 = 1$ convient.

Les sous-groupes H_1 et H_2 correspondent à des facteurs d'extensions finies étales (galoisiennes) $S'_\infty[p^{-1}]$ et $S_\infty[p^{-1}]$ de $\widetilde{R}_\infty[p^{-1}]$. Pour $N \in \mathbf{N}$ assez grand ils proviennent d'extensions $\widetilde{R}_N \subseteq S_N \subseteq S'_N$ finies normales telles que $\widetilde{R}_N[p^{-1}] \subseteq S_N[p^{-1}] \subseteq S'_N[p^{-1}]$ sont étales. D'après le corollaire 3.3, il existe un entier δ indépendant de n tel que $p^{-\delta p^{-n}} \in \mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(S'_n/S_n)$ pour $n \geq N$: pour n assez grand, on a donc $p \in \mathrm{Tr}_{M'_n/M_n}(S'_n/S_n)$ et il existe $x \in S'_\infty \subset \widehat{\overline{R}}^{H_1}$ tel que $\sum\limits_{\tau \in H_2/H_1} \tau(x) = p$. On peut prendre $\alpha = \frac{x}{p}$. □

Remarque 3.5. En fait, n'importe quel $c_1 > 0$ convient.

Proposition 3.6. *On a* $\varinjlim_{S_\infty} \mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]\right), \mathrm{GL}_n\left(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\right)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1\left(\mathcal{H}_R, \mathrm{GL}_n\left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)\right)$, *où la limite projective est prise sur les sous-R_∞-algèbres S_∞ de $\overline{R}$ telles que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne.*

Démonstration. D'après la proposition 3.4 et le corollaire 2.3, on a

$$\varinjlim_{\substack{H_0 \trianglelefteq \mathcal{H}_R \\ \text{ouvert}}} \mathrm{H}^1\left(\mathcal{H}_R/H_0, \mathrm{GL}_n\left(\widehat{\overline{R}}^{H_0}[p^{-1}]\right)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1\left(\mathcal{G}_R, \mathrm{GL}_n\left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)\right).$$

Si H_0 est un sous-groupe ouvert distingué de $\mathcal{H}_R$, notons S_∞ le normalisé de R_∞ dans $\left(\overline{R}[p^{-1}]\right)^{H_0}$. L'extension $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est donc finie étale galoisienne. On a $\left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)^{H_0} = \widehat{S}_\infty[p^{-1}]$ (*cf.* [12, I.4 (c)]). □

Passons à la propriété (TS2).

Rappelons tout d'abord que $\widetilde{\Lambda}^H = \left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)^{\mathcal{H}_R} = \widehat{R}_\infty[p^{-1}]$ (*cf.* [12, I.4 (c)]).

Commençons par construire les anneaux $\Lambda_m^{(i)}$ et les applications $\tau_m^{(i)}$. Fixons $m_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $m \geq m_0$, $R_{m+1}[p^{-1}]$ est un $R_m[p^{-1}]$-module libre de rang p^{d+1} (il suffit de choisir m_0 assez grand tel que $p^{m_0} \bigoplus\limits_{i=1}^{d} \mathbf{Z}_p\, \gamma_i \subseteq \widetilde{\Gamma}_R$).

Pour $i \in \{1, \ldots, d\}$ et $n \in \mathbf{N}$, on pose $R_n'^{(i)} = R\big[T_1^{(n)}, \ldots, T_{i-1}^{(n)}, T_{i+1}^{(n)}, \ldots, T_d^{(n)}\big].V_n$ et $R_\infty'^{(i)} = \bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} R_n'^{(i)}$. On rappelle que $R'_\infty = \cup_n R'_n$ avec $R'_n = R\left[T_1^{(n)}, \ldots, T_d^{(n)}\right]$. Pour $i \in \{0, \ldots, d\}$ et $m \in \mathbf{N}$, on pose alors

$$\Lambda_m^{(i)} = \begin{cases} \left(\widehat{R'_\infty.V_m}\right)[p^{-1}] & \text{si } i = 0, \\ \left(\widehat{R_\infty'^{(i)}.R_m}\right)[p^{-1}] & \text{si } i \in \{1, \ldots, d\} \end{cases}$$

(rappelons que les chapeaux désignent la complétion pour la topologie p-adique). On a bien sûr $\Lambda_m^{(i)} \subset \widehat{R}_\infty[p^{-1}]$ pour tout $i \in \{0, \ldots, d\}$ et $m \in \mathbf{N}$. Comme R'_∞ et V_m (resp. $R_\infty'^{(i)}$ et R_m avec $i \in \{1, \ldots, d\}$) sont invariants sous $\gamma_0^{p^m}$ (resp. $\gamma_i^{p^m}$), il en est de même de $\Lambda_m^{(0)}$ (resp. de $\Lambda_m^{(i)}$) par continuité.

Pour $n \geq m \geq m_0$, et $x \in R_n[p^{-1}]$, on pose

$$\tau_m^{(i)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p^{n-m}} \mathrm{Tr}_{R_n/R'_n.V_m}(x) & \text{si } i = 0, \\ \dfrac{1}{p^{n-m}} \mathrm{Tr}_{R_n/R_n'^{(i)}.R_m}(x) & \text{si } i \in \{1, \ldots, d\} \end{cases}$$

(c'est bien défini par normalité de $(R'_n.V_m)[p^{-1}]$ et $\left(R_n'^{(i)}.R_m\right)[p^{-1}]$ pour $i \in \{1, \ldots, d\}$). La normalisation fait que $\tau_m^{(i)}(x)$ ne dépend pas de l'entier n assez grand tel que $x \in R_n[p^{-1}]$. Ce qui précède définit donc des applications $\tau_m^{(0)} \colon R_\infty[p^{-1}] \to (R'_\infty.V_m)[p^{-1}]$ et $\tau_m^{(i)} \colon R_\infty[p^{-1}] \to \left(R_\infty'^{(i)}.R_m\right)[p^{-1}]$ pour $i \in \{1, \ldots, d\}$ et $m \geq m_0$.

Lemme 3.7. *Il existe une constante $a \in \mathbf{N}$ telle que pour tout $m \in \mathbf{N}$, $i \in \{0, \ldots, d\}$ et $x \in R_{m+1}[p^{-1}]$, on a* $v\left(\left(\gamma_i^{p^m} - 1\right)(x)\right) \geq v(x) + \frac{1}{p-1}(1 - ap^{-m})$.

Démonstration. Pour $i = 0$, cela résulte du fait que l'extension cyclotomique K_∞/K est potentiellement régulière (*cf.* [19, 1.5 Proposition 1.11]) : la suite $(i_m)_{m \in \mathbf{N}}$ des nombres de ramification vérifie $i_m - i_{m-1} \equiv p^m e_K$ pour $r \gg 0$ (où e_K désigne l'indice de ramification absolu de K). Il existe donc une constante $a_0 \in \mathbf{N}$ telle que

$$i_m \geq \frac{e_K}{p-1}(p^m - a_0)$$

et donc $v\left(\left(\gamma_i^{p^m}-1\right)(x)\right) \geq v(x)+\frac{1}{p-1}\left(1-a_0p^{-m}\right)$ pour tout $x \in V_{m+1}$ (car la valuation normalisée de K_m est $p^m e_K v$), et *a fortiori* pour $x \in R_{m+1}[p^{-1}]$.

Soit $i \in \{1,\dots,d\}$. Quitte à augmenter a, il suffit de le montrer pour m assez grand. On peut donc supposer que $R'^{(i)}_{m+1}.R_m = R'^{(i)}_{m+1} \otimes_{R'^{(i)}_m} R_m$. D'après [2, Corollary 3.10], on a

$$p^{\frac{c(R)}{p^m}} R_{m+1} \subseteq \bigoplus_{r=0}^{p-1} R'^{(i)}_{m+1} \otimes_{R'^{(i)}_m} R_m \left(T_i^{(m+1)}\right)^r \subseteq R_{m+1}$$

où $c(R)$ est une constante qui ne dépend que de R. Si $x \in R_{m+1}[p^{-1}]$, on peut donc écrire $x=\sum_{r=0}^{p-1} x_r \left(T_i^{(m+1)}\right)^r$ avec $x_r \in \left(R'^{(i)}_{m+1} \otimes_{R'^{(i)}_m} R_m\right)[p^{-1}]$ et $v(x_r) \geq v(x)-\frac{c(R)}{p^m}$ pour $0 \leq r < p$. On a alors

$$\left(\gamma_i^{p^m}-1\right)(x)=\sum_{r=1}^{p-1} x_r \left(\left(\varepsilon^{(m+1)}\right)^{rp^m}-1\right)\left(T_i^{(m+1)}\right)^r.$$

Comme $\left(\varepsilon^{(m+1)}\right)^{rp^m}-1=\left(\varepsilon^{(1)}\right)^r-1 \in \left(\varepsilon^{(1)}-1\right)V_1=p^{\frac{1}{p-1}}V_1$, on a $v\left(\left(\gamma_i^{p^m}-1\right)(x)\right) \geq v(x)+\frac{1}{p-1}-\frac{c(R)}{p^m}$ et *a fortiori* $v\left(\left(\gamma_i^{p^m}-1\right)(x)\right) \geq v(x)+\frac{1}{p-1}(1-ap^{-m})$, où $a=a_0+(p-1)c(R)$. □

Lemme 3.8. *Pour tout $m \geq m_0$, $i \in \{0,\dots,d\}$ et $x \in R_{m+1}[p^{-1}]$, on a $v\left(\tau_m^{(i)}(x)\right) \geq v(x)-ap^{-m}$ (où a est la constante du lemme 3.7).*

Démonstration. On a $1+X+X^2+\dots+X^{p-1}=(1-X)^{p-1}+pA(X)$ avec $A(X) \in \mathbf{Z}[X]$ et $A(1)=1$. Comme $p\tau_m^{(i)}(x)=\left(1+\gamma_i^{p^m}+\gamma_i^{2p^m}+\dots+\gamma_i^{(p-1)p^m}\right)(x)$, on a $p\tau_m^{(i)}(x)=\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)^{p-1}(x)+pA\left(\gamma_i^{p^m}\right)(x)$. En appliquant le lemme 3.7 successivement à x, $\left(\gamma_i^{p^m}-1\right)(x)$,..., $\left(\gamma_i^{p^m}-1\right)^{p-2}(x)$, on a $v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)^{p-1}(x)\right) \geq v(x)+1-ap^{-m}$. Comme par ailleurs $v\left(pA\left(\gamma_i^{p^m}\right)(x)\right) \geq v(x)+1$, on a $v\left(p\tau_m^{(i)}(x)\right) \geq v(x)+1-ap^{-m}$ *i.e.* $v\left(\tau_m^{(i)}(x)\right) \geq v(x)-ap^{-m}$. □

Soient $i \in \{0,\dots,d\}$, $m \geq m_0$ et $x \in R_\infty[p^{-1}]$. Pour $n \in \mathbf{N}$ tels que $x \in R_n[p^{-1}]$ et $n \geq m$, on a $\tau_m^{(i)}(x)=\left(\tau_m^{(i)} \circ \tau_{m+1}^{(i)} \circ \dots \circ \tau_{n-1}^{(i)}\right)(x)$ et donc $v\left(\tau_m^{(i)}(x)\right) \geq v(x)-\frac{ap^{-m+1}}{p-1}$ par une application répétée du lemme 3.8. En particulier, l'application $\tau_m^{(i)}$ est continue (pour la topologie p-adique). On la prolonge par continuité à $\widehat{R}_\infty[p^{-1}]$, et on note encore $\tau_m^{(i)}$ le prolongement. Pour $i=0$ (resp. $i \in \{1,\dots,d\}$), l'image de $\tau_m^{(i)}$ est incluse dans l'adhérence de $\left(R'_\infty.V_m\right)[p^{-1}]$ (resp. $\left(R'^{(i)}_\infty.R_m\right)[p^{-1}]$), c'est-à-dire dans $\Lambda_m^{(i)}$. On dispose donc d'applications

$$\tau_m^{(i)}\colon \widehat{R}_\infty[p^{-1}] \to \Lambda_m^{(i)}$$

pour $i \in \{0,\dots,d\}$ et $m \geq m_0$.

Proposition 3.9. *La propriété (TS2) est vérifiée.*

Démonstration.
(a) L'application $\tau_m^{(0)}\colon R_\infty[p^{-1}] \to \left(R'_\infty.V_m\right)[p^{-1}]$ (resp. $\tau_m^{(i)}\colon R_\infty[p^{-1}] \to \left(R'^{(i)}_\infty.R_m\right)[p^{-1}]$ pour $i \in \{1,\dots,d\}$) est $\left(R'_\infty.V_m\right)[p^{-1}]$-linéaire (resp. $\left(R'^{(i)}_\infty.R_m\right)[p^{-1}]$-linéaire) par linéarité de l'application trace. Par continuité, l'application $\tau_m^{(i)}$ est $\Lambda_m^{(i)}$-linéaire pour tout $i \in \{0,\dots,d\}$ et $m \geq m_0$. Par ailleurs, comme $\tau_m^{(i)}(1)=1$, on a $\tau_m^{(i)}(x)=x$ pour tout $x \in \Lambda_m^{(i)}$.
(b) La première moitié de la condition (TS2) (b) est vérifiée avec $c_2=\frac{pa}{p-1}$ d'après ce qui suit le lemme 3.8. Si $x \in R_\infty$, on a $x \in R_m$ et donc $\tau_m^{(i)}(x)=x$ pour m assez grand. Par continuité, on a donc $\lim_{m\to\infty} \tau_m^{(i)}(x)=x$ pour tout $x \in \widehat{R}_\infty[p^{-1}]$.
(c) L'application $\tau_m^{(i)}$ étant définie comme une trace normalisée, elle commute à Γ_R. En particulier, les $\tau_m^{(i)}$ commutent entre eux.

□

Proposition 3.10. *La propriété (TS3) est vérifiée.*

Démonstration. Notons $X_m^{(i)}=\left(1-\tau_m^{(i)}\right)\left(\widehat{R}_\infty[p^{-1}]\right)$. Commençons par montrer que l'application $1-\gamma_i^{p^m}$ est bijective sur $X_m^{(i)}$. Par densité de $R_\infty[p^{-1}]$ dans $\widehat{R}_\infty[p^{-1}]$ et continuité de $1-\tau_m^{(i)}$, le sous-espace $\left(1-\tau_m^{(i)}\right)\left(R_\infty[p^{-1}]\right)$ est dense dans $X_m^{(i)}$: il suffit de vérifier que $1-\gamma_i^{p^m}$ induit une bijection sur $\left(1-\tau_m^{(i)}\right)\left(R_\infty[p^{-1}]\right)$. Il suffit donc de montrer que pour $n \geq m$, l'application $1-\gamma_i^{p^m}$ est bijective sur $\left(1-\tau_m^{(i)}\right)\left(R_n[p^{-1}]\right)$ qui n'est autre que le noyau de la trace $\mathrm{Tr}_{R_n/R'_n.V_m}$ si $i=0$ et $\mathrm{Tr}_{R_n/R'^{(i)}_n.R'_m}$ si $i \in \{1,\dots,d\}$.

Tout d'abord, l'application est injective parce que $\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(x)=0 \Rightarrow x \in \begin{cases} R'_n.V_m & \text{si } i=0 \\ R'^{(i)}_n.R_m & \text{si } i\in\{1,\dots,d\}\end{cases}$ et donc $x=\left(1-\tau_m^{(i)}\right)(x)=0$ (car $1-\tau_m^{(i)}$ est le projecteur de $R_n[p^{-1}]$ orthogonal à $\tau_m^{(i)}$).

<u>Cas $i=0$</u> : le sous-module $\left(1-\tau_m^{(0)}\right)\left(R_n[p^{-1}]\right)$ est déduit par extension des scalaires du sous-module des éléments de trace nulle pour l'extension $V_n[p^{-1}]/V_m[p^{-1}]$ (en effet, R et V_n sont linéairement disjoints sur V_m car $m \geq m_0$). Il est donc libre sur $(R'_n.V_m)[p^{-1}]$ et admet une base dans laquelle la matrice de $1-\gamma_0^{p^m}$ est à coefficients dans $V_m[p^{-1}]$. Comme cette matrice est celle d'une application injective et est à coefficients dans le corps $V_m[p^{-1}]$, elle est inversible d'inverse à coefficients dans $V_m[p^{-1}] \subseteq (R'_n.V_m)[p^{-1}]$: l'application $1-\gamma_0^{p^m}$ est donc bijective sur $\left(1-\tau_m^{(0)}\right)\left(R_n[p^{-1}]\right)$.

<u>Cas $i\in\{1,\dots,d\}$</u> : la famille $\left(\left(T_i^{(n)}\right)^r\right)_{0\leq r<p^{n-m}}$ est une base de $R_n[p^{-1}]$ sur $\left(R'^{(i)}_n.R_m\right)[p^{-1}]$ (là encore, cela découle du fait que $R'^{(i)}_n$ et R_m sont linéairement disjoints sur $R'^{(i)}_m$, vu que $m\geq m_0$). Le polynôme minimal de $\left(T_i^{(n)}\right)^r$ sur $\left(R'^{(i)}_n.R_m\right)[p^{-1}]$ étant $X^{p^{n-m-v(r)}}-\left(T_i^{(m)}\right)^{r/p^{v(r)}}$, on a

$$\tau_m^{(i)}\left(\left(T_i^{(n)}\right)^r\right)=\begin{cases}1 & \text{si } r=0,\\ 0 & \text{si } 0<r<p^{n-m}.\end{cases}$$

Le sous-module $\left(1-\tau_m^{(i)}\right)(R_n)[p^{-1}]$ est donc libre sur $\left(R'^{(i)}_n.R_m\right)[p^{-1}]$ et admet $\left(\left(T_i^{(n)}\right)^r\right)_{0<r<p^{n-m}}$ comme base. Comme $\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)\left(\left(T_i^{(n)}\right)^r\right)=\left(1-\left(\varepsilon^{(n)}\right)^{rp^m}\right)\left(T_i^{(n)}\right)^r=\left(1-\left(\varepsilon^{(n-m)}\right)^r\right)\left(T_i^{(n)}\right)^r$, la matrice de l'application $1-\gamma_i^{p^m}$ dans cette base est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les éléments $1-\left(\varepsilon^{(n-m)}\right)^r$ pour $0<r<p^{n-m}$. Comme ils sont tous non nuls, ils sont inversibles dans $V_{n-m}[p^{-1}] \subseteq \left(R'^{(i)}_n.R_m\right)[p^{-1}]$: l'application $1-\gamma_i^{p^m}$ est donc bijective sur $\left(1-\tau_m^{(i)}\right)(R_n)[p^{-1}]$.

Montrons maintenant qu'il existe une constante $c_3\in\mathbf{R}_{>0}$ telle que pour tout $i\in\{0,\dots,d\}$, $m\geq m_0$ et $x\in X_m^{(i)}$, on a $v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(x)\right)\leq v(x)+c_3$.

D'après la condition (TS2) (b) (proposition 3.9), le sous-anneau $\bigcup_{m'=0}^{\infty}\Lambda_{m+m'}^{(i)}$ est dense dans $\widehat{R}_\infty[p^{-1}]=\widetilde{\Lambda}^H$, il suffit donc de traiter le cas $x\in\Lambda_{m+m'}^{(i)}$ pour $m'\geq 0$. On construit par récurrence une suite croissante $(\delta_{m'})_{m'\in\mathbf{N}}$ telle que pour $x\in\Lambda_{m+m'}^{(i)}$, on a $v\left(\left(1-\tau_m^{(i)}\right)(x)\right)\geq v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(x)\right)-\delta_{m'}$. On prend $\delta_0=0$.

Soit $m'\geq 1$ et $x\in\Lambda_{m+m'+1}^{(i)}$. Posons $y=\left(1+\gamma_i^{p^{m+m'}}+\cdots+\gamma_i^{(p-1)p^{m+m'}}\right)(x)=p\tau_{m+m'}^{(i)}(x)$. Par hypothèse de récurrence, on a $v\left(\left(1-\tau_m^{(i)}\right)\left(\frac{y}{p}\right)\right)\geq v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)\left(\frac{y}{p}\right)\right)-\delta_{m'}$. Comme $\tau_{m+m'}^{(i)}$ commute à Γ_R, on a $\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)\left(\frac{y}{p}\right)=\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)\left(\tau_{m+m'}^{(i)}(x)\right)=\tau_{m+m'}^{(i)}\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(x)\right)$ soit $v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)\left(\frac{y}{p}\right)\right)\geq v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(x)\right)-\frac{ap^{1-m-m'}}{p-1}$ d'après ce qui suit le lemme 3.8. Comme $\tau_m^{(i)}\left(\frac{y}{p}\right)=\tau_m^{(i)}(x)$, on a donc $v\left(\frac{y}{p}-\tau_m^{(i)}(x)\right)\geq v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(x)\right)-\frac{ap^{1-m-m'}}{p-1}-\delta_{m'}$. Par ailleurs, on a $\left(1-\gamma_i^{p^{m+m'}}\right)(x)=\left(1+\gamma_i^{p^m}+\cdots+\gamma_i^{(p^{m'}-1)p^m}\right)\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(x)$: on a donc $v(px-y)\geq v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(x)\right)$. Ainsi, on a

$$v\left(\left(1-\tau_m^{(i)}\right)(x)\right)=v\left(\left(x-\frac{y}{p}\right)+\left(\frac{y}{p}-\tau_m^{(i)}(x)\right)\right)\geq v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(x)\right)-\delta_{m'+1}$$

avec $\delta_{m'+1}=\max\left\{1,\delta_{m'}+\frac{ap^{1-m-m'}}{p-1}\right\}$.

On peut donc prendre $c_3=1+\frac{p^2a}{(p-1)^2}$. En effet, pour tout $m,m'\in\mathbf{N}$, on a $\delta_{m'}\leq 1+\frac{ap^{2-m}}{(p-1)^2}\leq c_3$. Si $x\in X_m^{(i)}\cap\Lambda_{m+m'}^{(i)}$, on a $\left(1-\tau_m^{(i)}\right)(x)=x$ et $v\left(\left(1-\tau_m^{(i)}\right)(x)\right)\geq v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(x)\right)-\delta_{m'}$ d'où $v(x)\geq v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(x)\right)-c_3$. Cette inégalité reste vraie pour $x\in X_m^{(i)}$ quelconque par continuité.

Comme les éléments de $\Lambda_m^{(i)}$ sont invariants sous $\gamma_i^{p^m}$, la dernière partie de la condition (TS3) est vérifiée avec $c_4\in\mathbf{R}_{>0}$ quelconque. □

Lemme 3.11. *Avec les notations de la section 2, on a* $\Lambda_\infty=R_\infty[p^{-1}]$.

Démonstration. Rappelons que $\Lambda_\infty = \bigcup_{m\geq m_0} \Lambda_m$ avec $\Lambda_m = \bigcap_{i=0}^{d} \Lambda_m^{(i)}$. Il suffit donc de montrer que pour tout $m \geq m_0$, on a $\Lambda_m = R_m[p^{-1}]$. Pour $i \in \{1,\ldots,d\}$ et $n \in \mathbf{N}$, posons $R_n'^{(\geq i)} = \bigcap_{j=i}^{d} R_n'^{(j)}$. Par définition, on a $\Lambda_m^{(d)} = \left(\widehat{R_\infty'^{(\geq d)}.R_m}\right)[p^{-1}]$. Supposons qu'on a un $i \in \{2,\ldots,d\}$ avec $\left(\tau_m^{(i)} \circ \tau_m^{(i+1)} \circ \cdots \circ \tau_m^{(d)}\right)\left(\widehat{R}_\infty[p^{-1}]\right) = \left(\widehat{R_\infty'^{(\geq i)}.R_m}\right)[p^{-1}]$. Le sous-espace $\left(R_\infty'^{(\geq i)}.R_m\right)[p^{-1}]$ est envoyé sur $\left(R_\infty'^{(\geq i-1)}.R_m'\right)[p^{-1}]$ par $\tau_m^{(i-1)}$. Par continuité, on a donc $\tau_m^{(i-1)}\left(\left(\widehat{R_\infty'^{(\geq i)}.R_m}\right)[p^{-1}]\right) = \left(\widehat{R_\infty'^{(\geq i-1)}.R_m}\right)[p^{-1}]$ et donc $\left(\tau_m^{(i-1)} \circ \tau_m^{(i)} \circ \cdots \circ \tau_m^{(d)}\right)\left(\widehat{R}_\infty[p^{-1}]\right) = \left(\widehat{R_\infty'^{(\geq i-1)}.R_m}\right)[p^{-1}]$. Une application répétée de ce qui précède montre donc que $\left(\tau_m^{(1)} \circ \tau_m^{(2)} \circ \cdots \circ \tau_m^{(d)}\right)\left(\widehat{R}_\infty[p^{-1}]\right) = \left(\widehat{R_\infty'^{(\geq 1)}.R_m}\right)[p^{-1}]$. On a $R_\infty'^{(\geq 1)} = R.V_\infty$ et $\tau_m^{(0)}$ envoie $(V_\infty.R_m)[p^{-1}]$ sur $R_m[p^{-1}]$. Par continuité, on a donc $\tau_m^{(0)}\left(\left(\widehat{R_\infty'^{(\geq 1)}.R_m'}\right)[p^{-1}]\right) = R_m[p^{-1}]$. On a bien $\Lambda_m[p^{-1}] = \left(\tau_m^{(0)} \circ \tau_m^{(1)} \circ \cdots \circ \tau_m^{(d)}\right)\left(\widehat{R}_\infty[p^{-1}]\right) = R_m[p^{-1}]$. □

On en déduit le résultat suivant, dû à Faltings ([12, III Theorem 1.3]), mais par une méthode différente de *loc. cit.* (ici, on a suivi fidèlement la méthode de Tate).

Corollaire 3.12. *On a* $\left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)^{\mathcal{G}_R} = R[p^{-1}]$.

Démonstration. D'après la condition (TS3) (proposition 3.10), si $x \in X_m^{(i)}$, on a $v(x) \geq v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(x)\right) - c_3$. Si x est fixe sous $\gamma_i^{p^m}$, on a $v(x) = +\infty$ *i.e.* $x = 0$. Ainsi, $\Lambda_m^{(i)}$ est l'ensemble des éléments de $\widehat{R}_\infty[p^{-1}]$ fixes par $\gamma_i^{p^m}$ et donc Λ_m est l'ensemble des éléments de $\widehat{R}_\infty[p^{-1}]$ fixes par $\gamma_i^{p^m}$ pour $i \in \{0,\ldots,d\}$. On a donc $\left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)^{\mathcal{G}_R} \subseteq R_\infty[p^{-1}]$ d'après le lemme 3.11, soit $\left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)^{\mathcal{G}_R} = \left(R_\infty[p^{-1}]\right)^{\Gamma_R} = R[p^{-1}]$. □

Démonstration. (du théorème 3.1). D'après la proposition 3.6, on a

$$\varinjlim_{S_\infty} \mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]\right), \mathrm{GL}_n\left(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\right)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1\left(\mathcal{H}_R, \mathrm{GL}_n\left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)\right)$$

il s'agit donc de prouver que pour toute sous-R_∞-algèbre S_∞ de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne, l'application naturelle

$$\mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathrm{GL}_n\left(S_\infty[p^{-1}]\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathrm{GL}_n\left(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\right)\right)$$

est bijective.

Montrons l'injectivité (*cf.* lemme 2.8). Soient $U, U' \colon \mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right) \to \mathrm{GL}_n\left(S_\infty[p^{-1}]\right)$ deux cocycles cohomologues en tant que cocycles à valeurs dans $\mathrm{GL}_n\left(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\right)$, montrons qu'ils sont cohomologues dans $\mathrm{GL}_n\left(S_\infty[p^{-1}]\right)$. Comme $\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ est topologiquement engendré par un nombre fini d'éléments (on a la suite exacte $1 \to \mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]\right) \to \mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right) \to \Gamma_R \to 1$ et $S_\infty[p^{-1}]$ est fini sur $R_\infty[p^{-1}]$), il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que U et U' sont à valeurs dans $\mathrm{GL}_n\left(S_m[p^{-1}]\right)$. Il existe $M \in \mathrm{GL}_n\left(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\right)$ tel que $U'_g = M^{-1}U_g g(M)$ pour tout $g \in \mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$. En particulier, pour $i \in \{0,\ldots,d\}$, on a $\gamma_i^{p^m}(M) = U_{\gamma_i^{p^m}} M U'_{\gamma_i^{p^m}}$: si W_i est le sous-$\Lambda_m^{(i)}$-module de $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$ engendré par les coefficients de M (où $\Lambda_m^{(i)}$ est associé à S), alors W_i est stable par $\gamma_i^{p^m}$. Étant de type fini, la proposition 2.7 implique que $W_i \subseteq \Lambda_\infty^{(i)}$. On conclut comme dans le lemme 2.8 que M est à coefficients dans $\Lambda_\infty = S_\infty[p^{-1}]$ (lemme 3.11), et donc que U et U' sont cohomologues.

Montrons la surjectivité. Soit $U \colon \mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right) \to \mathrm{GL}_n\left(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\right)$ un cocycle, montrons qu'il est cohomologue à un cocycle à valeurs dans $\mathrm{GL}_n\left(S_\infty[p^{-1}]\right)$. Soit $N \in \mathbf{N}$ et $R_N \subset S_N$ une R_N-algèbre normale et finie, telle que $S_N[p^{-1}]$ est étale comme $R_N[p^{-1}]$-algèbre et S_∞ est la normalisation de $S_N \otimes_{R_N} R_\infty$. Soit $\Gamma_{S_N} = \mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/S_N[p^{-1}]\right)$. D'après les propositions 3.4, 3.9 et 3.10, le théorème 2.5 est valide : l'application $\mathrm{H}^1\left(\Gamma_{S_N}, \mathrm{GL}_n\left(\Lambda_\infty[p^{-1}]\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(\Gamma_{S_N}, \mathrm{GL}_n\left(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\right)\right)$ est bijective (où Λ_∞ est associé à S_N). Comme $\Lambda_\infty[p^{-1}] = S_\infty[p^{-1}]$ d'après le lemme 3.11, on a $\mathrm{H}^1\left(\Gamma_{S_N}, \mathrm{GL}_n\left(S_\infty[p^{-1}]\right)\right) \simeq \mathrm{H}^1\left(\Gamma_{S_N}, \mathrm{GL}_n\left(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\right)\right)$: la restriction du cocycle U à Γ_{S_N} est cohomologue à un cocycle à valeurs dans $\mathrm{GL}_n\left(S_\infty[p^{-1}]\right)$. Quitte à tordre U par $M \in \mathrm{GL}_n\left(\widehat{S}_\infty[p^{-1}]\right)$, on peut supposer qu'il existe un entier $m \in \mathbf{N}$ tel que $U_g \in \mathrm{GL}_n\left(S_m[p^{-1}]\right)$ pour tout $g \in \Gamma_{S_N}$. Soient $g_1,\ldots,g_r$ des générateurs topologiques de $\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ et pour $i \in \{0,\ldots,d\}$ notons

W_i le sous-$\Lambda_m^{(i)}$-module de $\widehat{S}_\infty[p^{-1}]$ engendré par les coefficients de $U_{g_1},\dots,U_{g_r}$ (où comme avant, $\Lambda_m^{(i)}$ est associé à S_N). Si $g\in \mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$, on a $\gamma_i^{p^m}(U_g)=U_{\gamma_i^{p^m}}^{-1}U_{\gamma_i^{p^m}g}$ donc W_i est stable par $\gamma_i^{p^m}$. Comme W_i est de type fini sur $\Lambda_m^{(i)}$, la proposition 2.7 implique que $W_i\subseteq\Lambda_\infty^{(i)}$. On conclut comme plus haut que $U_{g_1},\dots,U_{g_r}$ sont à coefficients dans $\Lambda_\infty=S_\infty[p^{-1}]$, et donc que U est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n\left(S_\infty[p^{-1}]\right)$. □

Corollaire 3.13. *Soit W un $\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]$-module libre de rang n, muni d'une action semi-linéaire et continue de $\mathcal{G}_R$. Alors il existe un $R_\infty[p^{-1}]$-module projectif D de rang n, muni d'une action semi-linéaire et continue de Γ_R, tel que $W\simeq\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\otimes_{R_\infty[p^{-1}]}D$ en tant que $\mathcal{G}_R$-modules.*

Démonstration. L'action de $\mathcal{G}_R$ sur W est décrite par un cocycle continu $U\colon\mathcal{G}_R\to\mathrm{GL}_n\left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)$. D'après le théorème 3.1, il existe une sous-R-algèbre S de $\overline{R}$ telle que U est cohomologue à un cocycle provenant par inflation-restriction d'un cocycle $\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)\to\mathrm{GL}_n\left(S_\infty[p^{-1}]\right)$. Cela signifie qu'il existe un sous-S_∞-module libre D_S de W, muni d'une action semi-linéaire continue de $\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ tel que $W\simeq\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\otimes_{S_\infty[p^{-1}]}D_S$ en tant que $\mathcal{G}_R$-modules. Mais le descente étale, pour l'extension finie étale galoisienne $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ implique l'existence d'un $R_\infty[p^{-1}]$-module projectif de rang n muni d'une action semi-linéaire et continue de Γ_R, tel que $D_S\simeq S_\infty[p^{-1}]\otimes_{R_\infty[p^{-1}]}D$ en tant que $\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$-modules. □

Remarque 3.14. Notons que dans [14], Faltings a construit une équivalence de catégories entre la catégorie des « petites représentations généralisées » et celle des « petits fibrés de Higgs » dans ce cadre (il en donne aussi une version globale sur les schémas propres à singularités toroïdales sur $\mathrm{Spec}(V)$). Son résultat est très proche du corollaire 3.13 : avec les notations de ce dernier et sous des hypothèses de petitesse convenables, le fibré de Higgs (M,θ) associé à la représentation généralisée W se déduit de D par descente à $R\otimes_V V_\infty[p^{-1}]$, l'élément $\theta\in\mathrm{End}(M)\otimes_R\widehat{\Omega}_{R/V}(-1)$ étant donné par les endomorphismes de Sen généralisés, induits par l'action infinitésimale de l'algèbre de Lie de Γ sur D (cf. [6]).

4. La théorie de Sen pour les (φ,Γ)-modules

4.1. Rappels et définitions.

Soit $1>\delta>0$ tel que $p^\delta\in V_\infty$. On définit $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+:=\varprojlim_{\infty\leftarrow n}R_\infty/p^\delta R_\infty$ où les morphismes de transition sont donnés par le Frobenius. Par [2, Lemma 4.10] c'est aussi l'ensemble des éléments $(a_0,\dots,a_n,\dots)\in\prod_{\mathbf{N}}\widehat{R_\infty}$ tels que $a_{n+1}^p=a_n$ pour tout $n\in\mathbf{N}$; en particulier, il ne depend pas de δ. (Le lecteur est mis en garde que l'anneau noté R dans [2] correspond à $\widetilde{R}$). Par construction $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+$ est munit de Frobenius φ et de l'action de Γ_R. On sait ([2, Theorems 5.1 & 5.11]) qu'il existe $1>\delta>0$ et $N\in\mathbf{N}$, qui ne dépendent que de R, tels que pour $n\geq N$, p^δ appartient à V_N et $R_n+p^\delta R_{n+1}=R_{n+1}^p+p^\delta R_{n+1}$ comme sous-anneaux de R_{n+1}. On définit $\mathbf{E}_R^+$ comme le sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+$ constitué des éléments $(a_0,\dots,a_n,\dots)$ tels que $a_n\in R_n/p^\delta R_n$ pour $n\geq N$. On pose $x_0=\varepsilon=\left(\varepsilon^{(0)},\varepsilon^{(1)},\varepsilon^{(2)},\dots\right)\in\mathbf{E}_R^+$, $\overline{\pi}=\varepsilon-1$ et $x_i=\left(T_i^{(0)},T_i^{(1)},\dots\right)\in\mathbf{E}_R^+$ pour $i\in\{1,\dots,d\}$. On note que $\mathbf{E}_R^+$ est stable par les actions de Frobenius φ et de Γ_R sur $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+$. Finalement on pose $\mathbf{E}_R:=\mathbf{E}_R^+\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$ et $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}:=\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$. On munit ces anneaux de la topologie $\overline{\pi}$-adique.

Si S_∞ est une sous-R_∞-algèbre S_∞ normale de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie étale, on définit $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+:=\varprojlim_{\infty\leftarrow n}S_\infty/p^\delta S_\infty$ comme au début. Si $N\in\mathbf{N}$ est tel qu'il existe une R_N–algèbre finie et normale telle que $R_N[p^{-1}]\subset S_N[p^{-1}]$ est étale et S_∞ est la normalisation de $S_N\otimes_{R_N}R_\infty$, on définit $\mathbf{E}_S^+$ comme le sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+$ constitué des éléments $(a_0,\dots,a_n,\dots)$ tels que $a_n\in S_n/p^\delta S_n$ pour $n\gg0$, oú S_n est la normalisation de $S_N\otimes_{R_N}R_n$ (rappelons que δ dépend de S_N). En particulier, $\mathbf{E}_S^+$ coïncide avec le sous-anneau $\varphi^N\left(\mathbf{E}_{S_N}^+\right)$ de $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+$, où l'anneau $\mathbf{E}_{S_N}^+$ est defini comme au début.

On définit alors $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ (resp. $\mathbf{E}^+$) comme le separé completé, pour la topologie $\overline{\pi}$-adique, de $\varinjlim_{S_\infty}\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+$ (resp. $\varinjlim_{S_\infty}\mathbf{E}_S^+$), la limite étant prise sur les sous-R_∞-algèbres S_∞ normales de $\overline{R}$ telles que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie étale. On pose $\widetilde{\mathbf{E}}=\widetilde{\mathbf{E}}^+\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$ et $\mathbf{E}=\mathbf{E}^+\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$. Tous ces anneaux sont munis d'une action continue de $\mathcal{G}_R$ (*cf.* [2, Proposition 6.14]).

Lemme 4.2. *On a*

(a) *les anneaux $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+$ et $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ sont parfaits ;*
(b) *les anneaux $\mathbf{E}_R^+$ et $\widetilde{\mathbf{E}}_R^+$ sont séparés et complets pour la topologie $\overline{\pi}$-adique ;*
(c) *$\mathbf{E}_V^+=K_\infty[\![\overline{\pi}_K]\!]$ où k_∞ est le corps résiduel de V_∞ et $\overline{\pi}_K^{(n)}$ une uniformisante de V_n pour $n\gg0$;*
(d) *$\mathbf{E}_{R^0}^+=\mathbf{E}_V^+\left\{x_1^{\pm1},\dots,x_d^{\pm1}\right\}$ (séparé complété de $\mathbf{E}_V^+\left[x_1^{\pm1},\dots,x_d^{\pm1}\right]$ pour la topologie $\overline{\pi}$-adique) ;*

(e) l'anneau $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}$ est un anneau intègre noethérien régulier, et s'obtient à partir de $\mathbf{E}^+_{R^0}$ en itérant les opérations suivantes :

(i) *extension complète, topologiquement de type fini et formellement étale pour la topologie $\overline{\pi}$-adique ;*

(ii) *complétion, pour la topologie $\overline{\pi}$-adique, d'une localisation ;*

(iii) *complétion par rapport à un idéal contenant $\overline{\pi}$.*

(f) il existe $\ell \in \mathbf{N}$ tel qu'on a la factorisation $\overline{\pi}^\ell \widetilde{\mathbf{E}}^+_R \to \widetilde{\mathbf{E}}^+_{\widetilde{R}} \otimes_{\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}} \mathbf{E}^+_R \to \widetilde{\mathbf{E}}^+_R$;

(g) les anneaux $\mathbf{E}^+_R$ et $\widetilde{\mathbf{E}}^+_R$ sont normaux et les extensions $\mathbf{E}_{\widetilde{R}} \subset \mathbf{E}_R$ et $\widetilde{\mathbf{E}}_{\widetilde{R}} \subset \widetilde{\mathbf{E}}_R$ sont finies étales de degré égal au degré de $\widetilde{R}_\infty[p^{-1}] \subset R_\infty[p^{-1}]$;

(h) $\left(\widetilde{\mathbf{E}}^+\right)^{\mathcal{H}_R} = \widetilde{\mathbf{E}}^+_{R_\infty}$, $\widetilde{\mathbf{E}}^{\mathcal{H}_R} = \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$, $\left(\mathbf{E}^+\right)^{\mathcal{H}_R} = \mathbf{E}^+_R$ et $\mathbf{E}^{\mathcal{H}_R} = \mathbf{E}_R$.

Démonstration. (a) résulte de [2, Prop. 4.4] ;

(b) résulte de [2, Prop. 4.4 et Prop. 4.5] ;

(c) est [2, Cor. 4.6] ;

(d) résulte de [2, Cor. 4.7] ;

(e) d'après [2, Thm. 5.1 & 5.11], il existe M et $N = N\left(\widetilde{R}, M\right) \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geq N$ et tout $s \leq M$, on a un isomorphisme $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}} \Big/ (\varepsilon - 1)^{p^{n-s}} \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{R}_n \Big/ \left(\varepsilon^{(s)} - 1\right) \widetilde{R}_n$, et donc

$$\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}} \xrightarrow{\sim} \varprojlim{}_n \widetilde{R}_n \Big/ \left(\varepsilon^{(s)} - 1\right) \widetilde{R}_n$$

les morphismes de transition étant donnés par le Frobenius. Rappelons que $\widetilde{R}_n = \widetilde{R} \otimes_V V_n \left[T_1^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, T_d^{\frac{1}{p^n}}\right]$, et que $\widetilde{R}$ est déduit de R^0 par les opérations (ét), (loc) et (comp) de l'introduction. Dans le cas d'une opération $\widetilde{R}' \subset \widetilde{R}$ de type (ét) (resp. (loc), resp. (comp)), les extensions

$$\widetilde{R}'_n \Big/ \left(\varepsilon^{(s)} - 1\right) \widetilde{R}'_n \to \widetilde{R}_n \Big/ \left(\varepsilon^{(s)} - 1\right) \widetilde{R}_n$$

sont étales (resp. des localisations par rapport à un système multiplicatif, resp. des complétions par rapport à un idéal, indépendant de n) : l'extension $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'} \to \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}$ est topologiquement de type fini et formellement étale pour la topologie $\overline{\pi}$-adique (resp. le complété, pour la topologie $\overline{\pi}$-adique, d'une localisation, resp. le complété par rapport à un idéal contenant $\overline{\pi}$).

(f) résulte du [2, Lemma 4.15] ;

(g) résulte de [2, Thm. 4.9, Thm. 5.1 et Thm. 5.11] ;

(h) n'est autre que [2, Prop. 6.14]. □

Soit v_p la valuation discrète sur K normalisée par $v_p(p) = 1$. Soit $v_{\mathbf{E}}$ la valuation discrète sur $\mathbf{E}_V$ normalisée par $v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K) = p^n v_p(\overline{\pi}_K^{(n)})$ pour $n \gg 0$. On prolonge $v_{\mathbf{E}}$ en une application $v_{\mathbf{E}} \colon \widetilde{\mathbf{E}} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ en posant

$$v_{\mathbf{E}}(x) = \max\left\{n \in \mathbf{Q}, x \in \overline{\pi}^n \widetilde{\mathbf{E}}^+\right\}.$$

Ce n'est pas une valuation en général, mais vérifie les propriétés (i)-(iv) de la section 2.

On pose $\widetilde{\mathbf{A}}_R = \mathrm{W}(\widetilde{\mathbf{E}}_R)$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}^+_R = \mathrm{W}(\widetilde{\mathbf{E}}^+_R)$, resp. $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathrm{W}(\widetilde{\mathbf{E}}_R)$, resp. $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = \mathrm{W}(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$). On munit $\widetilde{\mathbf{A}}$ de la topologie faible definie comme la topologie de la limite projective $\widetilde{\mathbf{A}} = \lim\limits_{\infty \leftarrow n} \mathrm{W}_n(\widetilde{\mathbf{E}})$, chaque $\mathrm{W}_n(\widetilde{\mathbf{E}})$ étant muni de la topologie produit $\mathrm{W}_n(\widetilde{\mathbf{E}}) \cong \widetilde{\mathbf{E}}^n$ (l'isomorphisme étant donné par les composantes fantômes), la topologie sur $\widetilde{\mathbf{E}}$ étant la topologie $\overline{\pi}$-adique. L'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}$ est alors separé et complet pour cette topologie et les actions de $\mathcal{G}_R$ et du Frobenius sont continues (*cf.* [2, Proposition 7.2)]. De plus, les sous-anneaux $\widetilde{\mathbf{A}}_R$, $\widetilde{\mathbf{A}}^+_R$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ sont fermés pour cette topologie.

Pour $r \in \mathbf{Q}_{>0}$, on note $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ l'ensemble des éléments $z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p^k [z_k]$ de $\widetilde{\mathbf{A}}$ tels que

$$\lim_{k \to \infty} r v_{\mathbf{E}}(z_k) + k = +\infty.$$

On pose $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} = \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}[p^{-1}]$, $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger = \bigcup\limits_{r \in \mathbf{Q}_{>0}} \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger = \widetilde{\mathbf{A}}^\dagger[p^{-1}]$. Pour $z = \sum\limits_{k \in \mathbf{Z}} p^k [z_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$, on pose alors

$$w_r(z) = \inf_{k \in \mathbf{Z}} \left(r v_{\mathbf{E}}(z_k) + k\right)$$

(on a $w_r = r v^{(0,r]}$ avec les notations de [11, 5.2]). Cela définit une application $v = w_r \colon \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Rappelons quelques propriétés de w_r et de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$.

Proposition 4.3. *(cf.* [11, 5.2]*)* *(a) Pour tout $r \in \mathbf{Q}_{>0}$, on a $\widetilde{\mathbf{A}}^+ \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et la topologie induite par w_r sur $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ coïncide avec la topologie faible.*

(b) (cf. loc. cit. Proposition 5.4 et corollaire 5.5) L'application w_r vérifie les propriétés (i)-(iv) de la section 2. En particulier, $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ est un sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{A}}$. En outre, si $z \in \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$, on a $w_r(g(z)) = w_r(z)$ pour $g \in \mathcal{G}_R$ et $w_{p^{-1}r}(\varphi(z)) = w_r(z)$. En particulier, $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ est stable par $\mathcal{G}_R$ et φ induit un homéomorphisme de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ sur $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,p^{-1}r]}$.

(c) (cf. loc. cit. Proposition 5.6) L'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ est séparé et complet pour la topologie définie par w_r.

(d) (cf. loc. cit. Corollaire 6.3, [7, Corollaire II.1.5]*) On a $v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) = \frac{p}{p-1}$ donc $w_r\left(\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}}\right) = 0$ pour tout $r = \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}_{>0}$. Si $r \leq 1$, on a $\pi = u[\overline{\pi}]$ avec $u \in \widetilde{\mathbf{A}}$ et $w_r(u) \geq 0$. Si $r < 1$, alors u est une unité de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et $w_r(u) = 0$. En particulier, pour $r \leq 1$, on a $w_r(\pi) \geq w_r([\overline{\pi}]) = \frac{pr}{p-1}$, avec égalité si $r < 1$.*

Démonstration. (a) Si $z = \sum_{k=0}^{\infty} p^k[z_k] \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$, on a $v_{\mathbf{E}}(z_k) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et donc $rv_{\mathbf{E}}(z_k) + k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *i.e.* $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$. Par ailleurs, si $(A, N) \in \mathbf{Q}_{>0} \times \mathbf{N}$, on a les inclusions

$$\left\{z \in \widetilde{\mathbf{A}}^+,\ (\forall k \leq A)\ v_{\mathbf{E}}(z_k) \geq \frac{A}{r}\right\} \subseteq \left\{z \in \widetilde{\mathbf{A}}^+,\ w_r(z) \geq A\right\} \subseteq \left\{z \in \widetilde{\mathbf{A}}^+,\ (\forall k \leq N)\ v_{\mathbf{E}}(z_k) \geq \frac{A-N}{r}\right\}$$

ce qui montre que la topologie induite par w_r et la topologie faible de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ sont les mêmes.

(b) Pour $k \in \mathbf{Z}$ et $z = \sum_{k\in\mathbf{Z}} p^k[z_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$, posons $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(z) = \inf_{j\leq k} v_{\mathbf{E}}(z_j)$. Les applications $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}$ ont les propriétés suivantes :

(1) $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(z) = \infty \Leftrightarrow z \in p^{k+1}\widetilde{\mathbf{A}}$;
(2) $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(y+z) \geq \inf\left(v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(y), v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(z)\right)$ avec égalité si $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(y) \neq v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(z)$;
(3) $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(yz) \geq \inf_{i+j\leq k}\left(v_{\mathbf{E}}^{\leq i}(y) + v_{\mathbf{E}}^{\leq j}(z)\right)$;
(4) $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(\varphi(z)) = pv_{\mathbf{E}}^{\leq k}(z)$;
(5) $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(g(z)) = v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(z)$ pour $g \in \mathcal{G}_R$.

En particulier, les applications $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}$ sont des semi-normes. Par ailleurs, par définition, la topologie faible sur $\widetilde{\mathbf{A}}$ est la topologie définie par la famille $\left\{v_{\mathbf{E}}^{\leq k}\right\}_{k\in\mathbf{N}}$. L'assertion (b) résulte alors du fait que $w_r(z) = \inf_{k\in\mathbf{Z}}\left(rv_{\mathbf{E}}^{\leq k}(z) + k\right)$.

(c) La séparation de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ découle du fait que w_r vérifie la condition (i) de la section 2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ qui tend vers 0 pour w_r. Comme $w_r(a_n) = \inf_{k\in\mathbf{N}}\left(rv_{\mathbf{E}}^{\leq k}(a_n) + k\right)$, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la suite $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(a_n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$: la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge donc dans $\widetilde{\mathbf{A}}$ (pour la topologie faible) vers un élément a, tel que $v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(a) \geq \inf_{n\in\mathbf{N}} v_{\mathbf{E}}^{\leq k}(a_n)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. En particulier, on a $rv_{\mathbf{E}}^{\leq k}(a)+k \geq \inf_{n\in\mathbf{N}}\left(rv_{\mathbf{E}}^{\leq k}(a_n) + k\right)$. Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $rv_{\mathbf{E}}^{\leq k}(a_n) + k \geq w_r(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et comme à n fixé $rv_{\mathbf{E}}^{\leq k}(a_n) + k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $rv_{\mathbf{E}}^{\leq k}(a) + k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *i.e.* $a \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$.

(d) On a $v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) = v\left((\varepsilon-1)^{(0)}\right) = \lim_{n\to\infty} v\left(\left(\varepsilon^{(n)}-1\right)^{p^n}\right) = \frac{p}{p-1}$.

On peut écrire $\pi = [\varepsilon] - 1 = [\overline{\pi}] + p[\alpha_1] + p^2[\alpha_2] + \cdots$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+$, avec $\alpha_n \in \mathbf{Z}\left[\varepsilon^{\frac{1}{p^n}} - 1\right]$ sans terme constant. Cela se voit par récurrence en utilisant la formule $\varphi(\pi) = [\varepsilon]^p - 1 = (\pi+1)^p - 1$, qui donne $[\overline{\pi}^p] + p[\alpha_1^p] + p^2[\alpha_2^p] + \cdots = \left(1 + [\overline{\pi}] + p[\alpha_1] + p^2[\alpha_2] + \cdots\right)^p - 1$, et permet de calculer les α_n de proche en proche. On a donc $v_{\mathbf{E}}(\alpha_n) \geq v_{\mathbf{E}}\left(\varepsilon^{\frac{1}{p^n}} - 1\right) = \frac{1}{(p-1)p^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, d'où $v_{\mathbf{E}}(\alpha_1) - v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) = -1$ et $v_{\mathbf{E}}(\alpha_n) - v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) \geq -\frac{p}{p-1} \geq -n$ si $n \geq 2$. Pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on écrivons $\alpha_n = \overline{\pi}a_n$ avec $a_n \in \widetilde{\mathbf{E}}$. On a alors $\pi = u[\overline{\pi}]$ avec $u = 1 + a \in \widetilde{\mathbf{A}}$ où $a = p[a_1] + p^2[a_2] + \cdots$. Si $r \leq 1$, on a $w_r(a) = \inf_{n\in\mathbf{N}_{>0}}(rv_{\mathbf{E}}(a_n) + n) \geq 1 - r \geq 0$. Supposons maintenant $r < 1$. On a $u \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et $w_r(a) \geq 1 - r > 0$, d'où $w_r(1-u) > 0$ et $w_r(u) = 0$. Comme $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ est complet pour la topologie définie par w_r d'après ce qui précède, l'élément u est inversible dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$. □

Remarque 4.4. Bien sûr, l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ n'est pas complet pour w_r.

On pose $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]} = \left(\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}\right)^{\mathcal{H}_R}$, $\widetilde{\mathbf{B}}_R^{(0,r]} = \left(\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}\right)^{\mathcal{H}_R}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger} = \left(\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}\right)^{\mathcal{H}_R}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_R^{\dagger} = \left(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}\right)^{\mathcal{H}_R}$. Remarquons que $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}/p\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]} \cong \widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}/p\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger} \cong \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$.

4.5. **Descente de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ à $\widetilde{\mathbf{B}}_R^{\dagger}$.**

Proposition 4.6. *(cf. [11, Lemme 10.1]). L'anneau $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$, muni de l'action de $\mathcal{H}_R$, vérifie la propriété (TS1).*

Démonstration. Fixons $c_1 \in \mathbf{R}_{>0}$ quelconque. Soient $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \mathcal{H}_R$ des sous-groupes ouverts distingués. Ils correspondent à des extensions finies galoisiennes $R_\infty \subseteq S_\infty \subseteq S'_\infty$. Notons $\mathrm{Tr}_{S'/S}$ l'opérateur $\sum\limits_{\tau \in H_2/H_1} \tau$. D'après 4.2 (h), on a $\widetilde{\mathbf{A}}^{H_1} = \widetilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^{H_2} = \widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}$. En outre, l'extension $\widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}/\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$ modulo p est étale d'après *loc. cit.* Remark 7.14 et Lemma 7.15. Par ailleurs, l'opérateur $\mathrm{Tr}_{S'/S}$ coïncide avec la trace $\mathrm{Tr}_{\widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}/\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}}$ sur $\widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}$. Il existe donc $\alpha_0 \in \widetilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}$ tel que $\mathrm{Tr}_{S'/S}(\alpha_0) = 1$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\mathrm{Tr}_{S'/S}(\varphi^{-n}(\alpha_0)) = 1$ et $v_{\mathbf{E}}(\varphi^{-n}(\alpha_0)) = p^{-n} v_{\mathbf{E}}(\alpha_0)$: quitte à remplacer α_0 par $\varphi^{-n}(\alpha_0)$ pour n assez grand, on peut supposer que $v_{\mathbf{E}}(\alpha_0) > \max\left(-r^{-1}, -c_1\right)$.

On peut alors écrire $a = \mathrm{Tr}_{S'/S}([\alpha_0]) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} p^k [z_k]$. Comme $v_{\mathbf{E}}(z_k) \geq v_{\mathbf{E}}(\alpha_0) > -r^{-1}$ (*cf.* [11, 5.1]), on a $r v_{\mathbf{E}}(z_k) + k > k - 1$ pour $k \in \mathbf{N}_{>0}$, et donc $a = 1 + b$ avec $w_r(b) > 0$. Comme $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ est complet pour la topologie définie par w_r, l'élément a est inversible dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et donc dans $\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}\right)^{H_2}$. De plus, on a $w_r(a) = w_r(a^{-1}) = 0$. Soit alors $\alpha = a^{-1}[\alpha_0] \in \left(\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}\right)^{H_1}$. Par construction, on a $\mathrm{Tr}_{S'/S}(\alpha) = 1$. En outre, on a $w_r(\alpha) \geq w_r(a^{-1}) + w_r([\alpha_0]) = v_{\mathbf{E}}(\alpha_0) > -c_1$. □

Lemme 4.7. *Soient $r \in \mathbf{Q}_{>0}$ et $z \in \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$. Pour $s \in]0, r]$, on a $z \in \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,s]}$ et $w_s(z) \geq \frac{s}{r} w_r(z)$. En particulier, il existe $s \in]0, r]$ tel que $w_s(pz) > 0$.*

Démonstration. On peut supposer $s < r$. Écrivons $z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p^k [z_k]$. Pour $k \in \mathbf{N}$, on a $v_{\mathbf{E}}(z_k) \geq \frac{1}{r}(w_r(z) - k)$ donc $s v_{\mathbf{E}}(z_k) + k \geq \frac{s}{r} w_r(z) + \left(1 - \frac{s}{r}\right) k$. Comme $1 - \frac{s}{r} > 0$, on a $z \in \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,s]}$ et $w_s(z) \geq \frac{s}{r} w_r(z)$. Enfin, on a $w_s(pz) = 1 + w_s(z) \geq 1 + \frac{s}{r} w_r(z) > 0$ si s est assez petit. □

Proposition 4.8. *Le couple $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}, p\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}\right)$ est hensélien.*

Démonstration. On reprend la preuve de Matsuda (*cf.* [20, Proposition 2.2]). Il s'agit de montrer que tout polynôme unitaire $f(X) \in \widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}[X]$ tel que $f(X) \equiv X^n(1-X)^n \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}[X]$ admet une factorisation $f(X) = P(X)Q(X)$ avec $P(X), Q(X) \in \widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}[X]$, $P(X) \equiv X^n \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}[X]$ et $Q(X) \equiv (1-X)^n \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}[X]$. Écrivons $f(X) = f^{\dagger}(X) + X^n f^*(X)$ avec $f^{\dagger}(X) = f_0 + f_1 X + \cdots + f_{n-1} X^{d-1}$ et $f^*(X) = f_n + f_{n+1} X + \cdots + f_{2n} X^n$ où $f^{\dagger}(X) \equiv 0 \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}[X]$ et $f^*(X) \equiv (1-X)^n \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}[X]$. Il existe $r \in \mathbf{Q}_{>0}$ tel que $f_j \in \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ pour tout $j \in \{0, \ldots, 2n\}$. Par hypothèse, on a $f_j \equiv \binom{n}{j-n} \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$: d'après le lemme 4.7, quitte à diminuer r, on peut supposer que $w_r\left(f_j - \binom{n}{j-n}\right) > 0$ pour tout $j \in \{0, \ldots, 2n\}$. En particulier, on a $w_r(f_n - 1) > 0$. Comme $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ est complet pour w_r (*cf.* proposition 4.3 (b)), l'élément f_n est inversible dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$. Il en est donc de même de $f^*(X)$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}[\![X]\!]$. Posons alors $F = -f^{\dagger}(X)/f^*(X) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} F_m X^m \in \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}[\![X]\!]$. D'après ce qui précède, on a $w_r(f_j) > 0$ pour $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ et $w_r(f_j) \geq 0$ pour $j \in \{n+1, \ldots, 2n\}$, on a donc $w_r(F_m) \geq w_r\left(f^{\dagger}(X)\right) > 0$ pour tout $m \in \mathbf{N}$ (où $w_r\left(f^{\dagger}(X)\right) = \min\limits_{0 \leq j < n} w_r(f_j)$). Notons qu'en outre, on a $F(X) \equiv 0 \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}[\![X]\!]$.
On cherche à résoudre

$$(*) \qquad X^n - (X^n - F(X))\, G(X) = R(X)$$

avec $G(X) \in \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}[\![X]\!]$ et $R(X) \in \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}[X]$ de degré $< n$. On construit pour cela des suites $\left(G^{(u)}(X)\right)_{u \in \mathbf{N}}$ et $\left(R^{(u)}(X)\right)_{u \in \mathbf{N}}$ par récurrence sur $u \in \mathbf{N}$, de sorte qu'on a $G^{(u)}(X) \in p^u \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}[\![X]\!]$ et $R^{(u)}(X) \in p^u \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}[X]$ de degré $< n$. On pose $G^{(0)}(X) = 1$ et $R^{(0)}(X) = 0$. Les éléments $G^{(u)}(X)$ et $R^{(u)}(X)$ étant construits, on définit $G^{(u+1)}(X)$ et $R^{(u+1)}(X)$ par

$$(**) \qquad G^{(u)}(X) F(X) = X^n G^{(u+1)}(X) + R^{(u+1)}(X) \qquad \deg\left(R^{(u+1)}(X)\right) < n$$

dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}[\![X]\!]$. Comme $F(X) \equiv 0 \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}[\![X]\!]$, une récurrence immédiate implique qu'on a bien $G^{(u)}(X) \in p^u \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}[\![X]\!]$ et $R^{(u)}(X) \in p^u \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}[X]$ pour tout $u \in \mathbf{N}$. Par ailleurs, on a $w_r\left(G^{(u+1)}(X)\right), w_r\left(R^{(u+1)}(X)\right) \geq w_r\left(G^{(u)}(X)\right) + w_r(F(X))$ (avec des notations évidentes), d'où $w_r\left(G^{(u+1)}(X)\right), w_r\left(R^{(u+1)}(X)\right) \geq u w_r(F(X))$ pour tout $u \in \mathbf{N}$ (on a $w_r\left(G^0(X)\right) = 0$). Comme $w_r(F(X)) \geq w_r\left(f^{\dagger}(X)\right) > 0$, les séries $G(X) = \sum\limits_{u=0}^{\infty} G^{(u)}(X)$ et $R(X) = \sum\limits_{u=0}^{\infty} R^{(u)}(X)$ convergent dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}[\![X]\!]$ et $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}[X]$ respectivement. En additionnant les égalités $(**)$ pour $u \in \mathbf{N}$, on a $G(X)F(X) = X^n(G(X) - 1) + R(X)$ *i.e.* $(*)$.

Par construction, on a $G(X) \equiv 1 \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}[\![X]\!]$ (parce que $G(0)(X) = 1$) : d'après le lemme 4.7, quitte à diminuer r, on peut supposer que le terme constant de $G(X)$ est de la forme $1+g$ avec $w_r(g) > 0$, donc inversible. La série $G(X)$ est alors inversible dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}[\![X]\!]$. On a déjà $P(X) \equiv X^n \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}[X]$. On pose alors $Q(X) = f^*(X)/G(X) \in \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}[\![X]\!]$ et $P(X) = X^n - R(X) \in \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}[X]$ (en effet, on a $R(X) \equiv 0 \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}[X]$, parce que $R(0)(X) = 0$). On a alors $P(X)Q(X) = f^*(X)(X^n - R(X))/G(X) = f^*(X)(X^n - F(X)) = f(X)$, et $Q(X) \in \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}[X]$, avec $Q(X) \equiv (1-X)^n \mod p\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}[X]$. □

Proposition 4.9. *Soit S_∞ une R_∞-algèbre finie telle que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est étale galoisienne. Alors l'extension correspondante $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}/\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}$ est finie étale galoisienne.*

Démonstration. Commençons par montrer que l'extension est finie. D'après [2, Thm. 4.9 et Prop. 6.14], l'extension $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}/\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$ est finie étale galoisienne. Soit $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ une famille génératrice, avec $\alpha_j \in \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+$ pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$. Il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $\overline{\pi}^m \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+ \subseteq \sum_{j=1}^r \alpha_j \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+$. Montrons que $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger} = \sum_{j=1}^r [\alpha_j]\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}$.

Soit $z \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}$. Pour $c \in \mathbf{N}$ convenable, on peut écrire $z = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p}{[\overline{\pi}]^c}\right)^k [z_k]$ où $z_k \in \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Comme $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}^+ \subseteq \frac{1}{\overline{\pi}^m} \sum_{j=1}^r \alpha_j \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+$, on peut écrire $[z_k] = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{j=1}^r [\alpha_j] \left(\frac{p}{[\overline{\pi}]^m}\right)^u [z_{k,j,u}]$, avec $z_{k,j,u} \in \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+$ (on le voit par récurrence, en regardant modulo p^u). Fixons $r \in \mathbf{Q}_{>0}$ tel que $r < \min(c^{-1}, m^{-1})$. Comme $rm < 1$, les sommes $z_{k,j} = \sum_{u=0}^{\infty} \left(\frac{p}{[\overline{\pi}]^m}\right)^u [z_{k,j,u}]$ convergent dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$. En outre, on a $w_r(z_{k,j}) = \min_{u \in \mathbf{N}} (rv_{\mathbf{E}}(z_{k,j,u}) + (1-rm)u) \geq 0$. On peut alors écrire $z = \sum_{j=1}^r [\alpha_j] a_j$ avec $a_j = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p}{[\overline{\pi}]^c}\right)^k z_{k,j}$. La somme a_j converge dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ car pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $w_r\left(\left(\frac{p}{[\overline{\pi}]^c}\right)^k z_{k,j}\right) \geq (1-rc)k + w_r(z_{k,j})$, $rc < 1$ et $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ est complet pour w_r (proposition 4.3 (ii)). On a bien $z \in \sum_{j=1}^r [\alpha_j]\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]} \subseteq \sum_{j=1}^r [\alpha_j]\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}$, ce qu'on voulait.

Comme $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}/\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$ est finie étale, il existe un unique idempotent $\overline{\mathfrak{e}}_{S/R} \in \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty} \otimes_{\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}} \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$ tel que $m(x) = \left(\mathrm{Tr}_{\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}/\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}} \otimes \mathrm{Id}\right)(\overline{\mathfrak{e}}_{S/R}.x)$, où $m\colon \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty} \otimes_{\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}} \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty} \to \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$ désigne la multiplication. Comme $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}$ est fini sur $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}$, il en est de même de $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger} \otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}} \widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}$. D'après la proposition 4.8, le couple $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger} \otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}} \widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}, (p)\right)$ est donc Hensélien (*cf.* [22, XI Proposition 2]). Comme la réduction modulo p de ce dernier est précisément $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty} \otimes_{\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}} \widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$, l'idempotent $\overline{\mathfrak{e}}_{S/R}$ se relève de façon unique en un idempotent $\mathfrak{e}_{S/R} \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger} \otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}} \widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}$.
L'extension $\widetilde{\mathbf{A}}_S/\widetilde{\mathbf{A}}_R$ est finie étale galoisienne, et son groupe de Galois s'identifie à celui de l'extension $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}/\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$, car $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ et $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ sont séparés et complets pour la topologie p-adique, de réduction modulo p respectives $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$ et $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$. L'image, encore notée $\mathfrak{e}_{S/R}$ de l'idempotent dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S \otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_R} \widetilde{\mathbf{A}}_S$ vérifie donc $m(x) = \left(\mathrm{Tr}_{\widetilde{\mathbf{A}}_S/\widetilde{\mathbf{A}}_R} \otimes \mathrm{Id}\right)(\mathfrak{e}_{S/R}.x)$ pour tout $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_S \otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_R} \widetilde{\mathbf{A}}_S$ (où $m\colon \widetilde{\mathbf{A}}_S \otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_R} \widetilde{\mathbf{A}}_S \to \widetilde{\mathbf{A}}_S$ désigne toujours la multiplication), parce que c'est vrai modulo p et qu'il y a unicité du relèvement. Comme $\mathcal{G}_R$ respecte la surconvergence, la trace $\mathrm{Tr}_{\widetilde{\mathbf{A}}_S/\widetilde{\mathbf{A}}_R}$ envoie $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}$: on note $\mathrm{Tr}_{\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}/\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}}$ sa restriction à $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}$. L'idempotent $\mathfrak{e}_{S/R}$ vérifie donc $m(x) = \left(\mathrm{Tr}_{\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}/\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}} \otimes \mathrm{Id}\right)(\mathfrak{e}_{S/R}.x)$ pour tout $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger} \otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}} \widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}$, *i.e.* l'extension $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}/\widetilde{\mathbf{A}}_R^{\dagger}$ est étale. Elle est galoisienne car l'extension résiduelle $\widetilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}/\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$ l'est. □

Proposition 4.10. *On a*

$$\varinjlim_{S_\infty} \mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]\right), \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S^{\dagger}\right)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1\left(\mathcal{H}_R, \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}\right)\right)$$

et

$$\varinjlim_{S_\infty} \mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]\right), \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{B}}_S^{\dagger}\right)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1\left(\mathcal{H}_R, \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}\right)\right)$$

où la limite inductive est prise sur les sous-R_∞-algèbres S_∞ de $\overline{R}$ telles que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne.

Démonstration. Comme les applications en question sont des limites inductives d'applications d'inflation, elles sont injectives. Montrons leur surjectivité.

Soit $U\colon \mathcal{H}_R \to \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}\right)$ un cocycle continu (pour la topologie faible). Comme $\mathcal{H}_R$ est compact, il existe $r \in \mathbf{Q}_{>0}$ tel que U est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}\right)$. En effet, $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger} = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}_{>0}} \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$, est muni de la topologie de la limite inductive, et pour tous $r, s \in \mathbf{Q}_{>0}$ tels que $s \leq r$, l'inclusion $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,s]}$ est ouverte (cela résulte du fait

que $\widetilde{\mathbf{A}}^{+} \subseteq \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ est un voisinage de 0 pour la topologie faible –cela se vérifie modulo p^n pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$–, et du fait que $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ est un groupe pour l'addition).
Notons $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{\geq 0}$ le sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ constitué des éléments z tels que $w_r(z) \geq 0$ (dans [7], cet anneau est noté $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{r^-}$). On a $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} = \bigcup\limits_{m\in\mathbf{Z}} p^m \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{\geq 0}$. En outre, comme $\widetilde{\mathbf{A}}^{+} \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{\geq 0}$, ce dernier est ouvert dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$. Comme U est continu et $\mathcal{H}_R$ compact, il existe un sous-groupe ouvert et normal H_0 de $\mathcal{H}_R$ tel que $U_g \equiv 1 \mod p\mathrm{M}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{+}\right)$. En particulier, U est à valeurs dans $1 \mod p\mathrm{M}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{\geq 0}\right)$ et continu pour la topologie définie par w_r (car sur $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$ cette dernière coïncide avec la topologie faible en vertu de la proposition 4.3 (a)). En outre, on a $w_r(U_g - 1) \geq 1$ pour $g \in H_0$ et donc $U_g \in \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}\right)$ (car $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ est complet pour w_r, *cf.* proposition 4.3). D'après les propositions 2.2 et 4.6, quitte à remplaçer H_0 par un sous-groupe ouvert, on peut supposer que la restriction de U à H_0 est triviale, *i.e.* que U est cohomologue à un cocycle provenant par inflation d'un cocycle $\mathcal{H}_R/H_0 \to \mathrm{GL}_n\left(\left(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}\right)^{H_0}\right)$.
Le sous-groupe H_0 de $\mathcal{H}_R$ correspond à une extension finie S_∞ de R_∞ telle que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est étale. Quitte à remplacer H_0 par un sous-groupe ouvert, on peut supposer que l'extension $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est galoisienne.

Le cas d'un cocycle $U\colon \mathcal{H}_R \to \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}\right)$, plus simple, se traite de façon analogue. □

4.11. **Décomplétion.**
On note $\mathbf{A}_R$ l'unique (*cf.* proposition 4.49) sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ caractérisé par les propriétés suivantes :
(a) $\mathbf{A}_R$ est complet pour la topologie faible ;
(b) $\mathbf{A}_R \cap p\widetilde{\mathbf{A}}_R = p\mathbf{A}_R$;
(c) on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_R & \twoheadrightarrow & \mathbf{E}_R \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\mathbf{A}}_R & \twoheadrightarrow & \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty} \end{array}$$

(d) $[x_i] \in \mathbf{A}_R$ pour $i \in \{0, \ldots, d\}$;
(e) il existe une sous-$\mathbf{A}^{+}_{\mathrm{W}(k)}$-algèbre $\mathbf{A}^{+}_R$ de $\mathbf{A}_R$ et $r_R \in \mathbf{Q}_{>0}$ tels que :
  (i) $\mathbf{A}^{+}_R/p\mathbf{A}^{+}_R \xrightarrow{\sim} \mathbf{E}^{+}_R$;
  (ii) si $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_{>0}$ sont tels que $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{pr_R}{p-1}$, on a $\mathbf{A}^{+}_R \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}^{+}_R\left\{\frac{p^\alpha}{\pi^\beta}\right\}$;
  (iii) $\mathbf{A}^{+}_R$ est complet pour la topologie faible.
(f) $\mathbf{A}_R$ est stable sous l'action de Γ_R et de φ.

Si S_∞ est une sous-R_∞-algèbre normale de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie étale, on définit $\mathbf{A}_S$ comme l'unique $\mathbf{A}_R$-algèbre finie étale relevant l'extension finie étale $\mathbf{E}_R \subset \mathbf{E}_S$ (*cf.* [2, Definition 7.7]). Remarquons que si S_∞ est la normalisation de $S_N \otimes_{R_N} R_\infty$, ou S_N est une R_N-algèbre finie et normale, alors par unicité, $\mathbf{A}_S = \varphi^N\big(\mathbf{A}_{S_N}\big)$ comme sous-anneaux de $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ où $\mathbf{A}_{S_N}$ est l'anneau obtenu en appliquant la proposition 4.49. D'après [2, Proposition 7.8], $\mathbf{A}_S$ est une sous-$\mathbf{A}_R$-algèbre régulière de $\widetilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}$, complète pour la topologie faible, stable par $\mathrm{Aut}(S_\infty/R)$ et par φ.

Proposition 4.12. *(i)* $\varphi\colon \mathbf{E}_R \to \mathbf{E}_R$ *est libre de rang* p^{d+1}*, de base* $(x_0^{\alpha_0} \cdots x_d^{\alpha_d})_{0 \leq \alpha_i < p}$.
(ii) Pour tout $n \in \mathbf{N}$*, le* $\mathbf{E}_R$*-module* $\varphi^{-n}(\mathbf{E}_R) = \mathbf{E}_R\left[x_0^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, x_d^{\frac{1}{p^n}}\right] \subseteq \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$ *est libre de base*

$$\left(x_0^{\frac{\alpha_0}{p^n}} \cdots x_d^{\frac{\alpha_d}{p^n}}\right)_{0 \leq \alpha_i < p^n}$$

De plus, il existe une constante $c_R \in \mathbf{N}_{>0}$*, qui ne dépend que de* R*, telle que pour tout*

$$z = \sum_{\substack{\underline{\alpha} \in \mathbf{N}^{d+1} \\ 0 \leq \alpha_i < p^n}} z_{\underline{\alpha}} x_0^{\frac{\alpha_0}{p^n}} \cdots x_d^{\frac{\alpha_d}{p^n}} \in \varphi^{-n}(\mathbf{E}_R)$$

avec $z_{\underline{\alpha}} \in \mathbf{E}_R$ *pour* $\underline{\alpha} \in \mathbf{N}^{d+1}$*, on a*

$$v_{\mathbf{E}}(z) - c_R v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) \leq \min_{\underline{\alpha} \in \mathbf{N}^{d+1}} \big(v_{\mathbf{E}}(z_{\underline{\alpha}})\big) \leq v_{\mathbf{E}}(z).$$

(iii) L'anneau $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \varphi^{-n}(\mathbf{E}_R)$ *est dense dans* $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$.

Démonstration. (i) C'est [2, Corollary 4.7 (ii)].

(ii) La première partie résulte de (i). L'inégalité $\min_{\underline{\alpha}\in\mathbf{N}^{d+1}}\big(v_{\mathbf{E}}(z_{\underline{\alpha}})\big)\leq v_{\mathbf{E}}(z)$ étant claire, on va déterminer c_R tel que $v_{\mathbf{E}}(z)-c_R\leq\min_{\underline{\alpha}\in\mathbf{N}^{d+1}}\big(v_{\mathbf{E}}(z_{\underline{\alpha}})\big)$. En appliquant [2, Lemma 4.15] aux extensions $\mathbf{E}^+_{\mathrm{W}(k)}\subset\mathbf{E}^+_V$ et $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}\subset\mathbf{E}^+_R$ on sait qu'il existe $c_{R,1}$ and $c_{R,2}\in\mathbf{N}$, dépendant seulement de R et pas de n, tels que $\overline{\pi}^{c_{R,1}}\varphi^{-n}\big(\mathbf{E}^+_V\big)\subset\mathbf{E}^+_{\mathrm{W}(k)}\Big[x_0^{\frac{1}{p^n}}\Big]$ et

$$\overline{\pi}^{c_{R,2}}\varphi^{-n}\big(\mathbf{E}^+_R\big)\subset\varphi^{-n}\big(\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}\big)\otimes_{\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}}\mathbf{E}^+_R=\varphi^{-n}\big(\mathbf{E}^+_V\big)\otimes_{\mathbf{E}^+_V}\mathbf{E}^+_R\Big[x_1^{\frac{1}{p^n}},\dots,x_d^{\frac{1}{p^n}}\Big].$$

Posons $c_R=c_{R,1}+c_{R,2}+1$. On a alors $\overline{\pi}^{c_R-1}\varphi^{-n}\big(\mathbf{E}^+_R\big)\subset\mathbf{E}^+_R\Big[x_0^{\frac{1}{p^n}},\dots,x_d^{\frac{1}{p^n}}\Big]$. Soit h l'entier tel que $(-h+1)v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})\geq v_{\mathbf{E}}(z)\geq -hv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$. En particulier, $\overline{\pi}^hz\in\mathbf{E}^+_R$ et alors $v_{\mathbf{E}}\left(\overline{\pi}^{h+c_R-1}z_{\underline{\alpha}}\right)\geq 0$ pour chaque $\underline{\alpha}\in\mathbf{N}^{d+1}$. Donc, $\min_{\underline{\alpha}\in\mathbf{N}^{d+1}}\big(v_{\mathbf{E}}(z_{\underline{\alpha}})\big)\geq-(h+c_R-1)v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})\geq v_{\mathbf{E}}(z)-c_Rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$.

L'assertion (iii) résulte de [2, Cor. 5.4].

□

Corollaire 4.13. *(i) $\varphi\colon\mathbf{A}_R\to\mathbf{A}_R$ est libre de rang p^{d+1}, de base $([x_0]^{\alpha_0}\cdots[x_d]^{\alpha_d})_{0\leq\alpha_i<p}$.*

(ii) Pour tout $n\in\mathbf{N}$, le $\mathbf{A}_R$-module $\varphi^{-n}(\mathbf{A}_R)=\mathbf{A}_R\Big[[x_0]^{\frac{1}{p^n}},\dots,[x_d]^{\frac{1}{p^n}}\Big]\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_R$ est libre de base

$$\Big([x_0]^{\frac{\alpha_0}{p^n}}\cdots[x_d]^{\frac{\alpha_d}{p^n}}\Big)_{0\leq\alpha_i<p^n}$$

(iii) L'anneau $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\mathbf{A}_R\Big[[x_0]^{\frac{1}{p^n}},\dots,[x_d]^{\frac{1}{p^n}}]\Big]$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ pour la topologie faible.

Démonstration. L'assertion (i) résulte de la proposition 4.12 (i) et du fait que $\mathbf{A}_R$ est séparé et complet pour la topologie p-adique. Comme précédemment, on en déduit (ii). L'assertion (iii) se vérifie modulo p^n pour $n\in\mathbf{N}_{>0}$. Comme la topologie induite sur $\widetilde{\mathbf{A}}_R/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_R\simeq\Big(\widetilde{\mathbf{A}}_R/p\widetilde{\mathbf{A}}_R\Big)^n$ est la topologie produit, il suffit de regarder le cas $n=1$. Mais $\mathbf{A}_R/p\mathbf{A}_R=\mathbf{E}_R$ et $\widetilde{\mathbf{A}}_R/p\widetilde{\mathbf{A}}_R=\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$, et c'est précisément l'énoncé proposition 4.12 (iii). □

Pour $i\in\{0,\dots,d\}$ et $n\in\mathbf{N}$ on pose

$$\mathbf{A}^{(i)}_R(n)=\mathbf{A}_R\Big[\big[x_0\big]^{\frac{1}{p^n}},\dots,\big[x_{i-1}\big]^{\frac{1}{p^n}},\big[x_{i+1}\big]^{\frac{1}{p^n}},\dots,\big[x_d\big]^{\frac{1}{p^n}}\Big]\quad\text{et}\quad\mathbf{E}^{(i)}_R(n)=\mathbf{E}_R\Big[x_0^{\frac{1}{p^n}},\dots,x_{i-1}^{\frac{1}{p^n}},x_{i+1}^{\frac{1}{p^n}},\dots,x_d^{\frac{1}{p^n}}\Big]$$

Notons que les $\mathbf{A}^{(i)}_R(n)$ sont des sous-anneaux de $\widetilde{\mathbf{A}}_R=\widetilde{\mathbf{A}}^{\mathcal{H}_R}$. Pour $i\in\{0,\dots,d\}$, on pose $\mathbf{A}^{(i)}_R(\infty):=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\mathbf{A}^{(i)}_R(n)$ et $\mathbf{E}^{(i)}_R(\infty):=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\mathbf{E}^{(i)}_R(n)$.

4.14. **Traces normalisées de Tate généralisées.**

En utilisant 4.13 (ii) on définit l'application $\mathbf{A}_R$-linéaire

$$\tau^{(i)}_m=\tau^{(i)}_{R,m}\colon\bigcup_{n\geq m}\varphi^{-n}(\mathbf{A}_R)\longrightarrow\widetilde{\mathbf{A}}_R$$

$$a=\sum_{\substack{\underline{\alpha}\in\mathbf{N}^{d+1}\\0\leq\alpha_k<p^n}}a_{\underline{\alpha}}\prod_{k=0}^d[x_k]^{\frac{\alpha_k}{p^n}}\longmapsto\sum_{p^{n-m}|\alpha_i}a_{\underline{\alpha}}\prod_{k=0}^d[x_k]^{\frac{\alpha_k}{p^n}}$$

où pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a $a_{\underline{\alpha}}\in\mathbf{A}_R$.

Si $b\in\mathbf{N}$, on note $\widetilde{\mathbf{A}}^+_R\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ l'adhérence de $\widetilde{\mathbf{A}}^+_R\left[\frac{p}{\pi^b}\right]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ pour la topologie faible (*cf.* section 4.45). Rappelons (lemme 4.46) que pour tout $n\in\mathbf{N}_{>0}$, on a

$$\widetilde{\mathbf{A}}^+_R/p^n\widetilde{\mathbf{A}}^+_R\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}^+_R\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\Big/\left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n\widetilde{\mathbf{A}}^+_R\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_R/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_R$$

si bien que la topologie induite par la topologie p-adique de $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ sur $\widetilde{\mathbf{A}}^+_R\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ est la toplogie $\frac{p}{\pi^b}$-adique.

Proposition 4.15. *L'application $\tau^{(i)}_m$ induit un projecteur $\overline{\mathbf{A}^{(i)}_R(\infty)}\Big[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\Big]$-linéaire continu,*

$$\tau^{(i)}_m=\tau^{(i)}_{R,m}\colon\widetilde{\mathbf{A}}_R\longrightarrow\overline{\mathbf{A}^{(i)}_R(\infty)}\Big[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\Big],\tag{3}$$

où $\overline{\mathbf{A}^{(i)}_R(\infty)}$ désigne l'adhérence de $\mathbf{A}^{(i)}_R(\infty)$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ pour la topologie faible. On a les propriétés suivantes :

(i) $\tau^{(i)}_m$ commute avec l'action de $\mathrm{Aut}\big(R_\infty/\widetilde{R}\big)$ et, en particulier, avec l'action de Γ_R ;

(ii) pour chaque $n\in\mathbf{Z}$ tel que $m+n\geq 0$ on a $\varphi^n\circ\tau^{(i)}_{m+n}=\tau^{(i)}_m\circ\varphi^n$;

(iii) pour chaque n et $m \in \mathbf{N}$ et i et $j \in \{0, \ldots, d\}$ on a $\tau_m^{(i)} \circ \tau_n^{(j)} = \tau_n^{(j)} \circ \tau_m^{(i)}$;

(iv) si S_∞ est une sous-R_∞-algèbre de $\overline{R}$ normale telle que $S_\infty[p^{-1}]$ est finie et étale comme $R_\infty[p^{-1}]$-algèbre, alors la restriction de $\tau_{S,m}^{(i)}$ à $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ coïncide avec $\tau_{R,m}^{(i)}$;

(v) si $b \in \mathbf{N}$ est tel que $\mathbf{A}_R^+ \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ (cf. proposition 4.49), on a

$$\tau_m^{(i)}\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\right) \subseteq \frac{1}{\pi^{c_R}}\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^{b+c_R}}\right\}.$$

Démonstration. D'après le corollaire 4.13 (ii), si $n \geq m$, le $\mathbf{A}_R^{(i)}(n)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$-module $\varphi^{-n}(\mathbf{A}_R) = \mathbf{A}_R\left[[x_0]^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, [x_d]^{\frac{1}{p^n}}\right]$ est libre de de rang p^{n-m}, de base $\left([x_i]^{\frac{j}{p^n}}\right)_{0\leq j<p^{n-m}}$. On en déduit que si $a = \sum_{j=0}^{p^{n-m}-1} a_j[x_i]^{\frac{j}{p^n}} \in \varphi^{-n}(\mathbf{A}_R)$, où pour tout $j \in \{0, \ldots, p^{n-m}-1\}$, on a $a_j \in \mathbf{A}_R^{(i)}(n)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$, alors $\tau_m^{(i)}(a) = a_0$ et $\tau_m^{(i)}$ est un projecteur $\mathbf{A}_R^{(i)}(n)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$-linéaire qui satisfait les propriétés (i)–(iv). En particulier, on obtient un projecteur $\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$-linéaire

$$\tau_m^{(i)} \colon \bigcup_{n\geq m} \varphi^{-n}(\mathbf{A}_R) \longrightarrow \mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right].$$

Dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+$, on a $\pi = [\overline{\pi}] + p\alpha$ avec $\alpha \in \widetilde{\mathbf{A}}_R^+$: si $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on a donc $\pi^{p^n} = [\overline{\pi}]^{p^n}$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_R^+$. La topologie faible sur $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+$ coïncide donc avec la topologie définie par la famille d'idéaux $\left\{(p^n, \pi^k)\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\right\}_{n,k\in\mathbf{N}}$. D'après le lemme 4.46, si $b \in \mathbf{N}_{>0}$, la topologie faible sur $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ coïncide donc avec la topologie définie par la famille d'idéaux $\left\{I_{n,k} = \left(\left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n, \pi^k\right)\right\}_{n,k\in\mathbf{N}}$.

Posons $A_{R,b} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_R^+\left[[x_0]^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, [x_d]^{\frac{1}{p^n}}\right]\left[\frac{p}{\pi^b}\right]$ (*cf.* proposition 4.49). Supposons $b \in \mathbf{N}_{>0}$ tel que $\mathbf{A}_R^+ \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$. On a alors $A_{R,b} \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$. Notons $\widetilde{A}_{R,b}$ l'adhérence de $A_{R,b}$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ pour la topologie définie par la famille $\{I_{n,k}\}_{n,k\in\mathbf{N}}$: en particulier, $\widetilde{A}_{R,b}$ est complet pour la topologie faible et on a $\widetilde{A}_{R,b} \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$. D'après la proposition 4.12, on a $\overline{\pi}^{c_R}\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+ \subseteq \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_R^+\left[x_0^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, x_d^{\frac{1}{p^n}}\right]}$ (où la barre désigne le complété pour la topologie $\overline{\pi}$-adique). On a donc l'inclusion

$$\pi^{c_R}\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} \subseteq \widetilde{A}_{R,b} + \frac{p}{\pi^b}\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$$

(rappelons que $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} \Big/ \frac{p}{\pi^b}\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+$ et $\mathbf{A}_R^+/p\mathbf{A}_R^+ \xrightarrow{\sim} \mathbf{E}_R^+$). On a donc $\pi^{c_R}\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} \subseteq \widetilde{A}_{R,b} + \frac{p}{\pi^{b+c_R}}\pi^{c_R}\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ et donc $\pi^{c_R}\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} \subseteq \widetilde{A}_{R,b+c_R} + \left(\frac{p}{\pi^{b+c_R}}\right)^N\pi^{c_R}\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ pour tout $N \in \mathbf{N}_{>0}$. Ainsi, on a

$$\pi^{c_R}\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} \subseteq \bigcap_{N=1}^{\infty}\left(\widetilde{A}_{R,b+c_R} + \left(\frac{p}{\pi^{b+c_R}}\right)^N\pi^{c_R}\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\right)$$

dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^{b+c_R}}\right\}$, *i.e.* $\pi^{c_R}\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ est inclus dans l'adhérence de $\widetilde{A}_{R,b+c_R}$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^{b+c_R}}\right\}$ pour la topologie $\frac{p}{\pi^{b+c_R}}$-adique, qui n'est autre que $\widetilde{A}_{R,b+c_R}$ lui-même (vu qu'il est complet pour la topologie définie par les idéaux $\left\{\left(\left(\frac{p}{\pi^{b+c_R}}\right)^n, \pi^k\right)\right\}_{n,k\in\mathbf{N}}$). On a donc

$$\widetilde{A}_{R,b} \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} \subseteq \frac{1}{\pi^{c_R}}\widetilde{A}_{R,b+c_R}. \tag{4}$$

Mais $\tau_m^{(i)}$ est continu sur $A_{R,b}$ muni de la topologie définie par la famille $\{I_{n,k}\}_{n,k\in\mathbf{N}}$, car $\tau_m^{(i)}(I_{n,k}) \subseteq I_{n,k}$ (*cf.* définition de $A_{R,b}$) : il se prolonge donc en une application sur $\widetilde{A}_{R,b}$ (à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R$) continue pour la topologie définie par la famille $\{I_{n,k}\}_{n,k\in\mathbf{N}}$, donc *a fortiori* pour la topologie faible. Comme $c_R > 0$, il en est de même sur $\widetilde{A}_{R,b+c_R}$, et donc sur $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+[\pi^{-1}] \subseteq \widetilde{A}_{R,b+c_R}[\pi^{-1}]$. Comme $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+[\pi^{-1}]$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ pour la topologie faible, $\tau_m^{(i)}$ se prolonge en un endomorphisme de $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ continu pour la topologie faible.

Comme la restriction de $\tau_m^{(i)}$ à $\bigcup_{n\geq m}\varphi^{-n}(\mathbf{A}_R)$ est à valeurs dans $\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$ et est $\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$-linéaire, l'endomorphisme $\tau_m^{(i)}$ est à valeurs dans $\overline{\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$ et est $\overline{\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$-linéaire par continuité.

Enfin, on a $\tau_m^{(i)}(A_{R,b}) \subseteq A_{R,b}$ et donc $\tau_m^{(i)}\left(\widetilde{A}_{R,b}\right) \subseteq \widetilde{A}_{R,b}$ par continuité, les inclusions (4) impliquent alors

$$\tau_m^{(i)}\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\right) \subseteq \frac{1}{\pi^{c_R}}\widetilde{A}_{R,b+c_R} \subseteq \frac{1}{\pi^{c_R}}\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^{b+c_R}}\right\}$$

ce qu'on voulait. □

Lemme 4.16. *(cf. [11, Lemme 8.9]) Si $\overline{z} \in \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$ est tel que $v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) \geq -\frac{kp}{p-1}$, alors on a une écriture (unique) dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R$*

$$[\overline{z}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{\pi^{k+\lceil \frac{(p-1)n}{p} \rceil}} [\overline{y}_n]$$

où $\overline{y}_n \in \widetilde{\mathbf{E}}^+_{R_\infty}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Démonstration. Si $a = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[\overline{a}_n] \in \widetilde{\mathbf{A}}_R$ et $N \in \mathbf{N}$, on a $w_1\left(\frac{[\overline{\pi}]^N}{p}(a - [\overline{a}_0])\right) = \inf_{n\geq 0} (N v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) + v_{\mathbf{E}}(\overline{a}_{n+1}) + n) \geq N v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - 1 + w_1(a)$.
Construisons les $\overline{y_n}$ par récurrence. On pose $y_0 = \pi^k[\overline{z}]$, d'où $\overline{y}_0 = \overline{\pi}^k \overline{z}$ et si $y_0, \ldots, y_n \in \widetilde{\mathbf{A}}_R$ sont construits, on pose

$$y_{n+1} = \frac{\pi^{\lceil \frac{(p-1)(n+1)}{p} \rceil - \lceil \frac{(p-1)n}{p} \rceil}}{p}(y_n - [\overline{y}_n]) = \left(\frac{\pi}{[\overline{\pi}]}\right)^{\lceil \frac{(p-1)(n+1)}{p} \rceil - \lceil \frac{(p-1)n}{p} \rceil} \frac{[\overline{\pi}]^{\lceil \frac{(p-1)(n+1)}{p} \rceil - \lceil \frac{(p-1)n}{p} \rceil}}{p}(y_n - [\overline{y}_n])$$

(où $\overline{y_n}$ désigne l'image de y_n modulo p). Comme $w_1(\pi) \geq w_1([\overline{\pi}])$ (proposition 4.3 (d)), on a $w_1(y_{n+1}) \geq v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})\left(\left\lceil \frac{(p-1)(n+1)}{p} \right\rceil - \left\lceil \frac{(p-1)n}{p} \right\rceil\right) - 1 + w_1(y_n)$ d'après ce qui a été dit au début de la preuve. Une récurrence immédiate montre donc que $w_1(y_n) \geq \left\lceil \frac{(p-1)n}{p} \right\rceil v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - n + w_1(y_0) = \left\lceil \frac{(p-1)n}{p} \right\rceil \frac{p}{p-1} - n + \frac{kp}{p-1} + v_{\mathbf{E}}(\overline{z})$ (proposition 4.3 (d)). Comme $v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) \geq -\frac{kp}{p-1}$ par hypothèse, on a $w_1(y_n) \geq 0$ et donc $\overline{y}_n \in \widetilde{\mathbf{E}}^+_{R_\infty}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. □

Lemme 4.17. *Soit $\overline{z} \in \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$.*
(a) On a $v_{\mathbf{E}}\left(\tau_m^{(i)}(\overline{z})\right) \geq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) - \frac{(c_R+1)p}{p-1}$.
(b) Soit $r'_R = \frac{(p-1)r_R}{p-1+p(c_R+1)r_R} < 1$ (cf. proposition 4.49). Pour tout $r \in \mathbf{Q}_{>0}$ tel que $r < r'_R$, si on pose $c_2 = \frac{rp(c_R+2)}{p-1}$, on a

$$w_r\left(\tau_m^{(i)}([\overline{z}])\right) \geq w_r([\overline{z}]) - c_2.$$

Démonstration. On peut supposer $z \neq 0$. Soit $k \in \mathbf{Z}$ le plus petit entier tel que $v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) \geq -\frac{kp}{p-1}$. En particulier, on a $v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) \leq -\frac{(k-1)p}{p-1}$, soit $-\frac{(k+1)p}{p-1} \geq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) - \frac{2p}{p-1}$.

(a) D'après la proposition 4.15, on a $v_{\mathbf{E}}\left(\tau_m^{(i)}\left(\frac{\overline{z}}{\overline{\pi}^k}\right)\right) \geq -c_R v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) = -\frac{pc_R}{p-1}$, donc $v_{\mathbf{E}}\big(\tau_m^{(i)}(\overline{z})\big) \geq -\frac{(c_R+k)p}{p-1} = -\frac{(k-1)p}{p-1} - \frac{(c_R+1)p}{p-1} \geq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) - \frac{(c_R+1)p}{p-1}$.

(b) D'après le lemme 4.16, on peut écrire $[\overline{z}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{\pi^{k+\lceil \frac{(p-1)n}{p} \rceil}}[\overline{y}_n]$ avec $\overline{y}_n \in \widetilde{\mathbf{E}}^+_{R_\infty}$ (somme convergente pour la topologie faible). On a donc $\tau_m^{(i)}([\overline{z}]) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{\pi^{k+\lceil \frac{(p-1)n}{p} \rceil}} \tau_m^{(i)}([\overline{y}_n])$ (d'après la proposition 4.15, l'application $\tau_m^{(i)}$ est continue pour la topologie faible), d'où $w_r\left(\tau_m^{(i)}([\overline{z}])\right) \geq \inf_{n\in\mathbf{N}}\left[w_r\left(\frac{p^n}{\pi^{k+\lceil \frac{(p-1)n}{p} \rceil}}\right) + w_r\left(\tau_m^{(i)}([\overline{y}_n])\right)\right]$.

D'après la proposition 4.15, si $b = \left\lceil \frac{p-1}{pr_R} \right\rceil$, on a $\tau_m^{(i)}\left(\widetilde{\mathbf{A}}^+_R\right) \subseteq \frac{1}{\pi^{c_R}} \widetilde{\mathbf{A}}^+_R\left\{\frac{p}{\pi^{b+c_R}}\right\}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\overline{y}_n \in \widetilde{\mathbf{E}}^+_{R_\infty}$ d'où $[\overline{y}_n] \in \widetilde{\mathbf{A}}^+_R$: on a $\tau_m^{(i)}([\overline{y}_n]) \in \frac{1}{\pi^{c_R}} \widetilde{\mathbf{A}}^+_R\left\{\frac{p}{\pi^{b+c_R}}\right\}$. Comme $r < 1$, on a $w_r(\pi) = \frac{pr}{p-1}$ (proposition 4.3 (d)), donc $w_r\left(\frac{p}{\pi^{b+c_R}}\right) = 1 - \frac{rp(b+c_R)}{p-1} > 1 - \frac{rp}{p-1}\left(\frac{p-1}{pr_R} + c_R + 1\right) > 0$: on a $w_r(x) \geq 0$ pour tout $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^+_R\left\{\frac{p}{\pi^{b+c_R}}\right\}$. Ainsi, on a $w_r\left(\tau_m^{(i)}([\overline{y}_n])\right) \geq -rc_R w_r(\pi) = -\frac{rpc_R}{p-1}$. Par ailleurs, on a $w_r\left(\frac{p^n}{\pi^{k+\lceil \frac{(p-1)n}{p} \rceil}}\right) = n - \left(k + \left\lceil \frac{(p-1)n}{p} \right\rceil\right) w_r(\pi)$, d'où

$$w_r\left(\tau_m^{(i)}([\overline{z}])\right) \geq n - \left(k + \frac{(p-1)n}{p} + 1\right)\frac{rp}{p-1} - \frac{rpc_R}{p-1} = (1-r)n - \frac{rp(k+c_R+1)}{p-1}.$$

Puisque $v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) \leq -\frac{(k-1)p}{p-1}$ soit $-\frac{(k+1)p}{p-1} \geq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) - \frac{2p}{p-1}$, on a donc $w_r\left(\tau_m^{(i)}([\overline{z}])\right) \geq rv_{\mathbf{E}}(\overline{z}) - \frac{rp(c_R+2)}{p-1}$ *i.e.* $w_r\left(\tau_m^{(i)}([\overline{z}])\right) \geq w_r([\overline{z}]) - c_2$. □

Proposition 4.18. *Si $r < r'_R$ (cf. lemme 4.17) et $z \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_R$, alors $\tau_m^{(i)}(z) \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_R$ et $w_r\left(\tau_m^{(i)}(z)\right) \geq w_r(z) - c_2$.*

Démonstration. Écrivons $z = \sum_{k=0}^{\infty} p^k[\overline{z}_k]$ avec $\overline{z}_k \in \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et $\lim_{k\to\infty} w_r\left(p^k[z_k]\right) = +\infty$. La série converge pour la topologie définie par w_r donc *a fortiori* pour la topologie faible : on a $\tau_m^{(i)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k \tau_m^{(i)}([\overline{z}_k])$. Comme on a $w_r\left(\tau_m^{(i)}([\overline{z}_k])\right) \geq w_r([\overline{z}_k]) - c_2$ d'après le lemme 4.17, on a $\lim_{k\to\infty} w_r\left(p^k \tau_m^{(i)}([z_k])\right) = +\infty$, d'où

$\tau_m^{(i)}(z) \in \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$.
De plus, comme pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $w_r\left(\tau_m^{(i)}([\overline{z}_k])\right) \geq w_r([\overline{z}_k]) - c_2 \geq w_r(z) - c_2$, on a $w_r\left(\tau_m^{(i)}(z)\right) \geq \inf_{k\in\mathbf{N}}\left(w_r\left(\tau_m^{(i)}([\overline{z}_k])\right)\right) \geq w_r(z) - c_2$. □

4.19. **Vérification de la propriété (TS2).**

On va construire les anneaux $\Lambda_m^{(i)}$. On note $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right)_{\geq 0} = \left\{z \in \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]},\ w_r(z) \geq 0\right\}$ l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$. Comme $w_r([\overline{\pi}]) = \frac{pr}{p-1} > 0$ (proposition 4.3 (d)), on a $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]} = \left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right)_{\geq 0}\left[[\overline{\pi}]^{-1}\right]$.

Lemme 4.20. *Si $r = \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}_{>0}$, l'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{+}\left[\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}}\right]$ est inclus dans $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$ (rappelons que $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{+} = \mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^{+}\right)$). De plus, si $\mathcal{A}_{R,(a,b)}$ désigne son adhérence pour la topologie définie par w_r, ou pour la topologie p-adique, cela revient au même, on a*

$$\mathcal{A}_{R,(a,b)} \subseteq \left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right)_{\geq 0} \subseteq \frac{1}{[\overline{\pi}]^{\left\lceil\frac{a-1}{r}\right\rceil}}\mathcal{A}_{R,(a,b)}$$

(où, pour $\alpha \in \mathbf{R}$, $\lceil\alpha\rceil$ désigne le plus petit entier $\geq \alpha$).

Démonstration. L'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ étant complet pour la topologie définie par w_r (proposition 4.3 (c)) et $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$ fermé pour cette dernière par définition, $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$ est complet pour la topologie définie par w_r.

Supposons maintenant $r = \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}_{>0}$. Comme $w_r\left(\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}}\right) = 0$ (proposition 4.3 (d)), $\mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^{+}\right)\left[\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}}\right]$ est un sous-anneau de $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$. Définissons $\mathcal{A}_{R,(a,b)}$ comme étant l'adhérence de $\mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^{+}\right)\left[\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}}\right]$ dans $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$ pour la topologie définie par w_r : on a l'inclusion $\mathcal{A}_{R,(a,b)} \subseteq \left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$.
Pour tout $k \in \mathbf{N}$, écrivons $k = aq_k + s_k$ avec $q_k \in \mathbf{N}$ et $0 \leq s_k < a$ la division euclidienne de k par a. Tout élément $z \in \widetilde{\mathbf{A}}_R$ peut alors s'écrire de façon unique comme une somme

$$\sum_{k=0}^{\infty}[z_k]\left(\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}}\right)^{q_k} p^{s_k} \tag{5}$$

avec $z_k \in \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$. Comme $w_r\left(\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}}\right) = 0$ d'après la proposition 4.3 (d), on a $z \in \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ si et seulement si $\lim_{k\to\infty} rv_{\mathbf{E}}(z_k) + s_k = +\infty$ *i.e.* si et seulement si $\lim_{k\to\infty} v_{\mathbf{E}}(z_k) = +\infty$ (c'est-à-dire lorsque la série (5) converge pour w_r). En outre, $z \in \left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$ si et seulement si on a de plus $rv_{\mathbf{E}}(z_k) + s_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.
Soit $z \in \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$. On a $[\overline{\pi}]^{\left\lceil\frac{a-1}{r}\right\rceil}z = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\overline{\pi}^{\left\lceil\frac{a-1}{r}\right\rceil}z_k\right]\left(\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}}\right)^{q_k} p^{s_k} \in \mathcal{A}_{R,(a,b)}$ car $v_{\mathbf{E}}\left(\overline{\pi}^{\left\lceil\frac{a-1}{r}\right\rceil}z_k\right) \geq \frac{a-1}{r}v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) + v_{\mathbf{E}}(z_k) \geq \frac{1}{r}\left((a-1)\frac{p}{p-1} - s_k\right) \geq \frac{a-1}{(p-1)r} \geq 0$, d'où la deuxième inclusion.
Reste à montrer que $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{+}\left[\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}}\right]$ est dense dans $\mathcal{A}_{R,(a,b)}$ pour la topologie p-adique. Soit $z \in \left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right)_{\geq 0}$. Écrivons-le comme la somme d'une série (5). Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $v_{\mathbf{E}}(z_k) \geq 0$. Posons alors

$$n_k = \min\left(q_k, \left\lfloor\frac{v_{\mathbf{E}}(z_k)}{b}\right\rfloor\right) \in \mathbf{N}$$

(où $\lfloor\,\rfloor$ désigne la partie entière) : d'après ce qui précède, on a $n_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et $\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$. On peut écrire

$$z = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\overline{\pi}^{-\left(\frac{p-1}{p}\right)bn_k}z_k\right]\left(\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}}\right)^{q_k-n_k} p^{s_k+an_k}. \tag{6}$$

Comme $n_k \leq \frac{v_{\mathbf{E}}(z_k)}{b}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $\overline{\pi}^{-\left(\frac{p-1}{p}\right)bn_k}z_k \in \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^{+}$: la série (6) a tous ses termes dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{+}\left[\frac{p^a}{[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}}\right]$ et converge pour la topologie p-adique. □

Remarque 4.21. L'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+ = \mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+\right)$ est un relèvement en caractéristique 0 de $\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+ = \left(\mathbf{E}_R^+\right)^{\mathrm{perf}}$. Posons $Y = \operatorname{Spec} \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+$, $X = \operatorname{Spec} \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty} = Y \setminus \mathrm{V}(\overline{\pi})$ et $\mathcal{P} = \operatorname{Spf} \mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+\right)$. On a alors une situation analogue à celle envisagée par Berthelot dans [3, 1.2]

$$X \xhookrightarrow{j} Y \xhookrightarrow{i} \mathcal{P}$$

où j est une immersion ouverte et i une immersion fermée (remarquons toutefois que nos anneaux n'ont pas les propriétés de finitude requises dans *loc. cit.*). Si $r = \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}_{>0}$, notons $\mathcal{B}_{(a,b)} = \widehat{\mathrm{Bl}}_{\left(p^a, [\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}\right)} \mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+\right)$ le schéma formel éclaté de $\mathcal{P}$ en l'idéal $I_{(a,b)} = \left(p^a, [\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}\right)$. Sur ce dernier, l'image inverse de $I_{(a,b)}$ est inversible. Alors $\operatorname{Spf} \mathcal{A}_{R,(a,b)} = \mathcal{U}_{(a,b)} \subseteq \mathcal{B}_{(a,b)}$ est l'ouvert formel où elle est engendrée par $[\overline{\pi}]^{\left(\frac{p-1}{p}\right)b}$ (notons que d'après [3, 1.1.8], ce dernier est indépendant du choix d'un relèvement de $\overline{\pi}$ si $r < \frac{p-1}{p}$). C'est ce genre d'idée qu'ont utilisé Abbes et Saito pour définir la filtration de ramification pour les corps locaux à corps résiduel imparfait (cf. [1]), le rationnel $\frac{a}{b}$ mesurant la ramification de $\mathbf{E}_{\widetilde{R}}^+ \subseteq \mathbf{E}_R^+$ le long du diviseur défini par $\overline{\pi}$.

On pose

$$\Lambda_m^{(i)} = \Lambda_{R,m}^{(i)} = \text{adhérence de } \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]} \cap \left(\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right) \text{ dans } \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]} \text{pour la topologie définie par } w_r$$

où l'intersection $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]} \cap \left(\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$ est prise dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R$. On munit $\Lambda_m^{(i)}$ de la topologie induite par w_r.

Corollaire 4.22. *Si $r < r'_R$ (cf. lemme 4.17), le sous-anneau $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{A}_R^+\left[[x_0]^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, [x_d]^{\frac{1}{p^n}}\right]\left[\pi^{-1}\right]$ de $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ est contenu dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ et est dense pour la topologie définie par w_r. En particulier, le sous-anneau $\bigcup\limits_{m\in\mathbf{N}} \Lambda_m^{(i)}$ de $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ est dense lui aussi.*

Démonstration. Soit $b = \left\lceil \frac{p-1}{pr_R} \right\rceil$ (*cf.* proposition 4.49), $A_{R,b+c_R} = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{A}_R^+\left[[x_0]^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, [x_d]^{\frac{1}{p^n}}\right]\left[\frac{p}{\pi^{b+c_R}}\right]$ et $\widetilde{A}_{R,b+c_R}$ l'adhérence de $A_{R,b+c_R}$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ pour la topologie définie par la famille d'idéaux $\{I_{n,k} = (\left(\frac{p}{\pi^{b+c_R}}\right)^n, \pi^k)\}_{n,k\in\mathbf{N}}$ (*cf.* preuve de la proposition 4.15). Si $r < r'_R$, on a $w_r\left(\frac{p}{\pi^{b+c_R}}\right) = 1 - \frac{rp(b+c_R)}{p-1} > 1 - \frac{r}{r'_R} > 0$, donc $\widetilde{A}_{R,b+c_R} \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$.

Par ailleurs, d'après le lemme 4.20, on sait que $\mathcal{A}_{R,(a,b)}\left[[\overline{\pi}]^{-1}\right]$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ pour la topologie définie par w_r. Comme $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left[[\overline{\pi}]^{-1}\right]$ est dense dans $\mathcal{A}_{R,(a,b)}\left[[\overline{\pi}]^{-1}\right]$ pour la topologie définie par w_r, il l'est aussi dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$. L'inclusion (4) implique donc que $\widetilde{A}_{R,b+c_R}\left[[\overline{\pi}]^{-1}\right]$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ pour la topologie définie par w_r. Mais on a $[\overline{\pi}] = \pi + pa$ avec $a \in \widetilde{\mathbf{A}}_R^+$, d'où $[\overline{\pi}] = \pi\left(1 + \frac{p}{\pi}a\right) \in \left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\right)^\times$ (car $b \geq 1$) *i.e.* $[\overline{\pi}] = u\pi$ avec u inversible dans $\widetilde{A}_{R,b+c_R}$ (*cf.* inclusion (4)). Ainsi, $\widetilde{A}_{R,b+c_R}\left[[\overline{\pi}]^{-1}\right] = \widetilde{A}_{R,b+c_R}\left[\pi^{-1}\right]$, et $\widetilde{A}_{R,b+c_R}\left[\pi^{-1}\right]$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ pour la topologie définie par w_r.

Comme $w_r\left(\frac{p}{\pi^{b+c_R}}\right) > 0$ et $w_r(\pi) > 0$, la topologie définie par la famille d'idéaux $\{I_{n,k}\}_{n,k\in\mathbf{N}}$ est plus fine que la topologie définie par w_r : l'anneau $A_{R,b+c_R}\left[\pi^{-1}\right]$ est dense dans $\widetilde{A}_{R,b+c_R}\left[\pi^{-1}\right]$ donc dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ pour la topologie définie par w_r. Mais $A_{R,b+c_R}\left[\pi^{-1}\right] = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{A}_R^+\left[[x_0]^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, [x_d]^{\frac{1}{p^n}}\right]\left[\pi^{-1}\right]$ est inclus dans $\bigcup\limits_{m\in\mathbf{N}} \Lambda_m^{(i)}$. Ce dernier est donc dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ pour la topologie définie par w_r.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left[[\overline{\pi}]^{-1}\right] \arrow[r, hook] & \widetilde{A}_{R,b+c_R}\left[[\overline{\pi}]^{-1}\right] \arrow[r, equal] & \widetilde{A}_{R,b+c_R}\left[\pi^{-1}\right] \arrow[r, hook] & \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]} \\
 & & A_{R,b+c_R}\left[\pi^{-1}\right] \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \bigcup\limits_{m\in\mathbf{N}} \Lambda_m^{(i)} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

□

Proposition 4.23. *Si $r < r'_R$, la restriction de $\tau_m^{(i)}$ à $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ est un projecteur $\Lambda_m^{(i)}$-linéaire continu $\tau_m^{(i)} : \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]} \to \Lambda_m^{(i)}$.*

Démonstration. Par construction, on a $\tau_m^{(i)}\left(\bigcup\limits_{n\geq m} \varphi^{-n}\left(\mathbf{A}_R\right)\right) \subseteq \mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^n}}\right]$. Par ailleurs, on a $\tau_m^{(i)}\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right) \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ d'après la proposition 4.18. Donc $\tau_m^{(i)}\left(\Lambda_n^{(i)}\right) \subseteq \Lambda_m^{(i)}$ pour chaque $n \geq m$. L'anneau $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \Lambda_n^{(i)}$ étant dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ pour la topologie définie par w_r (corollaire 4.22) et $\Lambda_m^{(i)}$ complet pour cette dernière, on a $\tau_m^{(i)}\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right) \subseteq$

$\Lambda_m^{(i)}$. Par ailleurs, $\tau_m^{(i)}$ est $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\cap\Big(\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\Big)$-linéaire et induit l'identité sur $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\cap\Big(\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\Big)$: par continuité, $\tau_m^{(i)}$ est $\Lambda_m^{(i)}$-linéaire et induit l'identité sur $\Lambda_m^{(i)}$. □

Proposition 4.24. *Si $r<r'_R$, la famille $\Big(\Lambda_m^{(i)},\tau_m^{(i)}\Big)_{\substack{0\leq i\leq d\\ m\in\mathbf{N}}}$ vérifie la condition (TS2).*

Démonstration. La propriété (TS2)(a) n'est autre que la proposition 4.23. La première partie de la propriété (TS2)(b) résulte de la propriété 4.18 et la seconde du fait que $\tau_m^{(i)}$ induit l'identité sur $\Lambda_m^{(i)}$ et que $\bigcup\limits_{m\in\mathbf{N}}\Lambda_m^{(i)}$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ pour la topologie définie par w_r (corollaire 4.22). Enfin, la propriété (TS2)(c) est vraie sur $\widetilde{\mathbf{A}}_R$, ce qui, par continuité, se vérifie sur $\bigcup\limits_{n\geq m}\varphi^{-n}(\mathbf{A}_R)$. Le fait que les applications $\tau_m^{(i)}$ commutent entre elles est alors évident, ainsi que le fait que pour $i\neq 0$, elles commutent à l'action de Γ_R. Pour $i=0$, il est aussi clair que $\tau_m^{(0)}$ commute à $\widetilde{\Gamma}_R$. Si $g\in\Gamma_V$ et $a=\sum\limits_{j=0}^{p^{n-m}-1}a_j[x_0]^{\frac{j}{p^n}}\in\varphi^{-n}(\mathbf{A}_R)$ avec $a_j\in\mathbf{A}_R^{(i)}(n)\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right]$, on a $g(a)=\sum\limits_{j=0}^{p^{n-m}-1}g(a_j)[x_0]^{\frac{j\chi(g)}{p^n}}$ (rappelons que $\chi\colon\mathcal{G}_R\to\mathbf{Z}_p^\times$ désigne le caractère cyclotomique). Comme $\chi(g)\in\mathbf{Z}_p^\times$, on a $j\chi(g)\equiv 0\mod{}^m\mathbf{Z}_p\Leftrightarrow j\equiv 0\mod p^m\mathbf{Z}_p$: le sous-anneau $\mathbf{A}_R^{(i)}(n)\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right]$ étant stable par Γ_V, on a $\tau_m^{(0)}(g(a))=g(a_0)=g\left(\tau_m^{(0)}(a)\right)$. □

4.25. **Vérification de la propriété (TS3).**

Rappelons (*cf.* lemme 4.17) qu'on a posé $c_2=\frac{(c_R+2)r}{p-1}$.

Proposition 4.26. *(a) Soit $\overline{z}\in\mathbf{E}_R^{(i)}(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^{m+n}}}\right]$. On peut écrire $\overline{z}$ de façon unique comme $\overline{z}=\sum\limits_{j=0}^{p^n-1}\overline{z_j}x_i^{\frac{j}{p^{m+n}}}$, avec $\overline{z_j}\in\mathbf{E}_R^{(i)}(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]$. En plus, $v_{\mathbf{E}}(\overline{z})\leq\min\limits_{0\leq j<p^n}v_{\mathbf{E}}(\overline{z_j})+\frac{p(c_R+1)}{p-1}$.*

(b) Pour $m,n\in\mathbf{N}$ et $r<r'_R$, on a $\Lambda_{m+n}^{(i)}=\bigoplus\limits_{j=0}^{p^n-1}[x_i]^{\frac{j}{p^{m+n}}}\Lambda_m^{(i)}$, et si $z=\sum\limits_{j=0}^{p^n-1}z_j[x_i]^{\frac{j}{p^{m+n}}}$ (avec $z_j\in\Lambda_m^{(i)}$ pour $0\leq j<p^n$), on a

$$w_r(z)\leq\min_{0\leq j<p^n}w_r(z_j)+c_2.$$

Démonstration. Posons

$$\alpha\colon\bigoplus_{j=0}^{p^n-1}\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\longrightarrow\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^{m+n}}}\right]$$
$$(z_j)_{0\leq j<p^n}\longmapsto\sum_{j=0}^{p^n-1}z_j[x_i]^{\frac{j}{p^{m+n}}}$$

et

$$\beta\colon\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^{m+n}}}\right]\longrightarrow\bigoplus_{j=0}^{p^n-1}\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$$
$$z\longmapsto\left(\tau_m^{(i)}\left([x_i]^{\frac{-j}{p^{m+n}}}z\right)\right)_{0\leq j<p^n}$$

D'après le corollaire 4.13 (ii) et la définition de $\tau_m^{(i)}$, les applications α et β sont bijectives, inverses l'une de l'autre. On déduit de 4.17 la partie (a) da la proposition.

(b) Comme $\tau_m^{(i)}\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right)\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ (proposition 4.18), les applications α et β induisent des bijections inverses l'une de l'autre entre $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\cap\left(\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^{m+n}}}\right]\right)$ et $\bigoplus\limits_{j=0}^{p^n-1}\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\cap\left(\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$. Pour $z\in\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\cap\left(\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^{m+n}}}\right]\right)$, on a donc une écriture unique $z=\sum\limits_{j=0}^{p^n-1}z_j[x_i]^{\frac{j}{p^{m+n}}}$ avec $z_j=\tau_m^{(i)}\left([x_i]^{\frac{-j}{p^{m+n}}}z\right)\in\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\cap\left(\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$, et d'après la proposition 4.18, on a $w_r(z_j)\geq w_r(z)-c_2$ (car $r<r'_R$). En particulier, α et β sont continues pour la topologie définie par w_r : ils se prolongent par continuité en des homéomorphismes inverses l'un de l'autre $\alpha\colon\bigoplus\limits_{j=0}^{p^n-1}\Lambda_m^{(i)}\xrightarrow{\sim}\Lambda_{m+n}^{(i)}$ et $\beta\colon\Lambda_{m+n}^{(i)}\xrightarrow{\sim}\bigoplus\limits_{j=0}^{p^n-1}\Lambda_m^{(i)}$. Par ailleurs, on a encore les inégalités $w_r(z_j)\geq w_r(z)-c_2$ pour tout $z=\sum\limits_{j=0}^{p^n-1}z_j[x_i]^{\frac{j}{p^{m+n}}}\in\Lambda_{m+n}^{(i)}$ et $0\leq j<p^n$. □

Lemme 4.27. *Il existe $m_0 = m_R \in \mathbf{N}$ ne dépendant que de R tel que pour tout $m \geq m_0$, $i \in \{0, \ldots, d\}$ et tout $\overline{z} \in \mathbf{E}_R^{(i)}(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]$, on a*

$$v_{\mathbf{E}}\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(\overline{z})\right) \geq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) + \frac{p+1}{2(p-1)}.$$

Démonstration. D'après [2, Thm. 5.1 & 5.11], il existe M et $N = N(R, M) \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geq N$ et tout $s \leq M$, on a un isomorphisme $\mathbf{E}_R^+ \Big/ (\varepsilon-1)^{p^{n-s}}\, \mathbf{E}_R^+ \xrightarrow{\sim} R_n \Big/ \left(\varepsilon^{(s)}-1\right) R_n$. D'après le lemme 3.7, il existe $a \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $m \in \mathbf{N}$ et $i \in \{0, \ldots, d\}$, on a

$$v\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(x)\right) \geq v(x) + \frac{1}{p-1}\left(1-ap^{-m}\right).$$

pour tout $x \in R_{m+1}[p^{-1}]$. Cela implique que $\gamma_i^{p^m}$ agit trivialement sur $R_{m+1} \Big/ \frac{\left(\varepsilon^{(1)}-1\right)}{\left(\varepsilon^{(m+1)}-1\right)^a} R_{m+1}$. Cela implique que $\gamma_i^{p^m}$ agit trivialement sur $\mathbf{E}_R^+ \Big/ (\varepsilon-1)^{p^{m-s}}\, \mathbf{E}_R^+$ si $1 - \frac{a}{p^m} \geq \frac{1}{p^s}$.

On fixons $s \in \mathbf{N}$ tel que ce qui précède soit valable pour $\mathbf{E}_V^+$ et pour $\mathbf{E}_R^+$. Soit ℓ_V (resp. ℓ_R) tel que

$$(\varepsilon-1)^{\ell_V}\Omega_{\mathbf{E}_V^+ / \mathbf{E}_{\mathrm{W}(k)}^+} = 0 \qquad (\text{resp. } (\varepsilon-1)^{\ell_R}\Omega_{\mathbf{E}_R^+ / \mathbf{E}_{\widetilde{R}}^+} = 0).$$

Soit m_0 tel que $1 - \frac{a}{p^m} \geq \frac{1}{p^s}$ et $p^{m-s} > \ell_V + \ell_R$ pour $m \geq m_0$. On va démontrer que $\gamma_i^{p^m}$ agit trivialement sur $\mathbf{E}_R^+ \Big/ (\varepsilon-1)^{p^m-\ell_V-\ell_R}\, \mathbf{E}_R^+$ pour tout $m \geq m_0$. L'homomorphisme $\gamma_i^{p^m}$ agit trivialement sur $\mathbf{E}_{\mathrm{W}(k)}^+/(\varepsilon-1)^{p^m}\, \mathbf{E}_{\mathrm{W}(k)}^+$ puisque $\mathbf{E}_{\mathrm{W}(k)}^+ = \lim_n \mathrm{W}(k)[\varepsilon^{(n)}]/(\varepsilon^{(n)}-1)$. Comme $\gamma_i^{p^m} \equiv \mathrm{id}$ sur $\mathbf{E}_V^+ \Big/ (\varepsilon-1)^{p^{m-s}}\, \mathbf{E}_V^+$, on conclut que $\gamma_i^{p^m} - \mathrm{id} = 0$ est une $\mathbf{E}_{\mathrm{W}(k)}^+$-dérivation sur $\mathbf{E}_V^+ \Big/ (\varepsilon-1)^{\min(2p^{m-s}, p^m)}\, \mathbf{E}_V^+$. Par hypothèse on a $(\varepsilon-1)^{\ell_V}\Omega_{\mathbf{E}_V^+ / \mathbf{E}_{\mathrm{W}(k)}^+} = 0$ d'où $(\varepsilon-1)^{\ell_V}\left(\gamma_i^{p^m} - \mathrm{id}\right) = 0 \mod (\varepsilon-1)^{\min(2p^{m-s}, p^m)}\, \mathbf{E}_V^+$. Cela signifie que $\gamma_i^{p^m} \equiv \mathrm{id}$ sur $\mathbf{E}_V^+ \Big/ (\varepsilon-1)^{\min(2p^{m-s}, p^m)-\ell_V}\, \mathbf{E}_V^+$ vu que $\mathbf{E}_V^+$ est sans $(\varepsilon-1)$-torsion. On en déduit par induction que $\gamma_i^{p^m} \equiv \mathrm{id}$ sur $\mathbf{E}_V^+ \Big/ (\varepsilon-1)^{p^m-\ell_V}\, \mathbf{E}_V^+$, donc aussi sur $\mathbf{E}_{R^0}^+ \Big/ (\varepsilon-1)^{p^m-\ell_V}\, \mathbf{E}_{R^0}^+$. Par le même raisonnement, $\gamma_i^{p^m}$ agit trivialement sur $\mathbf{E}_{\widetilde{R}}^+ \Big/ (\varepsilon-1)^{p^m-\ell_V}\, \mathbf{E}_{\widetilde{R}}^+$, car $\mathbf{E}_{R^0}^+ \Big/ (\varepsilon-1)^{p^m-\ell_V}\, \mathbf{E}_{R^0}^+ \subset \mathbf{E}_{\widetilde{R}}^+ \Big/ (\varepsilon-1)^{p^m-\ell_V}\, \mathbf{E}_{\widetilde{R}}^+$ est non-ramifié. De même, on voit que $\gamma_i^{p^m}$ agit trivialement sur $\mathbf{E}_R^+ \Big/ (\varepsilon-1)^{p^m-\ell_V-\ell_R}\, \mathbf{E}_R^+$.

On pose $\ell := \ell_V + \ell_R$. En appliquant φ^{-m}, on voit donc que $\gamma_i^{p^m}$ agit trivialement sur $\varphi^{-m}\left(\mathbf{E}_R^+\right) \Big/ (\varepsilon-1)^{1-\ell p^{-m}}\varphi^{-m}\left(\mathbf{E}_R^+\right)$. Comme γ_i agit trivialement sur $x_j^{\frac{1}{p^n}}$ pour $j \neq i$ et $n \in \mathbf{N}$, on voit donc que $\gamma_i^{p^m}$ agit trivialement sur

$$\bigcup_{n>m}\left(\varphi^{-m}\left(\mathbf{E}_R^+\right) \Big/ (\varepsilon-1)^{1-\ell p^{-m}}\varphi^{-m}\left(\mathbf{E}_R^+\right)\right)\left[x_0^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, x_{i-1}^{\frac{1}{p^n}}, x_{i+1}^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, x_d^{\frac{1}{p^n}}\right].$$

Soit $\overline{z} \in \mathbf{E}_R^{(i)}(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]$. On a $\overline{z}^{p^m} \in \mathbf{E}_R^{(i)}(\infty)$: d'après la proposition 4.12, on peut écrire

$$\overline{z}^{p^m} = \sum_{\substack{\underline{\alpha} \in \mathbf{N}^{d+1} \\ 0 < \alpha_j < p^n \\ \alpha_i = 0}} \overline{z}_{\underline{\alpha}} x_0^{\frac{\alpha_0}{p^n}} \cdots x_{i-1}^{\frac{\alpha_{i-1}}{p^n}} x_{i+1}^{\frac{\alpha_{i+1}}{p^n}} \cdots x_d^{\frac{\alpha_d}{p^n}}$$

avec $\overline{z}_{\underline{\alpha}} \in \mathbf{E}_R$ et $v_{\mathbf{E}}\left(\overline{z}^{p^m}\right) \leq \min\limits_{\underline{\alpha} \in \mathbf{N}^{d+1}} v_{\mathbf{E}}(\overline{z}_{\underline{\alpha}}) + c_R v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$. Quitte à multiplier $\overline{z}^{p^m}$ par une puissance convenable de $\overline{\pi}$, on peut supposer $0 \leq \min\limits_{\underline{\alpha} \in \mathbf{N}^{d+1}} v_{\mathbf{E}}(\overline{z}_{\underline{\alpha}}) < v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$. On a alors $0 \leq v_{\mathbf{E}}\left(\overline{z}^{p^m}\right) < (c_R+1)v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$, et donc $0 \leq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) < \frac{(c_R+1)}{p^m} v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$. Ainsi,

$$v_{\mathbf{E}}\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(\overline{z})\right) \geq \frac{p\left(1-\ell p^{-m}\right)}{p-1} \geq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) + \frac{p\left(1-(\ell+p(c_R+1))p^{1-m}\right)}{p-1}$$

pour tout $\overline{z} \in \mathbf{E}_R^{(i)}(\infty)$. Finalement, quitte à augmenter m_0, on peut supposer $p\left(1-p(\ell+(c_R+1))p^{1-m_0}\right) > \frac{p+1}{2}$. □

Fixons $\mathbf{A}_R^+ \subseteq \mathbf{A}_R$ comme dans la proposition 4.49. Supposons $r < r_R$. Fixons $a, b \in \mathbf{N}_{>0}$ tels que $\frac{pr}{p-1} < \frac{a}{b} < \frac{pr_R}{p-1}$. On a alors $w_r\left(\frac{p^a}{\pi^b}\right) = a - \frac{bpr}{p-1} > 0$. Comme on a $\mathbf{A}_R^+ \subset \widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p^a}{\pi^b}\right\}$, on a $w_r(z) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbf{A}_R^+$.

Proposition 4.28. *Il existe $c_4 > \frac{r}{p-1}$ (ne dépendant que de R et de r) tel que pour tout $m \geq m_0$, tout $i \in \{0,\ldots,d\}$ et tout $r < \min\left(r'_R, \frac{2(p-1)}{p(2c_R+7)+1}\right)$, on a*

$$w_r\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z)\right) \geq w_r(z) + c_4$$

pour tout $z \in \Lambda_m^{(i)}$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbf{A}_R^{+(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right] = \bigcup_{n\geq m} \mathbf{A}_R^+\left[[x_0]^{\frac{1}{p^n}},\ldots,[x_{i-1}]^{\frac{1}{p^n}},[x_i]^{\frac{1}{p^m}},[x_{i+1}]^{\frac{1}{p^n}},\ldots,[x_d]^{\frac{1}{p^n}}\right]$ et $\overline{z}$ son image dans $\mathbf{E}_R^{(i)}(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]$. Comme $r < r'_R$, pour $n > m$ assez grand, on a (*cf.* proposition 4.26) une écriture (unique) $z = \sum_{\substack{\underline{n}\in\mathbf{N}^{d+1}\\ 0\leq n_j<p^n}} z_{\underline{n}}[x_0]^{\frac{n_0}{p^n}}\cdots[x_d]^{\frac{n_d}{p^n}}$ avec $z_{\underline{n}} \in \mathbf{A}_R^+$ pour tout $\underline{n}$ et $w_r(z) \leq \min_{\underline{n}\in\mathbf{N}^{d+1}} w_r(z_{\underline{n}}) + c_2$. Quitte à multiplier z par une puissance convenable de π, on peut supposer que $0 \leq \min_{\underline{n}\in\mathbf{N}^{d+1}} w_r(z_{\underline{n}}) < w_r(\pi) = \frac{pr}{p-1}$. On a alors $0 \leq w_r(z) < \frac{p(c_R+3)r}{p-1}$ vu qu'on peut prendre $c_2 = \frac{p(c_R+2)r}{p-1}$.

On a $z - [\overline{z}] \in p\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p^a}{\pi^b}\right\}$, donc $w_r\left(z-[\overline{z}]\right) \geq w_r(p) = 1$ et *a fortiori* $w_r\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z-[\overline{z}])\right) \geq 1$. De même, on a $w_r\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z) - \left[\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(\overline{z})\right]\right) \geq 1$ et donc $w_r\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z) - \left[\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(\overline{z})\right]\right) \geq 1$. Mais d'après le lemme 4.27, on a $v_{\mathbf{E}}\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(\overline{z})\right) \geq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) + \frac{p+1}{2(p-1)}$ *i.e.* $w_r\left(\left[\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(\overline{z})\right]\right) \geq w_r([\overline{z}]) + \frac{p+1}{2(p-1)}r$. Ainsi, $w_r\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z)\right) \geq \min\left(1, w_r([\overline{z}]) + \frac{p+1}{2(p-1)}r\right) = \min\left(1, w_r(z) + \frac{p+1}{2(p-1)}r\right)$ vu que $w_r\left(z-[\overline{z}]\right) \geq 1$.

Comme $w_r(z) + \frac{p+1}{2(p-1)}r \leq \frac{p(c_R+3)r}{p-1} + \frac{p+1}{2(p-1)}r$ (car $r < \frac{2(p-1)}{p(2c_R+7)+1}$), on a en fait $w_r\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z)\right) \geq w_r(z) + c_4$ avec $c_4 = \frac{p+1}{2(p-1)}r > \frac{r}{p-1}$. En inversant π et en prenant l'adhérence pour la topologie faible, on en déduit que cette inégalité est encore valable pour $z \in \mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$ (le membre de droite valant $-\infty$ lorsque $z \notin \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$). Elle l'est donc *a fortiori* pour $z \in \left(\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right) \cap \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ et donc pour $z \in \Lambda_m^{(i)}$. □

Posons $\widetilde{r}_R = \min\left(r'_R, \frac{2(p-1)}{p(2c_R+7)+1}\right)$.

Lemme 4.29. *Supposons $i \in \{1,\ldots,d\}$. Soient $m \geq m_0$, $n > 0$ et $0 < j < p^n$ des entiers. On définit l'application $\mathbf{Z}_p$-linéaire suivante :*

$$\begin{aligned} \rho_{m,j,n}^{(i)}\colon \mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right] &\longrightarrow \mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right] \\ z &\longmapsto z - [\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}}\gamma_i^{p^m}(z). \end{aligned}$$

(a) Notons $\overline{\rho}_{m,j,n}^{(i)}\colon \mathbf{E}_R^{(i)}(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right] \to \mathbf{E}_R^{(i)}(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]$ l'application induite.

(a.1) On a $v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) \leq v_{\mathbf{E}}\left(\overline{\rho}_{m,j,n}^{(i)}(\overline{z})\right) \leq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) + \frac{1}{p-1}$ pour tout $\overline{z} \in \mathbf{E}_R^{(i)}(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]$. En particulier, $\overline{\rho}_{m,j,n}^{(i)}$ est continu pour la topologie $\overline{\pi}$-adique ;

(a.2) $\overline{\rho}_{m,j,n}^{(i)}$ induit une bijection d'inverse continu sur chaque sous-anneau du completé de $\mathbf{E}_R^{(i)}(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]$ pour la topologie $\overline{\pi}$-adique qui est fermé (pour la topologie $\overline{\pi}$-adique), stable sous l'action de γ_i et qui contient $[\varepsilon]^{\frac{1}{p^n}}$.

(b) Si $r < \widetilde{r}_R$, alors $w_r(z) \leq w_r\left(\rho_{m,j,n}^{(i)}(z)\right) \leq w_r(z) + \frac{r}{p-1}$ pour chaque $z \in \widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]} \cap \left(\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$. En particulier, $\rho_{m,j,n}^{(i)}$ définit une application continue sur $\Lambda_m^{(i)}$ pour la toplogie définie par w_r.

(c) Supposons $r < \widetilde{r}_R$. On a $w_r\left(\rho_{m,j,n}^{(i)}(z)\right) \leq w_r(z) + \frac{r}{p-1}$ pour tout $z \in \Lambda_m^{(i)}$. En outre, $\rho_{m,j,n}^{(0)}$ est bijective sur chaque sous-anneau de $\Lambda_m^{(0)}$ qui est complet pour la topologie w_r-adique, stable sous l'action de γ_i et qui contient $[\varepsilon]^{\frac{1}{p^n}}$.

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned} f_{m,j,n}^{(i)}\colon \mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right] &\longrightarrow \mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right] \\ z &\longmapsto \frac{z}{1-[\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}}} \end{aligned}$$

et pour $y \in \mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)$, $g_y(z) = z - f_{m,j,n}^{(i)}\left(\rho_{m,j,n}^{(i)}(z) - y\right)$. Ces applications sont bien définies et $\mathbf{Z}_p$-linéaires. Écrivons $\rho_{m,j,n}^{(i)}(z) = \left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(z)[\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}} + \left(1 - [\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}}\right) z$. On a $g_0(z) = -\frac{\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z)}{1-[\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}}}[\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}}$.

(b) Remarquons tout d'abord que $\rho_{m,j,n}^{(i)}$ et $f_{m,j,n}^{(i)}$ sont bien définies sur $\Lambda_m^{(i)}$ car $\Lambda_m^{(i)}$ est stable par Γ_R et contient $[\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}}$ (rappelons que $i \neq 0$). Comme $w_r\left(1 - [\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}}\right) = w_{p^{-n_j}r}(1 - [\varepsilon]) = \frac{r}{p^{n_j-1}(p-1)} \leq \frac{r}{p-1}$ (où $n_j = n - v(j) \geq 1$), et $w_r\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(z)\right) \geq w_r(z) + c_4$ (proposition 4.28), on a $w_r(g_0(z)) = w_r\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(z)\right) - w_r\left(1 - [\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}}\right) \geq w_r(z) + c_4 - \frac{r}{p-1}$. En particulier, pour tout $y \in \Lambda_m^{(i)}$, et $z_1, z_2 \in \Lambda_m^{(i)}$, on a $w_r(g_y(z_2) - g_y(z_1)) \geq w_r(z_2 - z_1) + c_4 - \frac{r}{p-1}$, car $g_y(z_2) - g_y(z_1) = g_0(z_2 - z_1)$. Comme $c_4 > \frac{r}{p-1}$, l'application g_y est contractante pour tout $y \in \Lambda_m^{(i)}$. Comme $\Lambda_m^{(i)}$ est séparé et complet pour la topologie définie par w_r, elle admet un unique point fixe : pour tout $y \in \Lambda_m^{(i)}$, il existe un unique $x \in \Lambda_m^{(i)}$ tel que $g_y(x) = x$ *i.e.* $\rho_{m,j,n}^{(i)}(x) = y$. L'application $\rho_{m,j,n}^{(i)}$ est donc bijective sur $\Lambda_m^{(i)}$. Par ailleurs, avec les notations qui précèdent, on a $w_r(x - y) \geq w_r(g_y(y) - y)$ (car x est la limite de la suite définie par $x_0 = y$ et $x_{n+1} = g_y(x_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$). Comme $g_y(y) - y = \frac{[\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}}\gamma_i^{p^m}(y)}{1-[\varepsilon]^{\frac{j}{p^n}}}$, on a donc $w_r(x - y) \geq w_r(y) - \frac{r}{p-1}$, d'où $w_r(x) \geq w_r(y) - \frac{r}{p-1}$.

(c) Résulte de (b) en remarquant que g_y est définie sur les sous-anneaux de $\Lambda_m^{(i)}$ qui satisfont aux conditions de (c).

(a) Comme $v_{\mathbf{E}}\left(1 - \varepsilon^{\frac{j}{p^n}}\right) = \frac{1}{p^{n_j-1}(p-1)} \leq \frac{1}{p-1}$ et $v_{\mathbf{E}}\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(\overline{z})\right) \geq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) + \frac{p+1}{2(p-1)}$ (lemme 4.27), on a $v_{\mathbf{E}}(g_0(\overline{z})) = v_{\mathbf{E}}\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(\overline{z})\right) - v_{\mathbf{E}}\left(1 - \varepsilon^{\frac{j}{p^n}}\right) \geq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) + \frac{p+1}{2(p-1)} - \frac{1}{p-1} > v_{\mathbf{E}}(\overline{z})$. En particulier, pour $\overline{y} \in \mathbf{E}_R^{+(i)}(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]$, l'application $g_{\overline{y}}$ est continue et contractante pour la topologie $\overline{\pi}$-adique. On conclut comme dans la preuve du (b). □

Proposition 4.30. *Supposons $i \in \{1, \dots, d\}$ et $m \geq m_0$. Alors,*

(a) L'application $1 - \gamma_i^{p^m}$ induit une bijection de $\left(1 - \tau_m^{(i)}\right)\left(\widetilde{\mathbf{E}}_R\right)$ dans lui-même, et pour tout $\overline{z} \in \left(1 - \tau_m^{(i)}\right)\left(\widetilde{\mathbf{E}}_R\right)$, on a $v_{\mathbf{E}}\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(\overline{z})\right) \leq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) + \frac{p(c_R+2)}{p-1}$.

(b) Si $r < \widetilde{r}_R$, l'application $1 - \gamma_i^{p^m}$ induit une bijection de $X_m^{(i)} = \left(1 - \tau_m^{(i)}\right)\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right)$ dans lui-même, et pour tout $z \in X_m^{(i)}$, on a

$$w_r\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(z)\right) \leq w_r(z) + c_2 + \frac{r}{p-1}.$$

Démonstration. (b) Soient $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et $z \in \Lambda_{m+n}^{(i)}$. D'après le proposition 4.26, on a une écriture unique $z = \sum_{j=0}^{p^n-1} z_j [x_i]^{\frac{j}{p^{m+n}}}$, avec $z_j \in \Lambda_m^{(i)}$ et $w_r(z) \leq w_r(z_j) + c_2$ pour tout $j \in \{0, \dots, p^n - 1\}$. On a de plus $\tau_m^{(i)}(z) = 0$ si et seulement si $z_0 = 0$, ce que l'on suppose dans ce qui suit. On a (avec les notations du lemme 4.29) $\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(z) = \sum_{j=1}^{p^n-1} \rho_{m,j,n}^{(i)}(z_j)[x_i]^{\frac{j}{p^{m+n}}}$. Mais les applications $\left\{\rho_{m,j,n}^{(i)} : \Lambda_m^{(i)} \to \Lambda_m^{(i)}\right\}_{0<j<p^n}$ sont bijectives : il en est donc de même de $1 - \gamma_i^{p^m} : \left(\Lambda_{m+n}^{(i)}\right)^{\tau_m^{(i)}=0} \to \left(\Lambda_{m+n}^{(i)}\right)^{\tau_m^{(i)}=0}$. Par ailleurs, on a $w_r\left(\rho_{m,j,n}^{(i)}(z_j)\right) \leq w_r(z_j) + \frac{r}{p-1}$ pour tout $0 < j < p^n$. Comme $w_r\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(z)\right) \leq \min_{0<j<p^n} w_r\left(\rho_{m,j,n}^{(i)}(z_j)\right) + c_2$ d'après la proposition 4.26, on a

$$w_r\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(z)\right) \leq \min_{0<j<p^n} w_r(z_j) + c_2 + \frac{r}{p-1} \leq w_r(z) + c_2 + \frac{r}{p-1}.$$

On a $\Lambda_{m+n}^{(i)} = \Lambda_m^{(i)} \oplus \left(\Lambda_{m+n}^{(i)}\right)^{\tau_m^{(i)}=0}$ d'où $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_{m+n}^{(i)} = \Lambda_m^{(i)} \oplus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\Lambda_{m+n}^{(i)}\right)^{\tau_m^{(i)}=0}\right)$. Comme $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_{m+n}^{(i)}$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ pour la topologie définie par w_r (corollaire 4.22), il en est de même de $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\Lambda_{m+n}^{(i)}\right)^{\tau_m^{(i)}=0}$ dans $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\right)^{\tau_m^{(i)}=0} = X_m^{(i)}$. Comme $1 - \gamma_i^{p^m}$ induit un homoémorphisme de $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\Lambda_{m+n}^{(i)}\right)^{\tau_m^{(i)}=0}$ dans lui-même, il en est de même sur $X_m^{(i)}$ par continuité. Par ailleurs, on a encore $w_r\left(\left(1 - \gamma_i^{p^m}\right)(z)\right) \leq w_r(z) + c_2 + \frac{r}{p-1}$ pour tout $z \in X_m^{(i)}$ par continuité.

(a) Résulte du lemme 4.29 comme dans la preuve du (b). □

Lemme 4.31. *Soient $m \geq m_0$, $n > v\left(\chi(\gamma_0)^{p^m}-1\right)$ et $0 < j < p^n$ des entiers. Soit $\lambda \in \mathbf{N}_{>0}$ tel que $v\left(\chi(\gamma_0)^{\lambda p^m}-1\right) = n$. Écrivons $\chi(\gamma_0)^{\lambda p^m} = 1+p^n u$ où $u \in \mathbf{Z}_p^\times$ et posons*

$$\begin{aligned}\rho^{(0)}_{m,j,n} \colon \mathbf{A}^{(0)}_R(\infty)\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right] &\longrightarrow \mathbf{A}^{(0)}_R(\infty)\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right]\\ z &\longmapsto z - [\varepsilon]^{\frac{ju}{p^m}}\gamma_0^{\lambda p^m}(z).\end{aligned}$$

(a) Notons $\overline{\rho}^{(0)}_{m,j,n} \colon \mathbf{E}^{(0)}_R(\infty)\left[x_0^{\frac{1}{p^m}}\right] \to \mathbf{E}^{(0)}_R(\infty)\left[x_0^{\frac{1}{p^m}}\right]$ l'application induite.

(a.1) On a $v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) \leq v_{\mathbf{E}}\left(\overline{\rho}^{(0)}_{m,j,n}(\overline{z})\right) \leq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) + \frac{1}{p-1}$ pour tout $\overline{z} \in \mathbf{E}^{(0)}_R(\infty)\left[x_0^{\frac{1}{p^m}}\right]$. En particulier, $\overline{\rho}^{(0)}_{m,j,n}$ est continue pour la topologie $\overline{\pi}$-adique ;

(a.2) $\overline{\rho}^{(0)}_{m,j,n}$ induit une bijection d'inverse continu sur chaque sous anneau du completé de $\mathbf{E}^{(i)}_R(\infty)\left[x_0^{\frac{1}{p^m}}\right]$ pour la topologie $\overline{\pi}$-adique qui est fermé (pour la topologie $\overline{\pi}$-adique), stable sous l'action de γ_0 et qui contient $[\varepsilon]^{\frac{1}{p^m}}$.

(b) Supposons $r < \widetilde{r}_R$. Alors pour tout $z \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_R \cap \left(\mathbf{A}^{(0)}_R(\infty)\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$, on a $w_r(z) \leq w_r\left(\rho^{(0)}_{m,j,n}(z)\right) \leq w_r(z) + \frac{r}{p-1}$. En particulier, $\rho^{(0)}_{m,j,n}$ définit une application continue sur $\Lambda^{(0)}_m$ pour la topologie définie par w_r.

(c) Supposons $r < \widetilde{r}_R$. On a $w_r\left(\rho^{(0)}_{m,j,n}(z)\right) \leq w_r(z) + \frac{r}{p-1}$ pour tout $z \in \Lambda^{(0)}_m$. En outre, $\rho^{(0)}_{m,j,n}$ est bijective sur chaque sous anneau de $\Lambda^{(0)}_m$ complet pour la topologie w_r-adique, stable sous l'action de γ_0 et qui contient $[\varepsilon]^{\frac{1}{p^m}}$.

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned}f^{(0)}_{m,j,n} \colon \mathbf{A}^{(0)}_R(\infty)\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right] &\longrightarrow \mathbf{A}^{(0)}_R(\infty)\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right]\\ z &\longmapsto \frac{z}{1-[\varepsilon]^{\frac{ju}{p^m}}}\end{aligned}$$

et pour $y \in \mathbf{A}^{(0)}_R(\infty)\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right]$, $g_y(z) = z - f^{(0)}_{m,j,n}\left(\rho^{(0)}_{m,j,n}(z)-y\right)$. Ces applications sont bien définies et $\mathbf{Z}_p$-linéaires. Écrivons $\rho^{(0)}_{m,j,n}(z) = \left(1-\gamma_0^{\lambda p^m}\right)(z)[\varepsilon]^{\frac{ju}{p^m}} + \left(1-[\varepsilon]^{\frac{ju}{p^m}}\right)z$. On a $g_0(z) = -\frac{\left(1-\gamma_0^{\lambda p^m}\right)(z)}{1-[\varepsilon]^{\frac{ju}{p^m}}}[\varepsilon]^{\frac{ju}{p^m}}$.

(b) Remarquons tout d'abord que les applications $\rho^{(0)}_{m,j,n}$ et $f^{(0)}_{m,j,n}$ sont bien définies sur $\Lambda^{(0)}_m$ car $\Lambda^{(0)}_m$ est stable par Γ_R et contient $[\varepsilon]^{\frac{1}{p^m}}$. Comme $w_r\left(1-[\varepsilon]^{\frac{ju}{p^m}}\right) \leq \frac{r}{p-1}$ (*cf.* preuve du lemme 4.29), et $w_r\left(\left(1-\gamma_0^{p^m}\right)(z)\right) \geq w_r(z)+c_4$ (proposition 4.28 et récurrence sur λ), on a $w_r(g_0(z)) \geq w_r(z) + c_4 - \frac{r}{p-1}$. Comme $c_4 > \frac{r}{p-1}$, on conclut comme dans la preuve du lemme 4.29 que l'application g_y est contractante pour tout $y \in \Lambda^{(i)}_m$ et donc qu'elle admet un unique point fixe $x \in \Lambda^{(0)}_m$, et que ce dernier vérifie $w_r(x) \geq w_r(y) - \frac{r}{p-1}$.

(c) Résulte de (b) en remarquant que g_y est definie sur chaque sous-anneau de $\Lambda^{(0)}_m$ satisfaisant aux conditions de (c).

(a) Analogue à la preuve du (b) (*cf.* preuve du lemme 4.29). □

Proposition 4.32. *Supposons $m \geq m_0$.*

(a) L'application $1-\gamma_0^{p^m}$ induit une bijection de $\left(1-\tau^{(0)}_m\right)\left(\widetilde{\mathbf{E}}_R\right)$ dans lui-même, et pour chaque $\overline{z} \in \left(1-\tau^{(0)}_m\right)\left(\widetilde{\mathbf{E}}_R\right)$ on a $v_{\mathbf{E}}\left(\left(1-\gamma_0^{p^m}\right)(\overline{z})\right) \leq v_{\mathbf{E}}(\overline{z}) + \frac{p(c_R+2)}{p-1}$.

(b) Supposons $r < \widetilde{r}_R$. Alors l'application $1-\gamma_0^{p^m}$ induit une bijection de $X^{(0)}_m = \left(1-\tau^{(0)}_m\right)\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_R\right)$ dans lui-même, et pour tout $z \in X^{(0)}_m$, on a

$$w_r\left(\left(1-\gamma_0^{p^m}\right)(z)\right) \leq w_r(z) + c_2 + \frac{r}{p-1}.$$

Démonstration. Soient $n > v\left(\chi(\gamma_0)^{p^m}-1\right)$ et $\lambda \in \mathbf{N}_{>0}$ tel que $v\left(\chi(\gamma_0)^{\lambda p^m}-1\right) = n$. Écrivons $\chi(\gamma_0)^{\lambda p^m} = 1+p^n u$ où $u \in \mathbf{Z}_p^\times$.

(b) Soit $z \in \Lambda^{(0)}_{m+n}$. D'après le proposition 4.26, on a une écriture unique $z = \sum_{j=0}^{p^n-1} z_j[x_0]^{\frac{j}{p^{m+n}}}$, avec $z_j \in \Lambda^{(0)}_m$ et $w_r(z) \leq w_r(z_j)+c_2$ pour tout $j \in \{0,\dots,p^n-1\}$. On a de plus $\tau^{(0)}_m(z) = 0$ si et seulement si $z_0 = 0$, ce que l'on suppose dans ce qui suit. On a (avec les notations du lemme 4.31) $\left(1-\gamma_0^{\lambda p^m}\right)(z) = \sum_{j=1}^{p^n-1} \rho^{(0)}_{m,j,n}(z_j)[x_0]^{\frac{j}{p^{m+n}}}$. Mais les applications $\left\{\rho_{m,j,n}^{(0)}\colon \Lambda_m^{(0)} \to \Lambda_m^{(0)}\right\}_{0<j<p^n}$ sont bijectives : il en est donc de même de $1-\gamma_i^{\lambda p^m}\colon \left(\Lambda_{m+n}^{(0)}\right)^{\tau_m^{(0)}=0} \to \left(\Lambda_{m+n}^{(0)}\right)^{\tau_m^{(0)}=0}$. Par ailleurs, on a $w_r\left(\rho_{m,j,n}^{(0)}(z_j)\right) \leq w_r(z_j)+\frac{r}{p-1}$ pour tout $0<j<p^n$. Comme dans la preuve de la proposition 4.30, on en déduit que

$$w_r\left(\left(1-\gamma_0^{\lambda p^m}\right)(z)\right) \leq w_r(z)+c_2+\frac{r}{p-1}$$

pour tout $z\in\left(\Lambda_{m+n}^{(0)}\right)^{\tau_m^{(0)}=0}$. Mais $1-\gamma_0^{\lambda p^m}=\left(1-\gamma_0^{p^m}\right)\left(1+\gamma_0^{p^m}+\cdots+\gamma_0^{(\lambda-1)p^m}\right)$ d'où $w_r\left(\left(1-\gamma_0^{\lambda p^m}\right)(z)\right) \geq w_r\left(\left(1-\gamma_0^{p^m}\right)(z)\right)$ pour tout $z\in\Lambda_{m+n}^{(0)}$. Il en résulte que $1-\gamma_i^{p^m}\colon \left(\Lambda_{m+n}^{(0)}\right)^{\tau_m^{(0)}=0} \to \left(\Lambda_{m+n}^{(0)}\right)^{\tau_m^{(0)}=0}$ est lui aussi bijectif, et que pour tout $z\in\left(\Lambda_{m+n}^{(0)}\right)^{\tau_m^{(0)}=0}$, on a

$$w_r\left(\left(1-\gamma_0^{p^m}\right)(z)\right) \leq w_r(z)+c_2+\frac{r}{p-1}.$$

Un argument de passage à la limite identique à celui de la proposition 4.30 permet alors de conclure.

(a) Analogue à la preuve de (b). □

4.33. **Application : surconvergence des représentations p-adiques.**
On définit l'anneau $\mathbf{A}$ comme étant le complété, pour la topologie p-adique, du sous-anneau $\bigcup_{S_\infty}\mathbf{A}_S$ de $\widetilde{\mathbf{A}}$, la réunion étant prise sur les sous-R_∞-algèbres S_∞ de $\overline{R}$ qui sont normales et telles que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie étale (*cf.* [2, 7.8]). D'après [2, Proposition 7.8], pour toute R-algèbre S comme ci-dessus, on a $\mathbf{A}_S=\mathbf{A}^{\mathcal{H}_S}$.

Pour $r\in\mathbf{Q}_{>0}$ on pose $\mathbf{A}^{(0,r]}:=\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}\cap\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}^{(0,r]}:=\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}\cap\mathbf{B}$ l'intersection étant prise dans $\widetilde{\mathbf{B}}$. On définit $\mathbf{A}^\dagger:=\bigcup_r\mathbf{A}^{(0,r]}=\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger\cap\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}_R^\dagger:=\bigcup_r\mathbf{B}^{(0,r]}=\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger\cap\mathbf{B}$. On pose $\mathbf{A}_R^{(0,r]}:=\left(\mathbf{A}^{(0,r]}\right)^{\mathcal{H}_R}$, $\mathbf{B}_R^{(0,r]}:=\left(\mathbf{B}^{(0,r]}\right)^{\mathcal{H}_R}$, $\mathbf{A}_R^\dagger:=\left(\mathbf{A}^\dagger\right)^{\mathcal{H}_R}$ et $\mathbf{B}_R^\dagger:=\left(\mathbf{B}^\dagger\right)^{\mathcal{H}_R}$.

Proposition 4.34. *On a les propriétés suivantes :*

(a) $\mathbf{A}_R^{(0,r]}=\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\cap\mathbf{A}_R$, $\mathbf{A}_R^\dagger=\widetilde{\mathbf{A}}_R^\dagger\cap\mathbf{A}_R$, $\mathbf{B}_R^{(0,r]}=\widetilde{\mathbf{B}}_R^{(0,r]}\cap\mathbf{B}_R$ *et* $\mathbf{A}_R^\dagger=\widetilde{\mathbf{B}}_R^\dagger\cap\mathbf{B}_R$.

(b) $\mathbf{A}_R^{(0,r]}$ *est séparé et complet pour la topologie définie par* w_r.

(c) *Pour tout* $m\in\mathbf{N}$, *on a* $\varphi^{-m}\left(\mathbf{A}_R^{(0,p^m r]}\right)=\mathbf{A}_R^{(0,r]}\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}},\ldots,[x_d]^{\frac{1}{p^m}}\right]=\bigcap_{i=0}^{d}\Lambda_m^{(i)}$.

(d) *Si* $r<r_R'$ *(cf. lemme 4.17), le sous anneau* $\mathbf{A}_R^+\left[\pi^{-1}\right]$ *de* $\mathbf{A}_R$ *est contenu dans* $\mathbf{A}_R^{(0,r]}$ *et est dense pour la topologie definie par* w_r.

(e) $\mathbf{A}_R^{(0,r]}/p\mathbf{A}_R^{(0,r]}\cong\mathbf{E}_R$ *pour* $r<\frac{(p-1)r_R}{p}$ *(cf. proposition 4.49). En particulier,* $\mathbf{A}_R^\dagger/p\mathbf{A}_R^\dagger\cong\mathbf{E}_R$.

(f) *Le couple* $\left(\mathbf{A}_R^\dagger,p\mathbf{A}_R^\dagger\right)$ *est hensélien.*

(g) *Les extensions* $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^\dagger\subset\mathbf{A}_R^\dagger$ *et* $\mathbf{B}_{\widetilde{R}}^\dagger\subset\mathbf{B}_R^\dagger$ *sont finies et étales.*

Démonstration. (a) L'assertion résulte de ce que par définition $\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}\right)^{\mathcal{H}_R}=\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ et du fait que $\mathbf{A}^{\mathcal{H}_R}=\mathbf{A}_R$ (*cf.* [2, Proposition 7.8 (iii)]).

(b) Découle de (a), du fait que $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ est séparé et complet pour la topologie définie par w_r (proposition 4.3 (c)) et du fait que $\mathbf{A}_R$ est séparé et complet pour la topologie faible par construction (et *a fortiori* pour la topologie définie par w_r).

(c) Par definition, $\Lambda_m^{(i)}$ est l'adhérence de $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\cap\left(\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$ pour la topologie définie par w_r. D'après la proposition 4.23, l'opérateur $\tau_n^{(0)}\circ\cdots\circ\tau_n^{(d)}$ est $\mathbf{A}_R^{(0,r]}$-linéaire continu : l'image de $\Lambda_m^{(i)}$ est contenue dans l'adhérence de $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}\cap\left(\mathbf{A}_R\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}},\ldots,[x_d]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$ pour la topologie définie par w_r. Le cas $n=0$ résulte de (a) et (b). Le cas général découle du fait que $\mathbf{A}_R\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}},\ldots,[x_d]^{\frac{1}{p^m}}\right]=\varphi^{-m}(\mathbf{A}_R)$ (corollaire 4.13 (ii)) et du fait que $\varphi^{-m}\colon\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,p^m r]}\to\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ est un isomorphisme topologique (proposition 4.3 (b)).

(d) On sait (proposition 4.49) que $\mathbf{A}_R^{(0,r]}$ contient $\mathbf{A}_R^+$ pour $r<\frac{(p-1)r_R}{p}$. On a montré dans le corollaire 4.22 que si $r<r_R'$, le sous-anneau $\bigcup_{m\in\mathbf{N}}\mathbf{A}_R^+\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}},\ldots,[x_d]^{\frac{1}{p^m}}\right]\left[\pi^{-1}\right]$ de $\widetilde{\mathbf{A}}_R^{(0,r]}$ est dense pour la topologie définie par w_r. D'après le corollaire 4.13, on sait que $\bigcup_{m\in\mathbf{N}}\mathbf{A}_R\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}},\ldots,[x_d]^{\frac{1}{p^m}}\right]$ est un $\mathbf{A}_R$-module libre de base

$\left\{[x_0]^{\frac{i_0}{p^m}}\cdots[x_d]^{\frac{i_d}{p^m}}\right\}_{n,0\leq i_j<p^m}$. Comme $w_r\left([x_0]^{\frac{i_0}{p^m}}\cdots[x_d]^{\frac{i_d}{p^m}}\right)=0$, une suite $\left\{\sum a^{(k)}_{m,i_0,\ldots,i_d}[x_0]^{\frac{i_0}{p^m}}\cdots[x_d]^{\frac{i_d}{p^m}}\right\}_{k\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy pour la topologie définie par w_r si et seulement si $\left\{a^{(k)}_{m,i_0,\ldots,i_d}\right\}$ est de Cauchy pour chaque m, $i_0,\ldots,i_d$. La conclusion en résulte.

(e) Comme $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_R/p\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_R=\widetilde{\mathbf{E}}_R$ et $\mathbf{A}_R/p\mathbf{A}_R=\mathbf{E}_R$ (proposition 4.49), on a $p\mathbf{A}^{(0,r]}_R=\mathbf{A}^{(0,r]}_R\cap(p\mathbf{A}_R)$ d'après le (a). On a donc $\mathbf{A}^{(0,r]}_R/p\mathbf{A}^{(0,r]}_R\subset\mathbf{A}_R/p\mathbf{A}_R=\mathbf{E}_R$. L'assertion résulte de (d) et de la proposition 4.49.

(f) Les couples $\left(\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_R,p\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_R\right)$ et $(\mathbf{A}_R,p\mathbf{A}_R)$ sont henséliens, le premier d'après la proposition 4.8 et le second parce que $\mathbf{A}_R$ est séparé et complet pour la topologie p-adique. L'assertion découle alors de (a).

(g) Montrons que $\mathbf{A}^\dagger_R$ est un $\mathbf{A}^\dagger_{\widetilde{R}}$-module de type fini. Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ éléments de $\mathbf{A}^+_R$, dont les images modulo $p\mathbf{A}^+_R$ engendrent $\mathbf{E}^+_R$ comme $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}$-module : on a $\mathbf{A}^+_R=\alpha_1\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}+\cdots+\alpha_s\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}+p\mathbf{A}^+_R$. L'anneau $\mathbf{A}^+_R$ étant complet pour la topologie faible (proposition 4.49 (iii)) donc *a fortiori* pour la topologie p-adique, on conclut que $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ engendrent $\mathbf{A}^+_R$ comme $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}$-module. On déduit alors de (d) que $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ engendrent $\mathbf{A}^{(0,r]}_R$ comme $\mathbf{A}^{(0,r]}_{\widetilde{R}}$-module si $r<r'_R$. En particulier, $\mathbf{A}^\dagger_{\widetilde{R}}\subset\mathbf{A}^\dagger_R$ est finie. La preuve qu'elle est aussi étale résulte alors de (f) comme dans la preuve de la proposition 4.9. □

On a verifié que les conditions de Tate-Sen sont remplies pour $\widetilde{\Lambda}=\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et donc aussi pour $\widetilde{\Lambda}=\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ si $r<\widetilde{r}_R$. On a donc :

Theorème 4.35. *Pour tout $n\in\mathbf{N}_{>0}$, les applications*

$$\varinjlim_{S_\infty}\mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right),\mathrm{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}^\dagger_S)\right)\right)\to\mathrm{H}^1\left(\mathcal{G}_R,\mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger\right)\right)$$

et

$$\varinjlim_{S_\infty}\mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right),\mathrm{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}^\dagger_S)\right)\right)\to\mathrm{H}^1\left(\mathcal{G}_R,\mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger\right)\right),$$

(déduites des inclusions $\mathbf{A}^\dagger_S\subset\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger$ et $\mathbf{B}^\dagger_S\subset\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$) sont bijectives, la limite inductive étant prise sur les sous-R_∞-algèbres S_∞ de $\overline{R}$ telles que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne.

Démonstration. On prouve le théorème pour $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger$. Le cas de $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ est analogue. D'après la proposition 4.10, on a

$$\varinjlim_{S_\infty}\mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]\right),\mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_S\right)\right)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^1\left(\mathcal{H}_R,\mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger\right)\right).$$

Il s'agit donc de prouver que pour toute sous-R_∞-algèbre S_∞ de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne, l'application naturelle

$$\mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right),\mathrm{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}^\dagger_S)\right)\right)\to\mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right),\mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_S\right)\right)$$

est bijective. On suit la preuve du théorème 3.1.

Montrons l'injectivité. Soient $U,U'\colon\ \mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)\to\mathrm{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}^\dagger_S)\right)$ deux cocycles cohomologues en tant que cocycles à valeurs dans $\mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_S\right)$, montrons qu'ils sont cohomologues dans $\mathrm{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}^\dagger_S)\right)$. Comme $\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ est topologiquement engendré par un nombre fini d'éléments, il existe $m\geq m_0$ et $r<\widetilde{r}_R$ tels que U et U' sont à valeurs dans $\mathrm{GL}_n\left(\varphi^{-m}(\mathbf{A}^{(0,p^mr]}_S)\right)=\mathrm{GL}_n\left(\mathbf{A}^{(0,r]}_S\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}},\ldots,[x_d]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$. Il existe (quitte à diminuer r) $M\in\mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_S\right)$ tel que $U'_g=M^{-1}U_gg(M)$ pour tout $g\in\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$. En particulier, pour $i\in\{0,\ldots,d\}$, on a $\gamma_i^{p^m}(M)=U_{\gamma_i^{p^m}}MU'_{\gamma_i^{p^m}}$: si W_i est le sous-$\Lambda^{(i)}_m$-module de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_S$ engendré par les coefficients de M (où $\Lambda^{(i)}_m$ est associé à $\mathbf{A}^{(0,r]}_S$), alors W_i est stable par $\gamma_i^{p^m}$. Étant de type fini, la proposition 2.7 implique que $W_i\subseteq\Lambda^{(i)}_\infty$. On conclut comme dans le lemme 2.8 que M est à coefficients dans $\Lambda_\infty=\bigcap\limits_{i=0}^{d}\Lambda^{(i)}_\infty=\bigcup\limits_{m=m_0}^{\infty}\mathbf{A}^{(0,r]}_S\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}},\ldots,[x_d]^{\frac{1}{p^m}}\right]\subseteq\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}^\dagger_S)$ et U et U' sont cohomologues.

Montrons la surjectivité. Soit $U\colon\ \mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)\to\mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_S\right)$ un cocycle. Choisissons $r<\widetilde{r}_R$ tel que U est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_S\right)$. Écrivons S_∞ comme la normalisation de $S_N\otimes_{R_N}R_\infty$ avec $N\in\mathbf{N}$ et où $R_N\subset S_N$ est une R_N-algèbre intègre, normale et finie, telle que $S_N[p^{-1}]$ est étale comme $R_N[p^{-1}]$-algèbre. Soit $\Gamma_{S_N}=\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/S_N[p^{-1}]\right)$. D'après les propositions 4.6, 4.24, 4.30 et 4.32, le théorème 2.5 est valide : l'application $\mathrm{H}^1\left(\Gamma_{S_N},\mathrm{GL}_n\left(\Lambda_\infty\right)\right)\to\mathrm{H}^1\left(\Gamma_{S_N},\mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_S\right)\right)$ est bijective (où Λ_∞ est associé à $\mathbf{A}^{(0,r]}_S$). Quitte à tordre U par $M\in\mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_S\right)$, on peut supposer qu'il existe $m\geq m_0$ tel que $U_g\in\mathrm{GL}_n\left(\Lambda_m\right)$ pour tout $g\in\Gamma_{S_N}$. Soient $g_1,\ldots,g_r$ des générateurs topologiques de $\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ et pour $i\in\{0,\ldots,d\}$ notons W_i le sous-$\Lambda^{(i)}_m$-module de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_S$ engendré par les coefficients de $U_{g_1},\ldots,U_{g_r}$ (où comme avant, $\Lambda^{(i)}_m$ est associé à $\mathbf{A}_S^{(0,r]}$). Si $g\in\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$, on a $\gamma_i^{p^m}(U_g)=U^{-1}_{\gamma_i^{p^m}}U_{\gamma_i^{p^m}g}$ donc W_i est stable par $\gamma_i^{p^m}$. Comme W_i est de type fini sur $\Lambda_m^{(i)}$, la proposition 2.7 implique que $W_i\subseteq\Lambda_\infty^{(i)}$. On conclut comme plus haut que $U_{g_1},\dots,U_{g_r}$ sont à coefficients dans $\Lambda_\infty\subseteq\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}_S^\dagger)$, et donc que U est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}_S^\dagger)\right)$. □

Pour appliquer ce théorème aux (φ,Γ_R)-modules, il faut raffiner la proposition 2.7 et le lemme 2.8.

Lemme 4.36. *(a) Soit $\overline{\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)}$ l'adhérence de $\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ pour la topologie faible. Soient $m\in\mathbf{N}$ et $W\subset\widetilde{\mathbf{A}}_R$ un sous-$\overline{\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$-module de type fini stable par $\gamma_i^{p^m}$. Alors $W\subset\bigcup\limits_{n\geq m}\overline{\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^n}}\right]$.*

(b) De même, si $W\subset\widetilde{\mathbf{B}}_R$ est un sous-$\overline{\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}},\frac{1}{p}\right]$-module de type fini stable par $\gamma_i^{p^m}$, alors $W\subset\bigcup\limits_{n\geq m}\overline{\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}},\frac{1}{p}\right]$.

Démonstration. (*cf.* preuve de 2.7) Soit $w^{(1)},\dots,w^{(r)}$ une famille génératrice de W sur $\overline{\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$, et w le vecteur colonne dont les composantes sont $w^{(1)},\dots,w^{(r)}$. Pour tout $m'\geq m$ soit $M_{m'}\in\mathrm{M}_r\left(\overline{\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$ telle que $\gamma_i^{p^{m'}}(w)=M_{m'}w$. Posons $y_{m'}=\left(1-\tau_{m'}^{(i)}\right)(w)$. Comme $\tau_{m'}^{(i)}(M_{m'})=M_{m'}$, car $M_{m'}$ est à coefficients dans $\overline{\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$, on a $\gamma_i^{p^{m'}}(y_{m'})=M_{m'}y_{m'}$ vu que $\tau_{m'}^{(i)}$ commute à l'action de Γ_R (proposition 4.15). D'après les propositions 4.30 (a) et 4.32 (a), l'application $1-\gamma_i^{p^{m'}}$ est inversible sur $\left(1-\tau_{m'}^{(i)}\right)\left(\widetilde{\mathbf{E}}_R\right)$ avec inverse continu. *A fortiori* $1-\gamma_i^{p^m}$ est inversible sur $\left(1-\tau_m^{(i)}\right)\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R\right)$ (puisque son quotient modulo p coïncide avec $\left(1-\tau_m^{(i)}\right)\left(\widetilde{\mathbf{E}}_R\right)$). En particulier, si v_p désigne la valuation p-adique sur $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ normalisée par $v_p(p)=1$, on a $v_p\left(\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)z\right)=v_p(z)$ pour tout $z\in\left(1-\tau_m^{(i)}\right)\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R\right)$.

S'il existe $m'\geq m$ tel que $v_p(1-M_{m'})>0$, alors

$$v_p(y_{m'})=v_p\left((1-\gamma_i^{p^m})y_{m'}\right)=v_p\left((1-M_{m'})y_{m'}\right)\geq v_p(1-M_{m'})+v_p(y_{m'})>v_p(y_{m'})$$

d'où $v_p(y_{m'})=+\infty$ *i.e.* $y_{m'}=0$.

Supposons au contraire que $v_p(1-M_{m'})=0$ pour tout $m'\geq m$. Soit $\overline{M}_{m'}\in\mathrm{M}_r\left(\overline{\mathbf{E}_R^{(i)}(\infty)}\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$ la réduction de $M_{m'}$ modulo p. Par continuité de l'action de Γ_R pour la topologie définie par $v_{\mathbf{E}}$, on a $\lim\limits_{m'\to\infty}\overline{M}_{m'}=1$: quitte à augmenter m, on peut supposer $m\geq m_0$ (*cf.* lemme 4.27) et $v_{\mathbf{E}}\left(1-\overline{M}_m\right)\geq\frac{p(c_R+2)}{p-1}+1$. Soit h_m la valuation p-adique de y_m. Si $h_m<+\infty$, notons $\overline{y}_m$ la réduction de $p^{-h_m}y_m$ modulo p. D'après les propositions 4.30 (a) et 4.32 (a), on a

$$v_{\mathbf{E}}(\overline{y}_m)\geq v_{\mathbf{E}}\left((1-\overline{M}_m)\overline{y}_m\right)-\frac{p(c_R+2)}{p-1}\geq v_{\mathbf{E}}\left(1-\overline{M}_m\right)+v_{\mathbf{E}}(\overline{y}_m)-\frac{p(c_R+2)}{p-1}\geq v_{\mathbf{E}}(\overline{y}_m)+1$$

d'où $v_{\mathbf{E}}(\overline{y}_m)=+\infty$ *i.e.* $\overline{y}_m=0$, ce qui contredit le fait que $h_m<+\infty$. On a donc $h_m=+\infty$ et $y_m=0$.

Dans tous les cas, on conclut que, quitte à augmenter m, on a $y_m=0$, soit $\tau_m^{(i)}(w)=w$: le vecteur w est à coefficients dans le separé completé $\overline{\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)}\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]$ de $\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)\left[x_i^{\frac{1}{p^m}}\right]$ pour la topologie faible d'après la proposition 4.15.

(b) Soit $w^{(1)},\dots,w^{(r)}$ une famille génératrice de W sur $\overline{\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}},\frac{1}{p}\right]$ constituée d'éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}_R$, et w le vecteur colonne dont les composantes sont $w^{(1)},\dots,w^{(r)}$. Comme précédement, pour $m'\geq m$ on a $M_{m'}\in\mathrm{M}_r\left(\overline{\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}},\frac{1}{p}\right]\right)$ telle que $\gamma_i^{p^{m'}}(w)=M_{m'}w$. Par continuité de l'action de Γ_R, pour m' assez grand, on a $M_{m'}\in\mathrm{M}_r\left(\overline{\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$ (car $\widetilde{\mathbf{B}}_R=\bigcup\limits_n\frac{1}{p^n}\widetilde{\mathbf{A}}_R$) : quitte à augmenter m, on peut supposer que $M_m\in\mathrm{M}_r\left(\overline{\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]\right)$. Il suffit alors d'appliquer le (a) au sous-$\overline{\mathbf{A}_R^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$-module de W engendré par $w^{(1)},\dots,w^{(r)}$. □

Lemme 4.37. *Pour chaque $m\in\mathbf{N}$ on a $\varphi^{-m}(\mathbf{A}_S)=\overline{\mathbf{A}_S^{(0)}(\infty)}\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right]\cap\cdots\cap\overline{\mathbf{A}_S^{(d)}(\infty)}\left[[x_d]^{\frac{1}{p^m}}\right]$.*

Démonstration. Le corollaire 4.13 (ii) affirme que $\varphi^{-m}(\mathbf{A}_S)=\mathbf{A}_S\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\cdots[x_d]^{\frac{1}{p^m}}\right]$. On conclut en remarquant que $\overline{\mathbf{A}_S^{(0)}(\infty)}\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right]\cap\cdots\cap\overline{\mathbf{A}_S^{(d)}(\infty)}\left[[x_d]^{\frac{1}{p^m}}\right]$ est l'image de $\tau_m^{(0)}\circ\cdots\circ\tau_m^{(d)}$. □

Proposition 4.38. *Soit S_∞ une sous-R_∞-algèbre de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne. Soient $U, U'\colon \mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right) \to \mathrm{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}_S)\right)$ (resp. $U, U'\colon \mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right) \to \mathrm{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_S)\right)$) deux cocycles tels qu'il existe $M \in \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S\right)$ (resp. $M \in \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{B}}_S\right)$) avec $U'_g = M^{-1}U_g g(M)$ pour tout $g \in \mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$. Alors $M \in \mathrm{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}_S)\right)$ (resp. $M \in \mathrm{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_S)\right)$). En particulier, les applications*

$$\mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathrm{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}_S)\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S\right)\right)$$

et

$$\mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathrm{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_S)\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{B}}_S\right)\right)$$

sont injectives.

Démonstration. (*cf.* preuve du lemme 2.8) On va prouver la première assertion. La deuxième se traitant de façon analogue. Soit $S[p^{-1}]/R_n[p^{-1}]$ une extension finie étale de groupe de Galois $G_{S/R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}] = S[p^{-1}] \otimes_{R_n} R_\infty$. On a alors la suite exacte $0 \to \Gamma_S \to \mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right) \to G_{S/R} \to 0$.

Comme $\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ est topologiquement engendré par un nombre fini d'éléments (car $G_{S/R}$ est fini), il existe un entier m tel que $U_g, U'_g \in \mathrm{GL}_n\left(\varphi^{-m}(\mathbf{A}_S)\right)$ pour tout $g \in \mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$. Pour tout $g \in \mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$, on a $M^{-1}U_g g(M) = U'_g$, soit $g(M) = U_g^{-1}MU'_g$. Pour $i \in \{0, \dots, d\}$, notons W_i le sous-$\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$-module de $\widetilde{\mathbf{A}}_S$ engendré par les coefficients de la matrice M. Ce sous-module est stable par $\gamma_i^{p^m}$ et il est de type fini. Le lemme 4.36 assure que quitte à augmenter m, on a $W_i \subset \overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$. La matrice M est donc à coefficients dans $\overline{\mathbf{A}_S^{(0)}(\infty)}\left[[x_0]^{\frac{1}{p^m}}\right] \cap \cdots \cap \overline{\mathbf{A}_S^{(d)}(\infty)}\left[[x_d]^{\frac{1}{p^m}}\right]$. Cette intersection n'est autre que $\varphi^{-m}(\mathbf{A}_S)$ en vertu du lemme 4.37. En particulier, les cocycles U et U' sont déjà cohomologues dans $\mathrm{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}_S)\right)$. □

Soit V un $\mathbf{Z}_p$-module (resp. un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel) de type fini muni d'une action linéaire et continue de $\mathcal{G}_R$. On pose

$$\mathcal{D}^\dagger(V) := \left(\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{Z}_p} V\right)^{\mathcal{H}_R}, \qquad \mathcal{D}(V) := \left(\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V\right)^{\mathcal{H}_R}.$$

On voit que $\mathcal{D}^\dagger(V)$ (resp. $\mathcal{D}(V)$) est un $\mathbf{A}_R^\dagger$-module (resp. un $\mathbf{A}_R$-module) muni d'une action résiduelle de Γ_R et d'un opérateur de Frobenius φ (défini par $\varphi \otimes 1$ sur $\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{Z}_p} V$).

On définit la catégorie des (φ, Γ_R)-modules étales sur $\mathbf{A}_R^\dagger$ (resp. sur $\mathbf{A}_R$) comme étant la catégorie des $\mathbf{A}_R^\dagger$-modules (resp. des $\mathbf{A}_R$-modules) M de type fini munis d'une action semilinéaire de Γ_R et d'un opérateur semi-linéaire φ commutant à l'action de Γ_R, qui sont étales *i.e.* tels que $\varphi \otimes 1\colon M \otimes_{\mathbf{A}_R}^{\varphi} \mathbf{A}_R \to M$ est un isomorphisme.

Theorème 4.39. *Le foncteur $\mathcal{D}$ définit une équivalence de catégories abéliennes tensorielles entre la catégorie des $\mathbf{Z}_p$-modules de type fini munis d'une action linéaire et continue de $\mathcal{G}_R$ et celle des (φ, Γ_R)-modules étales sur $\mathbf{A}_R$. Un quasi-inverse est donné par $D \mapsto \left(\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}_R} D\right)_{\varphi=1}$.*

Démonstration. [2, Thm. 7.11]. □

Theorème 4.40. *Soit V un $\mathbf{Z}_p$-module (resp. un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel) de type fini muni d'une action linéaire et continue de $\mathcal{G}_R$. Le $\mathbf{A}_R^\dagger$-module (resp. $\mathbf{B}_R^\dagger$-module) $\mathcal{D}^\dagger(V)$ est étale, de type fini, projectif si V est libre. En outre,*

$$V = \left(\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{A}_R^\dagger} \mathcal{D}^\dagger(V)\right)_{\varphi=1} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}(V) = \mathbf{A}_R \otimes_{\mathbf{A}_R^\dagger} \mathcal{D}^\dagger(V).$$

Par ailleurs, si V est libre de rang n il existe une sous-R_∞-algèbre S_∞ de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne et $\mathbf{A}_S^\dagger \otimes_{\mathbf{A}_R^\dagger} \mathcal{D}^\dagger(V)$ est un $\mathbf{A}_S^\dagger$-module libre de rang n.

Démonstration. Le cas où V est un $\mathbf{Z}_p$-module de torsion résulte du théorème 4.39 puisque $\mathbf{A}^\dagger/p^n\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}/p^n\mathbf{A}$.

Supposons que V est un $\mathbf{Z}_p$-module de type fini sans torsion. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base du $\mathbf{Z}_p$-module V. L'action de $\mathcal{G}_R$ sur V est décrite dans cette base par un cocycle continu $U\colon \mathcal{G}_R \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$. Soit $\alpha \in \mathrm{H}^1\left(\mathcal{G}_R, \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger\right)\right)$ l'image de ce cocycle. D'après le théorème 4.35, il existe une sous-R_∞-algèbre S_∞ de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne telle que $\alpha \in \mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathrm{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}_S^\dagger)\right)\right)$: il existe $M_0 \in \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger\right)$ tel que $g \mapsto M_0^{-1}U_g g(M_0)$ est trivial sur $\mathcal{H}_S$, et à valeurs dans $\mathrm{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}_S^\dagger)\right)$.

D'après le théorème 4.39, on a $\mathcal{D}(V)/p\mathcal{D}(V) = \mathcal{D}(V/pV)$. Le module V/pV étant fini, quitte à remplacer S_∞ par une extension finie, on peut supposer que le $\mathbf{A}_S$-module $\mathcal{D}(V) \otimes_{\mathbf{A}_R} \mathbf{A}_S$ est libre de rang égal au rang du $\mathbf{Z}_p$-module V. Soit $\{r_1, \dots, r_n\}$ une base de ce $\mathbf{A}_S$-module et $N \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{A})$ la matrice de changement de base de $\{e_1, \dots, e_n\}$ dans $\{r_1, \dots, r_n\}$: le cocycle $g \mapsto N^{-1}U_g g(N)$ est trivial sur $\mathcal{H}_S$ et à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_S)$. Soit β son image dans $\mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_S)\right)$.

Comme α et β ont même image dans $\mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S\right)\right)$, ils ont même image dans $\mathrm{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathrm{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}_S)\right)\right)$ en vertu de la proposition 4.38. Le groupe $\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ étant topologiquement de type fini, on peut supposer (quitte à changer la base $\{r_1, \ldots, r_n\}$ et à remplacer M_0 par $\varphi^k(M_0)$ pour $k \in \mathbf{N}$ convenable) que $M_0^{-1}U_g g(M_0) = N^{-1}U_g g(N)$ pour tout $g \in \mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$.

Soit $M = NM_0^{-1} \in \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}\right)$. Comme $g \mapsto M_0^{-1}U_g g(M_0)$ et $g \mapsto N^{-1}U_g g(N)$ sont triviaux sur $\mathcal{H}_S$, on a $g(M) = M$ pour tout $g \in \mathcal{H}_S$ et donc $M \in \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}_S\right)$. Par ailleurs, on a $M^{-1}U_g g(M) = U_g$ pour tout $g \in \mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$. La proposition 4.38 affirme qu'on a en fait $M \in \mathrm{GL}_n\left(\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}_S)\right)$. Là encore, quitte à remplacer, pour $k' \in \mathbf{N}$ convenable, M_0 et N par $\varphi^{k'}M_0$ et $\varphi^{k'}N$ respectivement, on peut supposer que $M \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbf{A}_S\right)$. On a donc $M_0 = M^{-1}N \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbf{A}\right) \cap \mathrm{GL}_n\left(\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger\right) = \mathrm{GL}_n\left(\mathbf{A}^\dagger\right)$.

En particulier, l'application naturelle $\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{A}_S^\dagger} \mathcal{D}_S^\dagger(V) \to \mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{Z}_p} V$ est un isomorphisme de $\mathcal{G}_R$-modules, où $\mathcal{D}_S^\dagger(V) = \left(\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{Z}_p} V\right)^{\mathcal{H}_S}$ est libre de rang n sur $\mathbf{A}_S^\dagger$ et muni d'une action de $\mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$. Rappelons que $\mathbf{A}_R^\dagger \subset \mathbf{A}_S^\dagger$ et $\mathbf{A}_R \subset \mathbf{A}_S$ sont finies étales et que $\mathbf{A}_S = \mathbf{A}_R \otimes_{\mathbf{A}_R^\dagger} \mathbf{A}_S^\dagger$ d'après la proposition 4.34. Par descente étale, le $\mathbf{A}_R^\dagger$-module $\mathcal{D}^\dagger(V) = \left(\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{Z}_p} V\right)^{\mathcal{H}_R}$ est projectif de rang n, muni d'une action de Γ_R et tel que $\mathcal{D}_S^\dagger(V) = \mathbf{A}_S^\dagger \otimes_{\mathbf{A}_R^\dagger} \mathcal{D}_R^\dagger(V)$. En étendant les scalaires à $\mathbf{A}_R$ et par fidèle platitude de $\mathbf{A}_S$ sur $\mathbf{A}_R$, on en déduit que $\mathcal{D}(V) = \mathbf{A}_R \otimes_{\mathbf{A}_R^\dagger} \mathcal{D}^\dagger(V)$.

De même, en utilisant les égalités $\left(\mathbf{A}^\dagger\right)_{\varphi=1} = \mathbf{Z}_p$ (car $\mathbf{Z}_p \subseteq \left(\mathbf{A}^\dagger\right)_{\varphi=1} \subseteq \mathbf{A}_{\varphi=1} = \mathbf{Z}_p$) et $\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{A}_S^\dagger} \mathcal{D}_S^\dagger(V) = \mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{Z}_p} V$, on a bien $V = \left(\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{A}_R^\dagger} \mathcal{D}^\dagger(V)\right)_{\varphi=1}$.

Si V est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une action linéaire continue de $\mathcal{G}_R$, il contient (par compacité de $\mathcal{G}_R$) un réseau stable par $\mathcal{G}_R$. Il existe donc $S_\infty\left[p^{-1}\right]$ comme précédemment, tel que $\mathcal{D}(V) \otimes_{\mathbf{B}_R} \mathbf{B}_S$ est un $\mathbf{B}_S$-module libre comme de rang n. Le raisonnement est alors analogue au précédent. □

4.41. **Application : l'opérateur ψ.**

Dans la théorie classique des (φ, Γ_K)-modules, on définit un inverse à gauche du Frobenius, noté ψ, qui est très important pour étudier la cohomologie d'Iwasawa des (φ, Γ_K)-modules (voir [8]).

D'après le corollaire 4.13, si S_∞ est une sous-R_∞-algèbre normale de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]$ est finie étale comme $R_\infty[p^{-1}]$-algèbre, le $\mathbf{A}_S$-module $\varphi^{-1}(\mathbf{A}_S)$ est libre, de base $\left([x_0]^{\alpha_0/p} \cdots [x_d]^{\alpha_d/p}\right)_{0 \leq \alpha_i < p}$. Comme $\mathbf{A}$ est le complété, pour la topologie p-adique, de la réunion des $\mathbf{A}_S$, le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{A}$ est lui aussi libre, de base $\left([x_0]^{\alpha_0/p} \cdots [x_d]^{\alpha_d/p}\right)_{0 \leq \alpha_i < p}$. On pose alors

$$\begin{aligned} \psi \colon \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A} \\ a &\longmapsto \frac{1}{p^{d+1}} \mathrm{Tr}_{\varphi^{-1}(\mathbf{A})/\mathbf{A}}(a) \end{aligned}$$

Les propriétés suivantes sont immédiates :

(i) $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$;

(i) ψ commute à l'action de $\mathrm{Aut}\left(\overline{R}/\widetilde{R}\right)$ donc en particulier à l'action de $\mathcal{G}_R$;

(iii) si $a \in \mathbf{A}$ s'écrit $\varphi^{-1}(a) = \sum\limits_{\substack{\underline{\alpha} \in \mathbf{N}^{d+1} \\ 0 \leq \alpha_i < p}} a_{\underline{\alpha}} \prod\limits_{i=0}^{d} [x_i]^{\frac{\alpha_i}{p}}$, on a $\psi(a) = a_{\underline{0}}$;

(iv) si S_∞ est une sous-R_∞-algèbre normale de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]$ est finie étale comme $R_\infty[p^{-1}]$-algèbre, alors la restriction de ψ à $\mathbf{A}_S$ coïncide avec $\tau_{S,0}^{(0)} \circ \cdots \circ \tau_{S,0}^{(d)} \circ \varphi^{-1}$;

(v) $\psi\left(\mathbf{A}^\dagger\right) \subset \mathbf{A}^\dagger$.

Comme ψ commute à l'action de $\mathcal{G}_R$, si V est un $\mathbf{Z}_p$-module de type fini muni d'une action linéaire et continue de $\mathcal{G}_R$, les modules $\mathcal{D}(V)$ et $\mathcal{D}^\dagger(V)$ héritent d'une action de ψ qui commute à celle de Γ_R. Alors,

Proposition 4.42. *Le module $\mathcal{D}(V)^{\psi=0}$ admet une décomposition*

$$\mathcal{D}(V)^{\psi=0} = \mathcal{D}(V)_0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}(V)_d$$

telle que pour chaque $i \in \{0, \ldots, d\}$,

(i) $\mathcal{D}(V)_i$ est un sous-$\varphi(\mathbf{A}_R)$-module de $\mathcal{D}(V)$ stable par Γ_R ;

(ii) la formation de $\mathcal{D}(V)_i$ est fonctorielle en V ;

(iii) si $m \in \mathbf{N}$ est tel que $\gamma_i^{p^m} \in \Gamma_R$ (par exemple $m \geq m_0$), alors $\gamma_i^{p^m} - 1$ est bijectif sur $\mathcal{D}(V)_i$, et admet un inverse continu si $pV = 0$.

Démonstration. • Supposons V de torsion. Soit S_∞ une sous-R_∞-algèbre de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne et $\mathrm{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}]/S_\infty[p^{-1}]\right)$ agit trivialement sur V. Soit $H_{S/R} = \mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]\right)$. On a alors $\mathcal{D}(V) = \left(V \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A}_S\right)^{H_{S/R}}$. Pour tout $i \in \{0, \ldots, d\}$ et $m \in \mathbf{N}$ soit $\tau_{S,m}^{(i)} \colon \widetilde{\mathbf{A}}_S \to \overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$ le projecteur introduit dans la proposition 4.15. On pose

$$\mathcal{D}(V)_d := \Big((1-1\otimes\tau_{S,0}^{(d)})\circ\big(1\otimes\varphi^{-1}\big)\big(\mathbf{A}_S\otimes_{\mathbf{Z}_p}V\big)\Big)^{H_{S/R}}$$

$$\mathcal{D}(V)_i := (1-1\otimes\tau_{S,0}^{(i)})\circ(1\otimes\tau_{S,0}^{(i+1)})\circ\cdots\circ(1\otimes\tau_{S,0}^{(d)})\circ(1\otimes\varphi^{-1})\big(\mathbf{A}_S\otimes_{\mathbf{Z}_p}V\big)\Big)^{H_{S/R}}\quad\text{si}\quad 0\le i<d.$$

Comme $\tau_{S,0}^{(i)}$ est idempotent, le propriétés (i) et (ii) sont claires. On remarque aussi que cette définition ne dépend pas de la choix de S_∞, grâce à la propriété 4.15 (iv).

Soit $m_V\in\mathbf{N}$ tel que pour tout $m\ge m_V$ et $i\in\{0,\dots,d\}$, l'élément $\gamma_i^{p^m}$ agit trivialement sur V (rappelons que V est fini) et $\gamma_i^{p^m}\in\Gamma_S$. Fixons $m\ge m_V$. D'après le proposition 4.26, si $z\in\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^{m+1}}}\right]$ on a une écriture unique $z=\sum_{j=0}^{p-1}z_j[x_i]^{\frac{j}{p^{m+1}}}$, avec $z_j\in\overline{\mathbf{A}_S^{(i)}(\infty)}\left[[x_i]^{\frac{1}{p^m}}\right]$. On a de plus $\tau_{S,m}^{(i)}(z)=0$ si et seulement si $z_0=0$ et, dans ce cas, on a (avec les notations des lemmes 4.29 et 4.31) $\left(1-\gamma_i^{p^m}\right)(z)=\sum_{j=1}^{p-1}\rho_{m,j,1}^{(i)}(z_j)[x_i]^{\frac{j}{p^{m+1}}}$. Pour $m\ge m_V$, les applications

$$\rho_{m,j,1}^{(i)}\colon \tau_{S,m}^{(i)}\left(\mathbf{A}_S\left[[x_0]^{\frac{1}{p^{m+1}}},\dots,[x_d]^{\frac{1}{p^{m+1}}}\right]\right)\to\tau_{S,m}^{(i)}\left(\mathbf{A}_S\left[[x_0]^{\frac{1}{p^{m+1}}},\dots,[x_d]^{\frac{1}{p^{m+1}}}\right]\right)$$

sont bijectives avec d'inverse continu modulo p par 4.29 et 4.31. On déduit (*cf.* propositions 4.30 et 4.32) que pour $m\ge m_V$, l'application $1-\gamma_i^{p^m}$ est bijective et admet une inverse continu modulo p sur

$$(1-1\otimes\tau_{S,m}^{(i)})\circ(1\otimes\tau_{S,m}^{(i+1)})\circ\cdots\circ(1\otimes\tau_{S,m}^{(d)})\left(\mathbf{A}_S\left[[x_0]^{\frac{1}{p^{m+1}}},\dots,[x_d]^{\frac{1}{p^{m+1}}}\right]\right).$$

Comme $\tau_{S,0}^{(i)}=\varphi^m\circ\tau_{S,m}^{(i)}\circ\varphi^{-m}$ d'après la proposition 4.15 (ii), il en est de même sur

$$(1-1\otimes\tau_{S,0}^{(i)})\circ(1\otimes\tau_{S,0}^{(i+1)})\circ\cdots\circ(1\otimes\tau_{S,0}^{(d)})\left(\mathbf{A}_S\left[[x_0]^{\frac{1}{p}},\dots,[x_d]^{\frac{1}{p}}\right]\right).$$

En tensorisant par V (rappelons que $\gamma_i^{p^m}$ agit trivialement sur V pour $m\ge m_V$), on en déduit que l'application $1-\gamma_i^{p^m}$ est bijective et admet une inverse continu modulo p sur $\mathcal{D}(V)_i$ pour $m\ge m_V$.

Si $m<m_V$, on écrit $1-\gamma_i^{p^{m_V}}=(1-\gamma_i^{p^m})(1+\gamma_i^{p^m}+\cdots+\gamma_i^{p^m(p^{m_V-m}-1)})$: la propriété (iii) en résulte.

• Dans le cas général, on écrit V comme $\varprojlim_n V/p^nV$ et on pose $\mathcal{D}(V)_i=\varprojlim_n\mathcal{D}\big(V/p^nV\big)_i$. On se ramène alors au cas précédent par dévissage. □

Soit V un $\mathbf{Z}_p$-module libre de type fini muni d'une action linéaire et continue de $\mathcal{G}_R$. Posons $\mathcal{D}^\dagger(V)_i=\mathcal{D}(V)_i\cap\mathcal{D}^\dagger(V)$.

Lemme 4.43. *Soit* $\left(\mathbf{A}_R^{(0,r]}\right)_i:=\big(1-\tau_{R,0}^{(i)}\big)\left(\mathbf{A}_R^{(0,r]}\left[[x_0]^{\frac{1}{p}},\dots,[x_i]^{\frac{1}{p}}\right]\right)$. *Pour tout* $m\ge m_0$ *et* $r<\frac{\widetilde{r}_R}{p^m}$ *(voir le lemme 4.29 pour les notations), l'application* $1-\gamma_i^{p^m}$ *est bijective d'inverse continu sur* $\left(\mathbf{A}_R^{(0,r]}\right)_i$.

Démonstration. Il résulte des propositions 4.30 et 4.32 que si $m\ge m_0$ et $r<\frac{\widetilde{r}_R}{p^m}$, l'application $1-\gamma_i^{p^m}$ est bijective d'inverse continu sur $\big(1-1\otimes\tau_{R,m}^{(i)}\big)\circ(1\otimes\tau_{R,m}^{(i+1)})\circ\cdots\circ(1\otimes\tau_{R,m}^{(d)})\left(\mathbf{A}_R^{(0,p^mr]}\left[[x_0]^{\frac{1}{p^{m+1}}},\dots,[x_d]^{\frac{1}{p^{m+1}}}\right]\right)$. Mais $\mathbf{A}_R^{(0,p^mr]}\left[[x_0]^{\frac{1}{p^{m+1}}},\dots,[x_d]^{\frac{1}{p^{m+1}}}\right]=\varphi^{-m}\left(\mathbf{A}_R^{(0,r]}\left[[x_0]^{\frac{1}{p}},\dots,[x_d]^{\frac{1}{p}}\right]\right)$. Comme $\varphi^{-m}\circ(1\otimes\tau_{R,0}^{(i)})=\tau_{R,m}^{(i)}\circ\varphi^{-m}$ pour tout $i\in\{0,\dots,d\}$ (proposition 4.15 (ii)), on en déduit que si $m\ge m_0$ et $r<\frac{\widetilde{r}_R}{p^m}$, l'application $1-\gamma_i^{p^m}$ est bijective d'inverse continu sur $\varphi^{-m}\left(\left(\mathbf{A}_R^{(0,r]}\right)_i\right)$. En appliquant φ^m, on voit qu'il en est de même sur $\left(\mathbf{A}_R^{(0,r]}\right)_i$. □

Pour $i\in\{0,\dots,d\}$, posons $\mathcal{D}^\dagger(V)_i=\mathcal{D}^\dagger(V)\cap\mathcal{D}(V)_i$. On munit $\mathbf{A}^\dagger=\bigcup_{r\in\mathbf{Q}_{>0}}\mathbf{A}^{(0,r]}$ de la topologie de la limite inductive. En considérant $\mathcal{D}^\dagger(V)_i\subset\mathcal{D}^\dagger(V)\subset\mathbf{A}^\dagger\otimes_{\mathbf{Z}_p}V\cong\big(\mathbf{A}^\dagger\big)^n$, on munit $\mathcal{D}^\dagger(V)_i$ de la topologie induite par celle de $\big(\mathbf{A}^\dagger\big)^n$. On remarque que $\mathcal{D}^\dagger(V)_i$ est fermé pour cette topologie (car c'est le cas de $\big(1-\tau_{S,0}^{(i)}\big)\circ(1\otimes\tau_{S,0}^{(i+1)})\circ\cdots\circ(1\otimes\tau_{S,0}^{(d)})(\mathbf{A}_S)$ dans $\mathbf{A}_S$). Montrons l'analogue de [7, Prop. II.6.1] dans le cas relatif :

Proposition 4.44. *Si* $m\in\mathbf{N}$ *est tel que* $\gamma_i^{p^m}\in\Gamma_R$, *l'application* $\gamma_i^{p^m}-1$ *est bijective sur* $\mathcal{D}^\dagger(V)_i$, *d'inverse continu.*

Démonstration. Commençons par introduire quelques notations. Si S_∞ est une sous-R_∞-algèbre de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne, on pose $\mathcal{D}_S^\dagger(V)=\mathbf{A}_S^\dagger\otimes_{\mathbf{A}_R^\dagger}\mathcal{D}^\dagger(V)$. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, soit $T_\infty^{(n)}$ une sous-S_∞-algèbre de $\overline{R}$ telle que $T_\infty^{(n)}[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne et $\mathrm{Gal}\big(\overline{R}[p^{-1}]/T_\infty^{(n)}[p^{-1}]\big)$ agit trivialement sur V/p^nV. Soit $H_{T^{(n)}/S}=\mathrm{Gal}\big(T_\infty^{(n)}[p^{-1}]/S_\infty[p^{-1}]\big)$. On pose

$$\mathcal{D}_S\big(V/p^nV\big)_i=\Big((1-1\otimes\tau_{T^{(n)},0}^{(i)})\circ(1\otimes\tau_{T^{(n)},0}^{(i+1)})\circ\cdots\circ(1\otimes\tau_{T^{(n)},0}^{(d)})\circ(1\otimes\varphi^{-1})\big(\mathbf{A}_{T^{(n)}}\otimes_{\mathbf{Z}_p}(V/p^nV)\big)\Big)^{H_{T^{(n)}/S}}$$

et $\mathcal{D}_S(V)_i = \varprojlim_n \mathcal{D}_S\big(V/p^nV\big)_i$. Finalement, on pose $\mathcal{D}_S^\dagger(V)_i = \mathcal{D}_S(V)_i \cap \mathcal{D}_S^\dagger(V)$.

On démontre la proposition suivant [7, Prop. II.6.4]. Comme $1-\gamma_i^{p^{m+n}} = (1-\gamma_i^{p^m})(1+\gamma_i^{p^m}+\cdots+\gamma_i^{p^{m+n}-p^m})$, il suffit de verifier que $1-\gamma_i^{p^m}$ est bijectif sur $\mathcal{D}^\dagger(V)_i$ avec inverse continu pour m assez grand. D'après le théorème 4.40, il existe une sous-R_∞-algèbre S_∞ de $\overline{R}$ telle que $S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne et $\mathcal{D}_S^\dagger(V)$ est un $\mathbf{A}_S^\dagger$-module libre de rang n, où n est le rang du $\mathbf{Z}_p$-module V. Fixons une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de $\mathcal{D}_S^\dagger(V)$ sur $\mathbf{A}_S^\dagger$. Alors, $\mathcal{D}_S = \mathbf{A}_S \otimes_{\mathbf{A}_R} \mathcal{D}(V)$ est un $\mathbf{A}_S$-module libre de base $(e_1,\ldots,e_n)$. Supposons que S_∞ soit la normalisation de $S_N \otimes_{R_N} R_\infty$ où $N \in \mathbf{N}$ et $R_N \subset S_N$ est une R_N-algèbre normale et finie, telle que $S_N[p^{-1}]$ est étale comme $R_N[p^{-1}]$-algèbre. On prend m tel que $\gamma_i^{p^m} \in \Gamma_{S_N}$.

Comme $\mathcal{D}^\dagger(V)$ est un module étale, la famille $(\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n))$ est encore une base de $\mathcal{D}_S^\dagger(V)$ sur $\mathbf{A}_S^\dagger$. Par ailleurs, pour $n \in \mathbf{N}$, on a $\mathbf{A}_{T^{(n)}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} (V/p^nV) = \mathbf{A}_{T^{(n)}} \otimes_{\mathbf{A}_S} (\mathcal{D}_S(V)/p^n\mathcal{D}_S(V))$ d'où

$$\mathcal{D}_S(V/p^nV)_i = (1-1\otimes\tau_{S,0}^{(i)})\circ(1\otimes\tau_{S,0}^{(i+1)})\circ\cdots\circ(1\otimes\tau_{S,0}^{(d)})\circ(1\otimes\varphi^{-1})\big(\mathcal{D}_S(V)/p^n\mathcal{D}_S(V)\big)$$

Comme $e_j \in \mathcal{D}_S^\dagger(V)$, on a $(1\otimes\tau_{S,0}^{(i)})(e_j) = e_j$, et donc (avec des notations évidentes)

$$\mathcal{D}_S(V/p^nV)_i = \bigoplus_{j=1}^d \big((\mathbf{A}_S)_i/p^n(\mathbf{A}_S)_i\big)e_j.$$

En passant à la limite projective sur n, on a $\mathcal{D}_S(V)_i = \bigoplus_{j=1}^d (\mathbf{A}_S)_i e_j$, d'où $\mathcal{D}_S^\dagger(V)_i = \bigoplus_{j=1}^d (\mathbf{A}_S^\dagger)_i e_j$ (on a $(\mathbf{A}_S^\dagger)_i = (\mathbf{A}_S)_i \cap \mathbf{A}^\dagger$).

Si $z = \sum_{j=1}^n z_j e_j \in \mathcal{D}_S^\dagger(V)_i$. En utilisant le lemme 4.43, on pose

$$f_i(z) = \sum_{j=1}^n \left(1-\gamma_i^{p^m}\right)^{-1}(z_j)e_j.$$

On a alors, $z - f_i\big((1-\gamma_i^{p^m})(z)\big) = -f_i\left(\sum_{j=1}^n \gamma_i^{p^m}(z_j)(1-\gamma_i^{p^m})(e_j)\right)$. On pose

$$\begin{aligned} g_{i,z}\colon \mathcal{D}_S^\dagger(V)_i &\longrightarrow \mathcal{D}_S^\dagger(V)_i \\ y &\longmapsto y - f_i\big((1-\gamma_i^{p^m})(y)-z\big). \end{aligned}$$

L'action de Γ_{S_N} sur $\mathcal{D}^\dagger(V)$ est décrite, dans la base $\{e_1,\ldots,e_n\}$, par un cocycle continu de $\mathrm{Gal}(S_\infty[p^{-1}]/S_N[p^{-1}])$ a valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_S^\dagger)$. On choisit $r < \frac{\widetilde{r}_S}{p^m}$ tel que $e_j \in \mathbf{A}^{(0,r]} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V$ pour $j \in \{1,\ldots,n\}$ et tel que l'image $C = C_m$ de $\gamma_i^{p^m}$ est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_S^{(0,r]})$. Par continuité, il existe $m' \geq m$, tel que $m \geq m_0$ et $w_r(1-C_{m'}) > c_2 + \frac{r}{p-1}$ (avec les notations des propositions 4.30 et 4.32 pour $\widetilde{\mathbf{A}}_S$). On a pas forcément $r < \frac{\widetilde{r}_S}{p^{m'}}$, mais montrons qu'on peut s'y ramener. Posons $r' = \frac{r}{p^{m'-m}}$: on a $r' < \frac{\widetilde{r}_S}{p^{m'}}$, et en vertu de du lemme 4.7, on a $w_{r'}(1-C_{m'}) \geq \frac{r'}{r} w_r(1-C_{m'})$. Rappelons qu'on a $c_2(r) = \frac{p(c_S+2)r}{p-1}$ (*cf.* lemme 4.17). On a donc $w_{r'}(1-C_{m'}) > \frac{p(c_S+2)r'}{p-1} + \frac{r'}{p-1} = c_2(r') + \frac{r'}{p-1}$. Quitte à remplacer m par m' et r par r', on peut donc supposer que $m \geq m_0$, $w_r(1-C) > c_2 + \frac{r}{p-1}$ et $r < \frac{\widetilde{r}_S}{p^m}$.

Pour $z \in \bigoplus_{j=1}^d \big(\mathbf{A}_S^{(0,r]}\big)_i e_j$ on pose $w_r(z) = \min_{1\leq j\leq n}(w_r(z_j))$, où $(z_1,\ldots,z_n)$ est l'image de z dans $\big(\mathbf{A}^{(0,r]}\big)^n$ par le composé $\bigoplus_{j=1}^d \big(\mathbf{A}_S^{(0,r]}\big)_i e_j \subseteq \mathbf{A}^{(0,r]} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V \xrightarrow{\sim} \big(\mathbf{A}^{(0,r]}\big)^n$. Remarquons que cette définition ne dépend pas du choix de la base $(e_1,\ldots,e_n)$ du $\mathbf{A}^{(0,r]}$-module $\mathbf{A}^{(0,r]} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V$.

D'après les propositions 4.30 et 4.32, on a alors $w_r\big(f_i(z)\big) \geq w_r(z) - c_2 - \frac{r}{p-1}$, et donc $w_r\big(g_{i,0}(y)\big) \geq w_r(y) + w_r(1-C) - c_2 - \frac{r}{p-1}$. Pour y_1 et $y_2 \in \bigoplus_{j=1}^d \big(\mathbf{A}_S^{(0,r]}\big)_i e_j$ on a alors $w_r\big(g_{i,z}(y_1) - g_{i,z}(y_2)\big) = w_r\big(g_{i,0}(y_1-y_2\big) \geq w_r(y_1-y_2) + w_r(1-C) - c_2 - \frac{r}{p-1}$. En particulier, l'application $g_{i,z}$ est contractante pour la topologie définie par w_r : elle admet donc un unique point fixe y_z. Comme f_i est une bijection, y_z est l'unique solution de l'équation $(1-\gamma_i^{p^m})(y) = z$.

Par ailleurs, y_z est la limite de la suite définie par $y_0 = z$ et $y_{n+1} = g_{i,z}(y_n)$: on a $w_r(y_z - z) \geq w_r\big(g_{i,z}(z)-z\big)$. Comme $g_{i,z}(z) - z = -f_i\big((1-\gamma_i^{p^m})(z)-z\big) = f_i\big(\gamma_i^{p^m}(z)\big)$, on a en outre $w_r(y_z - z) \geq w_r(z) - c_2 - \frac{p}{p-1}$. L'application $\big(1-\gamma_i^{p^m}\big)^{-1}$ est donc bien définie et continue sur $\bigoplus_{j=1}^d \big(\mathbf{A}_S^{(0,r]}\big)_i e_j$. Mais $\mathcal{D}_S^\dagger(V)_i = \varinjlim_{0<r<\widetilde{r}_S} \bigoplus_{j=1}^d \big(\mathbf{A}_S^{(0,r]}\big)_i e_j$, muni de la topologie de la limite inductive. On en déduit que $\big(1-\gamma_i^{p^m}\big)^{-1}$ est bien défini et continu sur $\mathcal{D}_S^\dagger(V)_i$.

On a $\mathcal{D}^\dagger(V)_i = \left(\mathcal{D}^\dagger_S(V)_i\right)^{H_{S/R}}$, où $H_{S/R} = \mathrm{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}]\right)$. Le groupe $\mathbf{Z}_p\,\gamma_i$ agit par conjugaison sur le groupe fini $H_{S/R}$ (car $\mathcal{H}_R$ est distingué dans $\mathcal{G}_R$). Le noyau de cette action est un sous-groupe ouvert d'indice fini : quitte à augmenter m, on peut supposer que $g\gamma_i^{p^m} = \gamma_i^{p^m} g$ pour tout $g \in H_{S/R}$. Si $z \in \mathcal{D}^\dagger(V)_i$, on a alors $g\big(1-\gamma_i^{p^m}\big)^{-1}(z) = \big(1-\gamma_i^{p^m}\big)^{-1}(g(z)) = \big(1-\gamma_i^{p^m}\big)^{-1}(z)$. Ainsi, $\big(1-\gamma_i^{p^m}\big)^{-1}\left(\mathcal{D}^\dagger(V)_i\right) \subset \left(\mathcal{D}^\dagger_S(V)_i\right)^{H_{S/R}} = \mathcal{D}^\dagger(V)_i$ et la conclusion suit. □

4.45. **Appendicite aiguë.**

Soit B un sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ fermé pour la topologie faible, contenant π et tel que $B \cap p\widetilde{\mathbf{A}}_R = pB$. Si $b \in \mathbf{N}$, on note $D_b = B\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ l'image de $B\{u\}/(\pi^b u - p)$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ (où $B\{u\}$ désigne l'anneau des polyômes en l'indéterminée u et à coefficients dans B complété pour la topologie faible).

Lemme 4.46. *L'application naturelle $B/pB \to D_b/\frac{p}{\pi^b}D_b$ est un isomorphisme : on a $D_b \cap p^n\widetilde{\mathbf{A}}_R = \left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n D_b$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. En particulier, $D_b/\left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n D_b$ est sans π-torsion et D_b est séparé et complet pour la topologie $\frac{p}{\pi^b}$-adique.*

Démonstration. Le composé $B/pB \to D_b/\frac{p}{\pi^b}D_b \to \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$ est l'inclusion. Comme l'application naturelle $B/pB \to D_b/\frac{p}{\pi^b}D_b$ est surjective, c'est un isomorphisme. L'anneau D_b étant sans $\frac{p}{\pi^b}$-torsion, l'application $D_b/\frac{p}{\pi^b}D_b \to \left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n D_b/\left(\frac{p}{\pi^b}\right)^{n+1} D_b$ est un isomorphisme. Une récurrence sur n utilisant l'injectivité de $D_b/\frac{p}{\pi^b}D_b \to \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}$ montre alors l'injectivité de $D_b/\left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n D_b \to \widetilde{\mathbf{A}}_R/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_R$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Comme $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ est séparé et complet pour la topologie p-adique, et D_b fermé pour la topologie faible, D_b est aussi séparé et complet pour la topologie $\frac{p}{\pi^b}$-adique. □

Lemme 4.47. *Soit $h \in \mathbf{N}$ et $C = B\{t_1,\dots,t_h\}$ le complété, pour la topologie faible, de l'anneau de polynômes en les variables $t_1,\dots,t_h$. Soient $I \subseteq C$ un idéal et $\overline{z} = (\overline{z}_1,\dots,\overline{z}_h) \in (B/pB)^h$ un zéro de $I \otimes_B (B/pB)$. On suppose que l'application $\mathrm{d}\otimes_B(B/pB)$ est un isomorphisme quand on inverse $\overline{\pi}$, où $\mathrm{d}\colon I/I^2 \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^h (C/I)\,\mathrm{d}\,t_j$ est induite par la dérivation. Alors il existe un unique zéro $z = (z_1,\dots,z_h) \in \widetilde{\mathbf{A}}_R^h$ relevant $\overline{z}$. En outre, il existe $b \in \mathbf{N}$ tel que $z \in D_b^h$.*

Démonstration. Soient $f_1,\dots,f_h \in I$ tels que $\mathrm{d}(f_1),\dots,\mathrm{d}(f_h)$ engendrent le $(C/I)\left[[\overline{\pi}]^{-1}\right]$-module $\left(\bigoplus_{j=1}^h (C/I)\,\mathrm{d}\,t_j\right)\left[[\overline{\pi}]^{-1}\right]$. Soit $c \in \mathbf{N}$ tel que $\overline{\pi}^c\,\mathrm{d}(f_j) \in \bigoplus_{j=1}^h (C/I)\,\mathrm{d}\,t_j$ pour tout $j \in \{1,\dots,h\}$. Soit $J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}\right)_{1\le i,j\le h} \in \mathrm{M}_h(C)$ la matrice jacobienne associée. Il existe $\overline{M} \in \mathrm{M}_h(B/pB)$ tel que $\overline{M}J(\overline{z}) = \overline{\pi}^{ch}\,\mathrm{I}_h$. Soit $b \ge 3ch$.

On construit par récurrence une suite $(z(n))_{n\in\mathbf{N}_{>0}}$ d'éléments de D_b^h telle que :

(1) $z(1) \equiv \overline{z} \mod \frac{p}{\pi^{ch}}D_b^h$ (rappelons que $B/pB \hookrightarrow D_b/\frac{p}{\pi^b}D_b$ d'après le lemme 4.46) ;

(2) $f_j(z(n)) \equiv 0 \mod \left(\frac{p}{\pi^{ch}}\right)^{n+1} D_b$ pour tout $j \in \{1,\dots,h\}$ et tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$;

(3) $z(n) \equiv z(n-1) \mod \frac{p^n}{\pi^{ch(n+1)}}D_b^h$ pour $n \ge 2$.

Remarquons que la suite ainsi construite converge dans D_b^h (pour la topologie faible) en vertu du lemme 4.46.

Soit M un relèvement de $\overline{M}$ dans $\mathrm{M}_h(B)$. Soit $z(0)$ un relèvement quelconque de $\overline{z}$ dans D_b^h : il existe $y(1) \in D_b^h$ tel que $f(z(0)) = (f_1(z(0),\dots,f_h(z(0)) = py(1)$. Posons $z(1) = z(0) - \frac{p}{\pi^{ch}}My(1)$. On a $f(z(1)) \equiv f(z(0)) - \frac{p}{\pi^{ch}}J(z(0))My(1) \mod \left(\frac{p}{\pi^{ch}}\right)^2 D_b^h$. Comme $MJ(z(0)) \equiv \pi^{ch}\,\mathrm{I}_h \mod p\mathrm{M}_h(B)$, on a $f(z(0)) - \frac{p}{\pi^{ch}}J(z(0))My(1) \equiv 0 \mod p^2D_b^h$ et donc $f(z(1)) \equiv 0 \mod \left(\frac{p}{\pi^{ch}}\right)^2 D_b^h$ *i.e.* (1) et (2) pour $n = 1$ sont vérifiés.

Soit $n \ge 2$ et supposons $z(1),\dots,z(n-1)$ construits. Il existe $y(n) \in D_b^h$ tel que $f(z(n-1)) = (f_1(z(n-1),\dots,f_h(z(n-1)) = \left(\frac{p}{\pi^{ch}}\right)^n y(n)$ et posons

$$z(n) = z(n-1) - \frac{p^n}{\pi^{ch(n+1)}}My(n).$$

La condition (3) est clairement vérifiée. Par ailleurs, on a

$$f(z(n)) \equiv f(z(n-1)) - \frac{p^n}{\pi^{ch(n+1)}}J(z(n-1))My(n) \mod \left(\frac{p^n}{\pi^{ch(n+1)}}\right)^2 D_b^h.$$

Comme $MJ(z(n-1)) \equiv \pi^{ch}\,\mathrm{I}_h \mod p\mathrm{M}_h(B)$, on a $f(z(n-1)) - \frac{p^n}{\pi^{ch(n+1)}}J(z(n-1))My(n) \equiv 0 \mod \left(\frac{p}{\pi^{ch}}\right)^{n+1} D_b^h$. En outre, on a $\left(\frac{p^n}{\pi^{ch(n+1)}}\right)^2 = \left(\frac{p}{\pi^{ch}}\right)^{2n-1}\frac{p}{\pi^{3ch}} \in \left(\frac{p}{\pi^{ch}}\right)^{n+1} D_b$ vu que $b \ge 3ch$ et $n \ge 2$.

Dans le cas où π est inversible dans B, la matrice $J(\overline{z})$ est inversible dans $\mathrm{M}_h(B/pB)$, ce qui implique l'unicité de la suite $\left(z(n) \mod p^{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}_{>0}}$. On en déduit l'unicité de $z \in \left(\widetilde{\mathbf{A}}_R\right)^h$ tel que $f_j(z) = 0$ pour $j \in \{1,\dots,h\}$ et tel que $z \equiv \overline{z} \mod p\left(\widetilde{\mathbf{A}}_R\right)^h$.

Soit $f\in I$, montrons que $f(z)=0$. Par hypothèse, et choix de $(f_1,\dots,f_h)$, il existe $a\in\mathbf{N}$ tel que $\pi^a f\in(f_1,\dots,f_h)+(I+pB)I$ (rappelons que d est C/I-linéaire). Pour $N\in\mathbf{N}$, on a alors $\pi^{Na}f\in(f_1,\dots,f_h)+(I+pB)^N I$. Par ailleurs, pour tout $g\in I$, on a $g(z)\in p\widetilde{\mathbf{A}}_R$ par définition de z : on a $\pi^{Na}f(z)\in p^{N+1}\widetilde{\mathbf{A}}_R$, *i.e.* $f(z)\in p^{N+1}\widetilde{\mathbf{A}}_R$. Comme $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ est séparé pour la topologie p-adique, on a fini. □

Lemme 4.48. *Soit B comme précédemment. Supposons de plus que $B\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$. Alors pour tout $k\in\mathbf{N}_{>0}$, la projection*

$$B\{t_1,\dots,t_h\}\longrightarrow(B/p^kB)\{\overline{t}_1,\dots,\overline{t}_h\}$$

est surjective, où $B\{t_1,\dots,t_h\}$ est le complété de l'anneau de polynômes $B[t_1,\dots,t_h]$ pour la topologie faible, et $(B/p^kB)\{\overline{t}_1,\dots,\overline{t}_h\}$ est le complété de l'anneau de polynômes $(B/p^kB)[\overline{t}_1,\dots,\overline{t}_h]$ pour la topologie π-adique.

Si en outre $U\subseteq B$ est une partie multiplicative telle que $U^{-1}B\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$, alors pour tout $k\in\mathbf{N}_{>0}$, la projection

$$\widehat{U^{-1}B}\to\left(U^{-1}B/p^kU^{-1}B\right)^{\wedge}$$

est surjective, où $\widehat{U^{-1}B}$ est le complété de $U^{-1}B$ pour la topologie faible et $\left(U^{-1}B/p^kU^{-1}B\right)^{\wedge}$ le complété de $U^{-1}B/p^kU^{-1}B$ pour la topologie π-adique.

Démonstration. Soit $\overline{b}\in(B/p^kB)\{\overline{t}_1,\dots,\overline{t}_h\}$ (resp. $\left(U^{-1}B/p^kU^{-1}B\right)^{\wedge}$). Écrivons-le comme la somme d'une série $\overline{b}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\overline{\pi}^n\overline{b}_n$ où $\overline{b}_n\in(B/p^kB)[\overline{t}_1,\dots,\overline{t}_h]$ (resp. $\overline{b}_n\in U^{-1}B/p^kU^{-1}B$). Relevons la suite $\left(\overline{b}_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ en une suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ où pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a $b_n\in B[t_1,\dots,t_h]$ (resp. $b_n\in U^{-1}B$). Montrons que la suite $(\pi^nb_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 dans $B[t_1,\dots,t_h]$ (resp. dans $U^{-1}B$) pour la topologie faible. En effet, la somme $b=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\pi^nb_n$ converge alors dans $B\{t_1,\dots,t_h\}$ (resp. dans $\widehat{U^{-1}B}$) en un relèvement de $\overline{b}$. D'après le lemme 4.46, on a

$$\widetilde{\mathbf{A}}_R^+/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\Big/\left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_R/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_R.$$

Comme $\pi^{b(n-1)}\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\big/\left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_R^+/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_R^+$, il suffit de montrer que pour tous $n,m\in\mathbf{N}$, on a $\pi^{n+m}\equiv0$ dans $\mathrm{W}_n\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+/\overline{\pi}^m\widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}^+\right)=\widetilde{\mathbf{A}}_R/\left(p^n,[\overline{\pi}]^m\right)\widetilde{\mathbf{A}}_R$. En effet, cela implique alors que $\pi^{bn+m}\equiv0$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\big/\left(\left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n,[\overline{\pi}]^m\right)\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ et donc que l'image de π^kb_k dans

$$\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}[t_1,\dots,t_h]\Big/\left(\left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n,[\overline{\pi}]^m\right)\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}[t_1,\dots,t_h]$$

$$(\text{resp. }\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\Big/\left(\left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n,[\overline{\pi}]^m\right)\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\})$$

est nulle pour $k\geq bn+m$, ce qui implique que la suite converge vers 0 dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}[t_1,\dots,t_h]$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$) pour la topologie faible (rappelons que d'après le lemme 4.46, on a $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\cap p^n\widetilde{\mathbf{A}}_R=\left(\frac{p}{\pi^b}\right)^n\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$).

On vu lors de la preuve de la proposition 4.3 (d) que $\pi=(1+a)[\overline{\pi}]$ avec $a=p[a_1]+p^2[a_2]+\cdots$ et $v_{\mathbf{E}}(a_k)\geq-\frac{p}{p-1}$ pour tout $k\in\mathbf{N}_{>0}$. Pour $N\in\mathbf{N}$, on a alors $\pi^N=[\overline{\pi}]^N(1+p[a_{N,1}]+p^2[a_{N,2}]+\cdots)$ avec $v_{\mathbf{E}}(a_{N,k})\geq-\frac{kp}{p-1}$. Comme $v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})=\frac{p}{p-1}$, on a $v_{\mathbf{E}}\left(\overline{\pi}^{n+m}a_{n+m,k}\right)\geq\frac{(n+m-k)p}{p-1}\geq\frac{mp}{p-1}$ pour $k\leq n$. □

Rappelons que $x_0=\varepsilon:=\left(\varepsilon^{(0)},\varepsilon^{(1)},\varepsilon^{(2)},\dots\right)\in\mathbf{E}_R^+$ et que pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$ on a posé $x_i=\left(T_i^{(0)},T_i^{(1)},\dots\right)\in\mathbf{E}_R^+$.

Proposition 4.49. *Il existe un unique sous-anneau $\mathbf{A}_R$ de $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ tel que :*

(a) *$\mathbf{A}_R$ est complet pour la topologie faible ;*

(b) *$p\widetilde{\mathbf{A}}_R\cap\mathbf{A}_R=p\mathbf{A}_R$;*

(c) *on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}\mathbf{A}_R \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \mathbf{E}_R \arrow[d, hook] \\ \widetilde{\mathbf{A}}_R \arrow[r, two heads] & \widetilde{\mathbf{E}}_{R_\infty}\end{tikzcd}$$

(d) *$[x_i]\in\mathbf{A}_R$ pour $i\in\{0,\dots,d\}$.*

(e) *il existe une sous-$\mathbf{A}_{\mathrm{W}(k)}^+$-algèbre $\mathbf{A}_R^+$ de $\mathbf{A}_R$ et $r_R\in\mathbf{Q}_{>0}$ tels que :*

  (i) *$\mathbf{A}_R^+/p\mathbf{A}_R^+\xrightarrow{\sim}\mathbf{E}_R^+$;*

  (ii) *si $\alpha,\beta\in\mathbf{N}_{>0}$ sont tels que $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{pr_R}{p-1}$, on a $\mathbf{A}_R^+\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p^\alpha}{\pi^\beta}\right\}$;*

  (iii) *$\mathbf{A}_R^+$ est complet pour la topologie faible.*

De plus, par unicité, $\mathbf{A}_R$ est stable sous l'action de Γ_R et de φ.

Insistons sur le fait qu'en général, contrairement à l'anneau $\mathbf{A}_R$, l'anneau $\mathbf{A}_R^+$ n'est pas unique (c'est déjà le cas lorsque $d=0$, et est lié à la ramification de R).

Démonstration. Remarquons tout d'abord qu'on peut remplacer (ii) par

(ii') il existe $b\in\mathbf{N}$ tel que $\mathbf{A}_R^+\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$.

En effet, la propriété (ii) est alors vérifiée avec $r_R=\frac{p-1}{pb}$, car si $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{pr_R}{p-1}$, on a $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p^\alpha}{\pi^\beta}\right\}$ vu que $\left(\frac{p}{\pi^b}\right)^\alpha=\pi^{\beta-b\alpha}\frac{p^\alpha}{\pi^\beta}$.

Montrons de plus qu'en fait, la propriété suivante est vérifiée :

(iii') pour tout $n\in\mathbf{N}_{>0}$, la topologie induite sur $\mathbf{A}_R^+/p^n\mathbf{A}_R^+$ par la topologie faible de $\widetilde{\mathbf{A}}_R/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_R$ est la topologie π-adique, et $\mathbf{A}_R^+/p^n\mathbf{A}_R^+$ est fermé pour cette topologie.

Cela implique la propriété (e)(iii) et que $\mathbf{A}_R=\varprojlim_n\left((\mathbf{A}_R^+/p^n\mathbf{A}_R^+)[\pi^{-1}]\right)$.

Posons $\mathbf{A}_{\mathrm{W}(k)}^+=\mathrm{W}(k)[\![\pi]\!]$ (rappelons que k est le corps résiduel de V et que $\pi=[\varepsilon]-1$). L'anneau $\mathbf{A}_{\mathrm{W}(k)}^+$ est un sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ complet pour la topologie faible et relève $\mathbf{E}_{\mathrm{W}(k)}^+=k[\![\overline{\pi}]\!]$. On note $\mathbf{A}_{\mathrm{W}(k)}$ l'adhérence, pour la topologie faible, de $\mathbf{A}_{\mathrm{W}(k)}^+[\pi^{-1}]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R$. Les conditions (a)-(e) impliquent que l'anneau $\mathbf{A}_R$, s'il existe, contient nécessairement l'anneau $\mathbf{A}_{\mathrm{W}(k)}$. La propriété (iii') est alors vérifiée en vertu de [2, Lemma 10.1].

Écrivons $\mathbf{E}_V^+=\mathbf{E}_{\mathrm{W}(k)}^+\left[\overline{t}_0\right]/\left(\overline{f}_0\right)$ (rappelons que $\mathbf{E}_V^+/\mathbf{E}_{\mathrm{W}(k)}^+$ est une extension d'anneaux de valuation discrète complets, d'extension résiduelle séparable, elle est donc monogène). Relevons le polynôme $\overline{f}_0$ en $f_0\in\mathbf{A}_{\mathrm{W}(k)}^+[t_0]$. D'après le lemme 4.47 appliqué à $B=\widetilde{\mathbf{A}}_R^+$, le polynôme f_0 admet un unique zéro z_0 relevant l'image de $\overline{t}_0$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R$, et on a $z_0\in\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ pour b assez grand. Notons alors $\mathbf{A}_V^+$ la sous-$\mathbf{A}_{\mathrm{W}(k)}^+$-algèbre de $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ engendrée par z_0 et $\mathbf{A}_V$ l'adhérence de $\mathbf{A}_V^+[\pi^{-1}]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ pour la topologie faible. En appliquant le lemme 4.47 à $B=\mathbf{A}_R$ (s'il existe), on voit que ce dernier contient nécessairement $\mathbf{A}_V$. En outre, l'application du lemme 4.47 à $B=\mathbf{A}_V$ montre que ce dernier ne dépend pas du choix du relèvement (notons qu'en général, ce n'est pas le cas de $\mathbf{A}_V^+$). La propriété (iii') est alors vérifiée en vertu de [2, Lemma 10.1].

On a $\mathbf{E}_{R^0}^+=\mathbf{E}_V^+\left\{x_1^{\pm1},\dots,x_d^{\pm1}\right\}$ (complété pour la topologie $\overline{\pi}$-adique) : posons $\mathbf{A}_{R^0}^+=\mathbf{A}_V^+\left\{[x_1]^{\pm1},\dots,[x_d]^{\pm1}\right\}$ (adhérence de $\mathbf{A}_V^+\left[[x_1]^{\pm1},\dots,[x_d]^{\pm1}\right]$ pour la topologie faible). D'après le lemme 4.48, on a $\mathbf{A}_{R^0}^+/p\mathbf{A}_{R^0}^+\xrightarrow{\sim}\mathbf{E}_{R^0}^+$. On note $\mathbf{A}_{R^0}$ l'adhérence, pour la topologie faible, de $\mathbf{A}_{R^0}^+[\pi^{-1}]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R$. On a encore $\mathbf{A}_{R^0}^+\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}_R^+\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$. D'après la propriété (c) et ce qui précède, l'anneau $\mathbf{A}_R$, s'il existe, contient nécessairement $\mathbf{A}_{R^0}$. La propriété (iii') est alors vérifiée en vertu de [2, Lemma 10.1] (en utilisant le lemme 4.48).

D'après le lemme 4.2 (e), l'anneau $\mathbf{E}_{\widetilde{R}}^+$ s'obtient à partir de $\mathbf{E}_{R^0}^+$ en itérant les opérations suivantes :

(ét) extension complète, topologiquement de type fini et formellement étale pour la topologie $\overline{\pi}$-adique ;

(loc) complétion, pour la topologie $\overline{\pi}$-adique, d'une localisation ;

(comp) complétion par rapport à un idéal contenant $\overline{\pi}$.

Supposons que $\widetilde{R}$ est obtenu à partir d'une R^0-algèbre $\widetilde{R}'$ par l'une des opérations (ét), (loc) ou (comp) de l'introduction, de sorte que $\mathbf{E}_{\widetilde{R}}^+$ est obtenu à partir de $\mathbf{E}_{\widetilde{R}'}^+$ par l'opération correspondante.

Cas d'une extension de type (ét) :

Comme $\mathbf{E}_{\widetilde{R}}^+$ est topologiquement de type fini sur $\mathbf{E}_{\widetilde{R}'}^+$, on a $\mathbf{E}_{\widetilde{R}}^+\simeq\overline{C}/\overline{I}$, où $\overline{C}=\mathbf{E}_{\widetilde{R}'}^+\left\{\overline{t}_1,\dots,\overline{t}_h\right\}$ désigne le séparé complété de l'anneau de polynômes $\mathbf{E}_{\widetilde{R}'}^+\left[\overline{t}_1,\dots,\overline{t}_h\right]$ pour la topologie $\overline{\pi}$-adique, et $\overline{I}\subseteq\overline{C}$ un idéal. En outre, l'application induite par la dérivation $\overline{\mathrm{d}}\colon\overline{I}/\overline{I}^2\to\bigoplus_{j=1}^h\left(\overline{C}/\overline{I}\right)\mathrm{d}\,\overline{t}_j$ est un isomorphisme, car $\mathbf{E}_{\widetilde{R}'}^+\subseteq\mathbf{E}_{\widetilde{R}}^+$ est formellement étale pour la topologie $\overline{\pi}$-adique. Comme $\mathbf{A}_{\widetilde{R}'}^+/p\mathbf{A}_{\widetilde{R}'}^+\xrightarrow{\sim}\mathbf{E}_{\widetilde{R}'}^+$, le lemme 4.48 montre que $\overline{C}=C/pC$ où $C=\mathbf{A}_{\widetilde{R}'}^+\{t_1,\dots,t_h\}$ est le complété de l'anneau de polynômes $\mathbf{A}_{\widetilde{R}'}^+[t_1,\dots,t_h]$ pour la topologie faible : il existe $f_1,\dots,f_h\in C$ relevant une famille $\overline{f}_1,\dots,\overline{f}_h\in\overline{I}$ dont l'image par $\overline{\mathrm{d}}$ est une base du $\overline{C}/\overline{I}$-module $\bigoplus_{j=1}^h\left(\overline{C}/\overline{I}\right)\mathrm{d}\,\overline{t}_j$. Notons $I\subseteq C$ l'idéal engendré par $f_1,\dots,f_h$ et $A=C/I$. L'image de $I\otimes_C\overline{C}$ dans $\overline{C}$ n'étant autre que $\overline{I}$, la suite exacte

$$I\otimes_C\overline{C}\longrightarrow\overline{C}\longrightarrow A/pA\longrightarrow0$$

montre que $A/pA=\overline{C}/\overline{I}=\mathbf{E}_{\widetilde{R}'}^+$. Par ailleurs, l'homomorphisme $A^h\to I/I^2$ (qui envoie $e_j=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, le 1 étant en j-ème coordonnée, sur f_j) est surjectif par construction. Il induit un homomorphisme surjectif $(A/pA)^h\to(I/I^2)\otimes_A(A/pA)$. Mais le composé avec l'application naturelle $(I/I^2)\otimes_A(A/pA)\to\overline{I}/\overline{I}^2$ n'est autre que l'isomorphisme $(A/pA)^h \to \overline{I}/\overline{I}^2$ inverse de $\overline{\mathrm{d}}$. L'homomorphisme $(A/pA)^h \to (I/I^2) \otimes_A (A/pA)$ est donc un isomorphisme, et il en est de même de l'application naturelle $(I/I^2) \otimes_A (A/pA) \to \overline{I}/\overline{I}^2$.

$$\begin{tikzcd}(A/pA)^h \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend left, "\sim"] & (I/I^2) \otimes_A (A/pA) \arrow[r] & \overline{I}/\overline{I}^2\end{tikzcd}$$

Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}(I/I^2) \otimes_A (A/pA) \arrow[r, "\mathrm{d} \otimes (A/pA)"] \arrow[d, "\wr"] & \left(\bigoplus_{j=1}^{h} (C/I)\, \mathrm{d}\, \overline{t}_j\right) \otimes_A (A/pA) \arrow[d, "\wr"] \\ \overline{I}/\overline{I}^2 \arrow[r, "\overline{\mathrm{d}}"] & \bigoplus_{j=1}^{h} (\overline{C}/\overline{I})\, \mathrm{d}\, \overline{t}_j\end{tikzcd}$$

identifie $\mathrm{d} \otimes (A/pA)$ avec $\overline{\mathrm{d}}$, qui est un isomorphisme. On peut donc appliquer le lemme 4.47 à $B = \widetilde{\mathbf{A}}_R$: il existe un unique morphisme de $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}$-algèbre $A \to \widetilde{\mathbf{A}}_R$ relevant l'inclusion $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}} \subseteq \widetilde{\mathbf{E}}^+_R$. Notons $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}$ l'image de A dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R$. Comme $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}$ est sans p-torsion (c'est un sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{A}}_R$), on a $\mathrm{gr}_p\left(\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}\right) \simeq \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}[s]$ (anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}$ en une variable). Par ailleurs, on a $A/pA \simeq \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}} \simeq \mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}/p\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}$: l'homomophisme naturel surjectif $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}[s] \to \mathrm{gr}_p(A)$ est donc un isomorphisme, et l'application $A \to \mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}$ est un isomorphisme. La propriété (iii') est alors vérifiée en vertu de [2, Lemma 10.1] (en utilisant le lemme 4.48).

Notons $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}$ l'adhérence de $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}[\pi^{-1}]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ pour la topologie faible. L'application du lemme 4.47 à $B = \mathbf{A}_R$, s'il existe, montre qu'on a nécessairement $\mathbf{A}_{\widetilde{R}} \subseteq \mathbf{A}_R$. En outre, on a toujours $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}} \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}^+_R\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$.

<u>Cas d'une extension de type (loc)</u> :

Écrivons $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}$ comme le complété de $\overline{U}^{-1}\,\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}$ pour la topologie $\overline{\pi}$-adique, où $\overline{U} \subseteq \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}$ est une partie multiplicative. Notons U l'image inverse de $\overline{U}$ dans $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}$. C'est une partie multiplicative de $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}$, qui est inversible dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+_R\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ (cela se vérifie modulo $\frac{p}{\pi^b}$). Notons alors $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}$ l'adhérence (pour la topologie faible) de $U^{-1}\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+_R\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$. La propriété (iii') est alors vérifiée en vertu de [2, Lemma 10.1] (en utilisant le lemme 4.48). Notons $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}$ l'adhérence de $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}[\pi^{-1}]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_R$ pour la topologie faible. La condition (c) montre que $\mathbf{A}_R$, s'il existe, contient nécessairement $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}$. En effet, un élément de U est inversible modulo $p\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}$, donc dans $\mathbf{A}_R \supseteq \mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}$ qui est complet pour la topologie faible (donc *a fortiori* pour la topologie p-adique). Cela montre en particulier l'unicité de $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}$.

<u>Cas d'une extension de type (comp)</u> :

Écrivons $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}}$ comme le complété de $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}$ pour la topologie $\overline{J}$-adique, où $\overline{J} \subseteq \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}$ est un idéal contenant $\overline{\pi}$. Notons J l'image inverse de $\overline{J}$ dans $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}$ et $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}$ le complété de $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}$ pour la topologie J-adique. On a la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}J \subseteq \mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'} \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr] & \widetilde{\mathbf{A}}^+_{\widetilde{R}'}\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} \arrow[r] & \widetilde{\mathbf{A}}^+_{\widetilde{R}}\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} \\ \overline{J} \subseteq \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'} & \mathbf{A}^+_{\widetilde{R}} \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

L'homomorphisme pointillé existe par complétude de $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\widetilde{R}}\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$ pour la topologie J-adique. Cette dernière résulte du fait que pour tout $N \in \mathbf{N}_{>0}$, l'anneau

$$\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\widetilde{R}}\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} \Big/ \left(\frac{p}{\pi^b}\right)^N \widetilde{\mathbf{A}}^+_{\widetilde{R}}\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\} \simeq \mathrm{W}_N(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\widetilde{R}})[x]/(x^N, x\pi^b - p)$$

est complet pour la topologie induite par la topolologie J-adique, étant un quotient de $\mathrm{W}_N(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\widetilde{R}})[x]/(x^N)$. Mais ce dernier est complet pour la topologie induite par la topologie J-adique, étant libre sur $\mathrm{W}_N(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\widetilde{R}})$, pour lequel la topologie J-adique correspond à la topologie $\overline{J}$-adique sur les composantes fantomes (on utilise le fait que $a^{p^N} \equiv [\overline{a}]^{p^N} \mod p^N\,\mathrm{W}_N(\widetilde{\mathbf{E}}_{\widetilde{R}})$). L'inclusion $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'} \subseteq \mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}$ relève l'inclusion $\mathbf{E}^+_{\widetilde{R}} \subseteq \mathbf{E}^+_{\widetilde{R}'}$. Par ailleurs, d'après [2, 10.8] appliqué à $R^1 = \widetilde{R}'$ et $R^2 = \widetilde{R}$, l'anneau ainsi obtenu est une sous-$\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}'}$-algèbre de $\widetilde{\mathbf{A}}_R$, complète pour la topologie faible. Notons maintenant $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}$ le complété de $\mathbf{A}^+_{\widetilde{R}}[\pi^{-1}]$ pour la topologie faible. La propriété (iii') est alors vérifiée en vertu de [2, Lemma 10.1] (en utilisant le lemme 4.48).

Si $\mathbf{A}'_{\widetilde{R}}$ est une autre $\mathbf{A}_{\widetilde{R}'}$-algèbre vérifiant les propriétés (a)-(e), notons $\mathbf{A}''^+_{\widetilde{R}}$ le complété de $\mathbf{A}'^+_{\widetilde{R}}$ pour la topologie J-adique. Comme ci-dessus, on montre que c'est un sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\widetilde{R}}\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$. Notons $\mathbf{A}''_{\widetilde{R}}$ le complété de $\mathbf{A}''^+_{\widetilde{R}}[\pi^{-1}]$ pour la topologie faible. On a alors des homomorphismes $\mathbf{A}_{\widetilde{R}} \to \mathbf{A}''_{\widetilde{R}} \leftarrow \mathbf{A}'_{\widetilde{R}}$, qui sont des isomorphismes sur les gradués pour la topologie p-adique : ce sont des isomorphismes, d'où l'unicité.

Passage de $\widetilde{R}$ à R.

Finalement, l'extension $\mathbf{E}_{\widetilde{R}}^{+} \to \mathbf{E}_{R}^{+}$ est finie étale après changement de base à $\mathbf{E}_{\widetilde{R}} = \mathbf{E}_{\widetilde{R}}^{+}\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$. On a donc $\mathbf{E}_{R}^{+} = \overline{C}/\overline{I}$ où $\overline{C} = \mathbf{E}_{\widetilde{R}}^{+}\left[\overline{t}_1, \dots, \overline{t}_r\right]$ et $\overline{I} \subseteq \overline{C}$ un idéal, tels que l'application déduite de la dérivation $\overline{\mathrm{d}}\colon \overline{I}/\overline{I}^2 \to \bigoplus_{j=1}^{r} \left(\overline{C}/\overline{I}\right) \mathrm{d}\,\overline{t}_j$ induit un isomorphisme quand on inverse $\overline{\pi}$. Comme $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^{+}/p\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^{+} \xrightarrow{\sim} \mathbf{E}_{\widetilde{R}}^{+}$, on a $\overline{C} = C/pC$ où $C = \mathbf{A}_{\widetilde{R}}^{+}[t_1, \dots, t_r]$: il existe $f_1, \dots, f_r \in C$ relevant une famille $\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_r \in \overline{I}$ dont l'image par $\overline{\mathrm{d}}$ est une base du $\mathbf{E}_R = \left(\overline{C}/\overline{I}\right)\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$-module $\left(\bigoplus_{j=1}^{r} \left(\overline{C}/\overline{I}\right) \mathrm{d}\,\overline{t}_j\right)\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$. Notons $I \subseteq C$ l'idéal engendré par $f_1, \dots, f_r$ et $A = C/I$: on a $A/pA = \overline{C}/\overline{I} = \mathbf{E}_{R}^{+}$ et l'application $\mathrm{d} \otimes (A/pA)\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$ (où $d\colon I/I^2 \to \bigoplus_{j=1}^{r} (C/I)\,\mathrm{d}\,\overline{t}_j$ est l'application déduite de la dérivation) s'identifie à $\overline{\mathrm{d}} \otimes_{\mathbf{E}_{\widetilde{R}}^{+}} \mathbf{E}_{R}^{+}\left[\overline{\pi}^{-1}\right]$, qui est un isomorphisme. On peut donc appliquer le lemme 4.47 à $B = \widetilde{\mathbf{A}}_{R}^{+}\left\{\frac{p}{\pi^b}\right\}$: il existe un entier b' et un unique homomorphisme de $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^{+}$-algèbres $A \to \widetilde{\mathbf{A}}_{R}^{+}\left\{\frac{p}{\pi^{b+b'}}\right\}$ relevant $\mathbf{E}_{R}^{+} \subseteq \widetilde{\mathbf{E}}_{R}^{+}$. Notons $\mathbf{A}_{R}^{+}$ l'image de cet homomorphisme. L'application $A \to \mathbf{A}_{R}^{+}$ est alors un isomorphisme parce qu'elle induit un isomorphisme sur les gradués p-adiques.

Écrivons $\mathbf{A}_{R}^{+}$ comme un quotient $\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^{+n} \to \mathbf{A}_{R}^{+}$. On a la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_{\widetilde{R}}^{+n} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathbf{A}}_{\widetilde{R}}^{n} \arrow[d] \\
\mathbf{A}_{R}^{+} \arrow[r] & \widetilde{\mathbf{A}}_{R}
\end{tikzcd}$$

Pour montrer la propriété (iii'), il suffit de démontrer que la topologie quotient sur $\mathbf{A}_{R}^{+}$ coïncide avec la topologie induite par la topologie faible de $\widetilde{\mathbf{A}}_{R}$. Il suffit pour cela de vérifier que la topologie quotient sur $\widetilde{\mathbf{A}}_{R}$ coïncide avec la topologie faible. Cela résulte du fait que pour tout $m \in \mathbf{N}_{>0}$, il existe un entier N_m tel que

$$\widetilde{\mathbf{A}}_{R}^{+}/p^m\widetilde{\mathbf{A}}_{R}^{+} \subseteq \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\pi^{N_m}}\widetilde{\mathbf{A}}_{\widetilde{R}}^{+}/p^m\widetilde{\mathbf{A}}_{\widetilde{R}}^{+}\right)$$

(ce qui se voit pas récurrence, et utilisant le lemme 4.2 (f)). Notons enfin $\mathbf{A}_R$ l'adhérence de $\mathbf{A}_{R}^{+}[\pi^{-1}]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_{R}$ pour la topologie faible. Rappelons qu'on alors $\mathbf{A}_R = \varprojlim_n \left(\left(\mathbf{A}_{R}^{+}/p^n\mathbf{A}_{R}^{+}\right)[\pi^{-1}]\right)$, si bien que $\mathbf{A}_R$ vérifie les propriétés (a)-(e). L'unicité de $\mathbf{A}_R$ résulte du fait que $\mathbf{A}_{\widetilde{R}} \to \mathbf{A}_R$ est l'unique relèvement de l'extension étale $\mathbf{E}_{\widetilde{R}} \to \mathbf{E}_R$.

Par unicité, l'anneau $\mathbf{A}_R$ est stable sous l'action de Γ_R. Pour voir que $\mathbf{A}_R$ est stable par φ, remarquons tout d'abord que $\mathbf{A}_{\mathrm{W}(k)}$ l'est. Par ailleurs, si $R_1 \subseteq R_2$ est une des extensions suivantes :

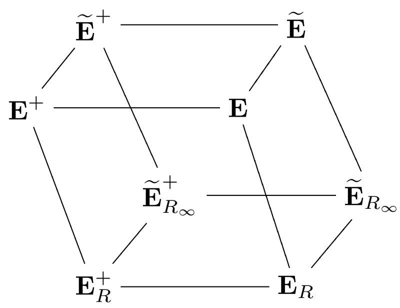
(1) $\mathrm{W}(k) \subseteq V$;
(2) $V \subseteq R^0$;
(3) une extension de type (ét) ;
(4) une extension de type (loc) ;
(5) une extension de type (comp) ;
(6) $\widetilde{R} \subseteq R$;

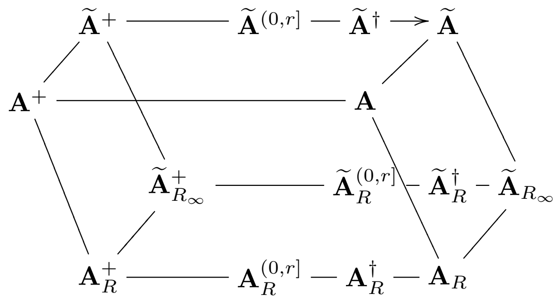
et si $\mathbf{A}_{R_1}$ est stable par φ, il en est de même de $\mathbf{A}_{R_2}$. Pour les cas (1), (3), (4), (5) et (6), cela résulte de ce que le morphisme $\mathbf{A}_{R_1}$-linéaire

$$1 \otimes \varphi\colon \mathbf{A}_{R_1,\varphi} \otimes_{\mathbf{A}_{R_1}} \mathbf{A}_{R_2} \to \widetilde{\mathbf{A}}_{R}$$

(induit par la restriction de φ à $\mathbf{A}_{R_2}$), est injectif car sa réduction modulo p l'est (c'est $1 \otimes \varphi\colon \mathbf{E}_{R_1,\varphi} \otimes_{\mathbf{E}_{R_1}} \mathbf{E}_{R_2} \simeq \mathbf{E}_{R_2} \subseteq \widetilde{\mathbf{E}}_{R}$). On vérifie son image satisfait aux conditions (a)-(e) : c'est donc $\mathbf{A}_{R_2}$.
Pour le cas (2), cela résulte simplement de ce que $\varphi([x_i]) = [x_i]^p$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$. $\square$

Remarque 4.50. Lorsque $\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty}) \subseteq K_\infty$ est non ramifiée et $\widetilde{R} \subseteq R$ est étale, il résulte de la démonstration précédente que le sous-anneau $\mathbf{A}_{R}^{+}$ de $\mathbf{A}_R$ est unique, contenu dans $\widetilde{\mathbf{A}}_{R}$, et stable par Γ_R et φ.





Références

[1] **Abbes A., Saito T.**, Ramification of local fields with imperfect residue fields, *Am. Jour. of Math.* **124**, 879-920 (2002).

[2] **Andreatta F.** Generalized ring of norms and generalized (φ, Γ)-modules.

[3] **Berthelot P.** Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres, première partie, prépublication (1996).

[4] **Bourbaki N.** Algèbre commutative, Chapitres 1-4, *Masson* (1985).

[5] **Brinon O.** Thèse de l'université d'Orsay.

[6] **Brinon O.** Une généralisation de la théorie de Sen, *Math. Ann.* **327**, 793-813 (2003).

[7] **Cherbonnier F., Colmez P.** Représentations p-adiques surconvergentes, *Invent. Math.* **133**, 581-611 (1998).

[8] **Cherbonnier F., Colmez P.** Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, *JAMS* **12**, 241-268 (1999).

[9] **Colmez P., Fontaine J.-M.** Construction des représentations p-adiques semi-stables, *Invent. Math.* **140**, 1-43 (2000).

[10] **Colmez P.** Les conjectures de monodromie p-adique, *Sem. Bourbaki* **897**, 54$^{\text{ème}}$ année (2001-2002).

[11] **Colmez P.** Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, ? ? ?

[12] **Faltings G.** p-adic Hodge theory, *Journal of the AMS* **1**, 255-299 (1988).

[13] **Faltings G.** Almost étale extensions, *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (II), Astérisque* **279**, 185-270 (2002).

[14] **Faltings G.** A p-adic Simpson correspondance, *Advances in Mathematics* **198**, 847-862 (2005).

[15] **Fontaine J.-M., Wintenberger J.-P.** Le corps des normes de certaines extensions algébriques de corps locaux, *C.R.A.S.* **288**, 367-370 (1979).

[16] **Fontaine J.-M.** Représentations p-adiques des corps locaux, *"The Grothendieck Festschrift", vol. II, Birkhauser* 249-309 (1991).

[17] **Fontaine J.-M.** Le corps des périodes p-adiques, *Périodes p-adiques, Astérisque* **223**, SMF (1994).

[18] **Fontaine J.-M.** Représentations p-adiques semi-stables, *Périodes p-adiques, Astérisque* **223**, SMF (1994).

[19] **Fontaine J.-M.** Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques, *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (III), Astérisque* **295**, SMF (2004).

[20] **Matsuda S.** Local indices of p-adic differential operators corresponding to Artin-Schreier-Witt coverings, *Duke Math. J.* **77**, 607-625 (1995).

[21] **Matsumura H.** Commutative ring theory, *Cambridge University press* (1986).

[22] **Raynaud M.** Anneaux locaux henséliens, *Lecture Notes in Mathematics* **169**, *Springer Verlag* (1970).

[23] **Sen S.** Continuous cohomology and p-adic Galois representations, *Invent. Math.* **62**, 89-116 (1980).

[24] **Serre J.-P.** Corps locaux (3ème édition), *Hermann* (1968).

[25] **Tate J.** p-divisible groups, *in Proceedings of a conference on local fields, Springer Verlag*, 158-183 (1967).

[26] Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1) - Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1960-1961, *Documents Mathématiques* **3**, *SMF* (2003).

[27] Cohomologie étale (SGA $4\frac{1}{2}$), *Lecture Notes in Mathematics* **569**, *Springer Verlag* (1977).

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università degli Studi di Padova, Via Belzoni 7, Padova 35131, Italia, Institut Galilée - Département de Mathématiques, Université Paris 13 - 99, avenue Jean-Baptiste Clément - F93430 Villetaneuse, France

E-mail address: `fandreat@math.unipd.it, brinon@math.univ-paris13.fr`