Sistemi lineari

Sistemi lineari: definizioni

▶ Un'equazione nelle n incognite $x_1, \dots, x_n$ della forma

$$c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = b$$

ove $c_1, \dots, c_n$ sono numeri reali (detti **coefficienti**) e b è un numero reale (detto **termine noto**) si chiama **equazione lineare in** $x_1, \dots, x_n$.

▶ **Un sistema lineare di** m **equazioni nelle** n **incognite** $x_1, \dots, x_n$ è un sistema formato da m equazioni lineari in $x_1, \dots, x_n$, ossia:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & .. & + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & .. & + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & .. & + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \qquad (*)$$

▶ Una **soluzione** di $(*)$ è una n-pla di numeri reali $(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n)$ che sostituita alle incognite soddisfa simultaneamente tutte le equazioni del sistema.

▶ La matrice di tipo (m, n) : $A = (a_{ij})_{i=1\dots m}^{j=1\dots n}$ si chiama **matrice dei coefficienti del sistema**.

Il vettore colonna di tipo $(m, 1)$: $\mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^{m}$ si chiama **vettore dei termini noti**.

La matrice di tipo $(m, n+1)$: $(A|\mathbf{b})$ ottenuta accostando alle colonne della matrice A dei coefficienti il vettore (colonna) $\mathbf{b}$ dei termini noti si chiama **matrice completa del sistema**.

Esempio 1.1 Dato il sistema di due equazioni in tre incognite

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y - z = 0 \\ 4x + 6y - 2z = -3 \end{array} \right. ,$$

la matrice del sistema, il vettore dei termini noti e la matrice completa sono, rispettivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & -2 & -3 \end{array} \right).$$

▶ Detto $\mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^{n}$ il vettore colonna di tipo $(n, 1)$ delle incognite il sistema $(*)$ si può trascrivere in forma matriciale

$$\boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

Una sua soluzione è quindi un vettore colonna di tipo $(n, 1)$ $\widetilde{\mathbf{x}} = (\widetilde{x}_j)_{j=1}^{n}$ di numeri reali che soddisfa la relazione matriciale $A\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$.

▶ Un sistema si dice **possibile** (o **risolubile**) se ammette almeno una soluzione. In tal caso le equazioni si dicono **compatibili**.

▶ Un sistema si dice **impossibile** se non ammette alcuna soluzione. In tal caso le equazioni si dicono **incompatibili**.

NOTA Un sistema possibile può avere una sola soluzione (**sistema determinato**) oppure infinite soluzioni (**sistema indeterminato**), ma *mai* un numero finito ≥ 2 di soluzioni.

▶ Due sistemi si dicono **equivalenti** quando ammettono le stesse soluzioni.

▶ **Trasformazioni elementari**. Le seguenti trasformazioni, applicate ad un dato sistema, portano a un sistema equivalente:
I) scambiare due equazioni tra loro;

II) moltiplicare i due membri di un'equazione per lo stesso numero k ($\neq 0$);

III) sommare ad un'equazione un'altra equazione moltiplicata per k.

Esempio 1.2 Il sistema dell'Esempio 1.1 è impossibile.
Infatti, sommando alla seconda equazione la prima moltiplicata per -2, si ottiene il sistema, equivalente a quello iniziale,

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

ma la seconda equazione è impossibile.

Esempio 1.3 Dato il sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 2 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$
la matrice del sistema, il vettore dei termini noti e la matrice completa sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Il sistema ha una sola soluzione. Infatti, sottraendo alla terza equazione la seconda si ottiene il sistema, equivalente a quello dato:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 2 \\ 4y = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione il vettore $(x, y) = (1, 0)$. (Verificarlo.)

Esempio 1.4 Dati $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$,
il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è il sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -6x + 3y = -3 \end{cases}.$$

Sommando alla seconda equazione la prima moltiplicata per 3 si ottiene il sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Il sistema ammette quindi le infinite soluzioni della forma $(t, 2t - 1)$, al variare del numero reale t.

Soluzione dei sistemi lineari: il metodo di eliminazione di Gauss

Questo metodo si basa sulle ripetute applicazioni delle trasformazioni che permettono di passare a sistemi equivalenti. Si opera in modo da ricondursi ad un sistema equivalente a quello dato, di cui però è immediato vedere la eventuale risolubilità e, in tal caso, procedere in modo standard per determinare le soluzioni. Questo sistema equivalente ha una matrice dei coefficienti che è della forma "a scalini".

▶ Metodo di eliminazione di Gauss
Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .. + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + .. + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + .. + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Possiamo supporre che $a_{11} \neq 0$ (in caso contrario scambiamo la 1^a equazione con un'altra in cui il coefficiente di x_1 sia $\neq 0$). Dividendo la prima equazione per a_{11}, otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + .. + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + .. + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sottraiamo poi dalla seconda equazione la prima moltiplicata per a_{21}, dalla terza la prima moltiplicata per a_{31} e così via. Otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + .. + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ 0 \quad a'_{22}x_2 + .. + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ 0 \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ 0 \quad a'_{m2}x_2 + \quad + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

Tale sistema contiene un sottosistema di $m-1$ equazioni e $n-1$ incognite (basta escludere la prima equazione). Allora possiamo procedere in modo iterativo: ripetiamo quanto fatto precedentemente a questo sistema. Se $a'_{22} = 0$, scambiamo la 2^a equazione con un'altra in cui il coefficiente di x_2 sia $\neq 0$ (se c'è). (Se in tutte le equazioni il coefficiente di x_2 è nullo tranne che nella prima, vuol dire che x_2 non compare come variabile effettiva nel sottosistema ottenuto dopo il primo passo. Possiamo quindi "cambiare nome" alla variabile x_2 e spostarla in fondo). A questo punto possiamo dividere la seconda equazione per il coefficiente di x_2 e procedere come prima. In questo modo x_2 comparirà con coefficiente 1 nella 2^a equazione e 0 nelle successive.
Iterando alle equazioni successive otterremo un sistema in forma "a scalini":

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + .. + c_{1k}x_k + .. + c_{1n}x_n = d_1 \\ \quad\quad x_2 + \quad + c_{2k}x_k + .. + c_{2n}x_n = d_2 \\ \quad\quad\quad ... \\ \quad\quad\quad\quad\quad x_k + .. + c_{kn}x_n = d_k \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad .... = d_{k+1} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad ..... \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad .... = d_m \end{cases}$$

Si possono presentare i seguenti due casi:

a) Si ha un sistema "a scalini" del tipo:

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr} x_1 & + & c_{12}x_2 & + & .. & + c_{1k}x_k & + & .. & + c_{1n}x_n = d_1 \\ & & x_2 & + & & + c_{2k}x_k & + & .. & + c_{2n}x_n = d_2 \\ & & & ... & & & & & \\ & & & & & x_k & + & .. & + c_{kn}x_n = d_k \end{array}\right] \quad k \text{ equazioni} \\ \\ \left.\begin{array}{r} 0 = 0 \\ ..... \\ 0 = 0 \end{array}\right] \quad (m-k) \text{ equazioni} \end{array}\right.$$

(dove, se $m = k$, le ultime $m - k$ equazioni non compaiono).

In questo caso siamo nell'ambito dei sistemi risolubili, in cui abbiamo k equazioni effettive ed n incognite, con $k \leq n$. Si possono ricavare le incognite a cascata, partendo da x_k, fino ad x_1.

Se $k = n$, il sistema ha una sola soluzione.

Se $k < n$, le soluzioni saranno infinite ed espresse in funzione delle variabili $x_{k+1}, ..., x_n$, che sono quindi dette variabili libere.

b) Nel sistema "a scalini" c'è almeno una equazione nella quale si annulla il primo membro, ma il secondo è $\neq 0$. In questo caso il sistema è ovviamente impossibile.

▶ In conclusione, quando il sistema è risolubile, per sapere quante soluzioni ha, dobbiamo confrontare il numero k delle equazioni effettive con il numero n delle incognite:

- Se $k = n$ il sistema è *determinato* ossia ha una sola soluzione.
- Se $k < n$ il sistema è *indeterminato* ossia ha infinite soluzioni che dipendono da $n - k$ variabili libere (si dice che il sistema ha ∞^{n-k} soluzioni).

▶ Per applicare questo metodo, conviene rileggere le trasformazioni elementari sulle equazioni come corrispondenti trasformazioni elementari sulle righe della matrice completa $(A|\mathbf{b})$, che richiamiamo:

Trasformazioni elementari sulle righe di $(A|\mathbf{b})$

I) R_{ij} : scambio della riga $\mathbf{r_i}$ con la riga $\mathbf{r_j}$;

II) $k \cdot R_i$: prodotto della riga $\mathbf{r_i}$ per il numero k $(\neq 0)$;

III) $R_i + kR_j$: somma della riga $\mathbf{r_i}$ con la riga $\mathbf{r_j}$ moltiplicata per k .

Esempio 1.5 Con trasformazioni elementari sulle equazioni del sistema si ha:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 4y = 2 \\ 3x + y = 0 \\ -x + 3y = 2 \end{array}\right. \boxed{\tfrac{1}{2}R_1} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 3x + y = 0 \\ -x + 3y = 2 \end{array}\right. \boxed{\begin{array}{l} R_2 - 3R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array}} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ -5y = -3 \\ 5y = 3 \end{array}\right. \boxed{-\tfrac{1}{5}R_2} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ y = \frac{3}{5} \\ 5y = 3 \end{array}\right. \boxed{R_3 - 5R_2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ y = \frac{3}{5} \\ 0 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2\frac{3}{5} = 1 \\ y = \frac{3}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{1}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{array}\right.$$

Sistema con 2 equazioni effettive e 2 incognite: quindi determinato, ossia con una sola soluzione.

Analogamente, con le stesse trasformazioni elementari sulle righe di $(A|\mathbf{b})$ si ha:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \boxed{\tfrac{1}{2}R_1} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{c} R_2-3R_1 \\ R_3+R_1 \end{array}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\boxed{-\tfrac{1}{5}R_2} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 5 & 3 \end{array}\right) \boxed{R_3-5R_2} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Esempio 1.6 Dato il sistema $\begin{cases} x-2y+4z=2 \\ 3x+y+5z=-1 \\ 2x+y+3z=-2 \end{cases}$, con trasformazioni elementari sulle righe di $(A|\mathbf{b})$ si ha:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{c} R_2-3R_1 \\ R_3-2R_1 \end{array}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & -7 \\ 0 & 5 & -5 & -6 \end{array}\right) \boxed{\tfrac{1}{7}R_2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -6 \end{array}\right) \boxed{R_3-5R_2} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+4z=2 \\ y-z=-1 \\ \boxed{0=-1} \end{cases}$$

Quindi il sistema è impossibile.

Esempio 1.7 Dato il sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ -2x+z=0 \\ 6x+2y=2 \end{cases}$, con trasformazioni elementari sulle righe di $(A|\mathbf{b})$ si ha:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{c} R_2+2R_1 \\ R_3-6R_1 \end{array}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -6 & -4 \end{array}\right) \boxed{\tfrac{1}{2}R_2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -4 & -6 & -4 \end{array}\right) \boxed{R_3+4R_2} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ y+\frac{3}{2}z=1 \end{cases}$$

Il sistema ha 2 equazioni effettive in 3 incognite: quindi il sistema è indeterminato (∞^1 soluzioni). Inoltre:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+\frac{3}{2}z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+(1-\frac{3}{2}z)+z=1 \\ y=1-\frac{3}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}z \\ y=1-\frac{3}{2}z \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi: $(\frac{1}{2}z, 1-\frac{3}{2}z, z)$.

Esempio 1.8 Discutere la risolubità al variare del parametro reale k, e trovare le eventuali soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y+2z=0 \\ 2x-y=0 \\ x-y-z=k \end{cases}.$$

Con trasformazioni elementari sulle righe di $(A|\mathbf{b})$ si ha:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & k \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{c} R_2+R_1 \\ R_3-2R_1 \\ R_4-R_1 \end{array}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & k-1 \end{array}\right) \boxed{\tfrac{1}{3}R_2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & k-1 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{c} R_3+5R_2 \\ R_4+3R_2 \end{array}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \boxed{\tfrac{3}{11}R_3} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \boxed{R_4-R_3} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 0 & k+\frac{1}{11} \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+\frac{1}{3}z=\frac{1}{3} \\ z=-\frac{1}{11} \\ 0=k+\frac{1}{11} \end{cases}.$$

Quando $k+\frac{1}{11}\neq 0$ il sistema è impossibile.
Se invece $k=-\frac{1}{11}$, si tratta di un sistema di 3 equazioni effettive in 3 incognite, quindi determinato. Per calcolarne l'unica soluzione si risolve il sistema

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+\frac{1}{3}z=\frac{1}{3} \\ z=-\frac{1}{11} \end{cases},$$

e si trova la soluzione $\left(\frac{2}{11},\frac{4}{11},-\frac{1}{11}\right)$.

Esempio 1.9 Discutere la risolubità e trovare le eventuali soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x+2y+z-w=2 \\ 2x+3y-z=-2 \\ 2y+4z-w=9 \\ x+z+w=6 \end{cases},$$

Con trasformazioni elementari sulle righe di $(A|\mathbf{b})$ si ha:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 9 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{c} R_3+2R_2 \\ R_4-2R_2 \end{array}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 16 \end{array}\right) \boxed{R_4+3R_3} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y+z-w=2 \\ -y-3z+2w=-6 \\ -2z+3w=-3 \\ 7w=7 \end{array}\right. .$$

Il sistema è quindi determinato e si trova la soluzione $(2,-1,3,1)$.

Esempio 1.10 Discutere la risolubità al variare del parametro reale k, e trovare le eventuali soluzioni del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x-3y-w=-1 \\ 5x-5y+z+kw=0 \\ 2x+4y+z=0 \end{array}\right. .$$

Con trasformazioni elementari sulle righe di $(A|\mathbf{b})$ si ha:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & 1 & k & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{c} R_2-5R_1 \\ R_3-2R_1 \\ R_{23} \end{array}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & 1 & k+5 & 5 \end{array}\right) \boxed{R_3-R_2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k+3 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-3y-w=-1 \\ 10y+z+2w=2 \\ (k+3)w=3 \end{array}\right. .$$

Quindi per $k=3$ il sistema è impossibile, mentre per $k\neq 3$, ponendo $y=t$ a parametro, l'insieme delle soluzioni è:

$\{(-1+3t+\frac{3}{k+3}, t, 2-10t-2\frac{3}{k+3}, \frac{3}{k+3}) \quad | \quad t\in\mathbf{R}\}$.