ESAME DI ALGEBRA 3, 26/01/2017

COGNOME e Nome .....

MATRICOLA .....

Esercizio 1. Sia K il campo di spezzamento di $T^5 - 5 \in \mathbb{Q}[T]$.

i. Mostrare che $\mathbb{Q} \subset K$ è una estensione finita di Galois. Determinarne il grado.
ii. Sia G il gruppo di Galois dell'estensione $\mathbb{Q} \subset K$. Descrivere il gruppo G.
iii. Determinare i sottogruppi di G di ordine 4 e i corrispondenti sottocampi di K, esibendone dei generatori su $\mathbb{Q}$.
iv. Determinare i sottogruppi di G di ordine 2 e i corrispondenti sottocampi di K, esibendone dei generatori su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 2. $^{(*)}$ Sia E l'ottavo campo ciclotomico.

i. Si mostri che l'estensione $\mathbb{Q} \subset E$ è finita e di Galois. Se ne calcoli il grado e il gruppo di Galois.
ii. Si determini il reticolo dei sottocampi $\mathbb{Q} \subset E$.
iii. Sia $E \subset L$ il campo di spezzamento di $(X^2 - 2)(X^2 - 3)$. Si dimostri che l'estensione $\mathbb{Q} \subset L$ è finita e di Galois. Se ne calcoli il grado e il gruppo di Galois.
iv. Si trovi $\alpha \in L$ tale che $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.

Esercizio 3. Sia K il 15-esimo campo ciclotomico e sia $\mathcal{O}_K$ l'anello degli interi.

i. Dimostrare che se p è un primo di $\mathbb{Z}$ che ramifica in $\mathcal{O}_K$ allora $p \in \{3, 5\}$;
ii. Dimostrare che se $p = 3$ oppure $p = 5$ allora p ramifica in $\mathcal{O}_K$;
iii. Determinare la decomposizione di 5 in $\mathcal{O}_K$.

Esercizio 4. (*TeoGal*)$^{(*)}$ Sia K il p-esimo campo ciclotomico e sia $\zeta \in K$ una radice primitiva p-esima dell'unità. Dimostare che ζ è costruibile con riga e compasso a partire da $\mathbb{Q}$ se e solo se p è un primo di Fermat cioè della forma $p = 2^h + 1$ per un qualche $h \in \mathbb{N}$.

Esercizio 5. (*TeoNum*) Sia K un campo di numeri di grado n su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{O}_K$ l'anello degli interi.

i. Dimostrare che due basi intere $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ e $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ di $\mathcal{O}_K$ hanno uguale discriminante $\mathrm{disc}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathrm{disc}_{K/\mathbb{Q}}(\beta_1, \ldots, \beta_n) =: d$;
ii. Siano $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathcal{O}_K$. Dimostrare che se $\mathrm{disc}_{K/\mathbb{Q}}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = d$ allora $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ è una base intera di $\mathcal{O}_K$.