9

IL FORMALISMO HAMILTONIANO

La formulazione Hamiltoniana (o canonica) della Meccanica è alla base degli sviluppi della Meccanica Statistica, della Meccanica Quantistica e degli sviluppi più recenti della teoria dei Sistemi Dinamici. Gli strumenti utili ai fini dello sviluppo successivo della teoria Hamiltoniana sono da un lato l'algebra delle parentesi di Poisson, che nasce in modo spontaneo dalla ricerca di integrali primi, dall'altro il gruppo delle trasformazioni canoniche, che si può costruire partendo dalla ricerca di una classe di trasformazioni che mantenga invariata la forma Hamiltoniana delle equazioni.

La ricerca di integrali primi è interessante in quanto la loro conoscenza consente immediatamente di ricavare informazioni qualitative sulla dinamica del sistema. A questo scopo, le parentesi di Poisson consentono di ricondurre la ricerca di integrali primi alla soluzione di un'equazione alle derivate parziali. Inoltre, grazie alle parentesi di Poisson l'insieme delle variabili dinamiche risulta dotato di una struttura algebrica profonda ed interessante, che trova poi notevoli analogie nella Meccanica Quantistica.

Il ricorso alle trasformazioni canoniche ha lo scopo di porre il sistema di equazioni in una forma che consenta di pervenire in modo semplice alla soluzione. Il risultato più rilevante in quest'ambito è la possibilità di costruire una trasformazione canonica a partire da un'unica funzione, detta *funzione generatrice*. Quest'ultimo fatto conduce in modo spontaneo alla scrittura dell'equazione di Hamilton–Jacobi: si tratta di un'equazione che, ove risolta, fornisce la generatrice di una trasformazione che pone il sistema in una forma direttamente integrabile.

La connessione tra la conoscenza di integrali primi e l'integrazione mediante trasformazioni canoniche è stabilita dal teorema di Liouville: la soluzione dell'equazione di Hamilton–Jacobi può ricondursi ad una semplice operazione di quadratura quando si conosca un numero sufficiente di integrali primi del sistema.

9.1 La trasformata di Legendre

Prima di addentrarci nelle equazioni di Hamilton vogliamo discutere uno strumento geometrico che ci sarà utile sia nella deduzione della forma Hamiltoniana delle equa-

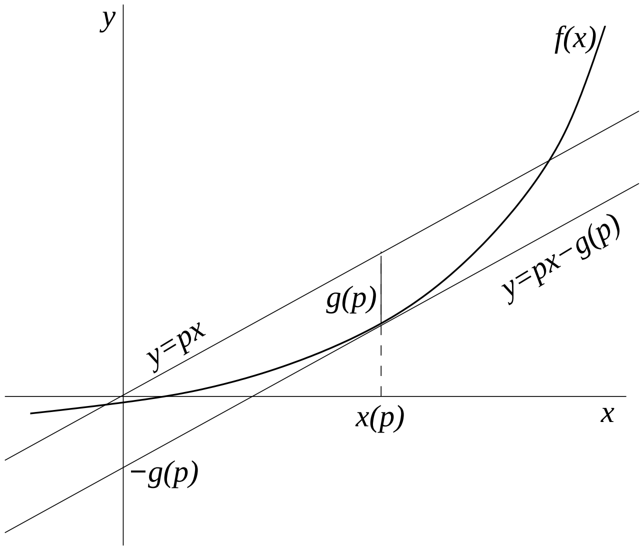

Figura 9.1. Il procedimento geometrico per la costruzione della trasformata di Legendre: per il punto $\big(x, f(x)\big)$ si conduce la tangente al grafico della funzione $f(x)$, che ha pendenza $p = f'(x)$. L'ordinata all'origine della retta tangente si denota con $-g(p)$, e $g(p)$ è la trasformata di Legendre di $f(x)$.

zioni di moto, sia in altre circostanze: la trasformata di Legendre.

9.1.1 La trasformata di Legendre per una funzione di una variabile

Supponiamo assegnata una funzione $f : U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, dove $U \subset \mathbb{R}$ è un aperto, e supponiamo che la funzione sia convessa, ovvero che sia di classe C^2 e che valga $f''(x) > 0$ in U. Il procedimento per la costruzione della trasformata di Legendre è illustrato in figura 9.1. Preso un punto $x \in U$ si definisce $p = f'(x)$, e si osserva che questa relazione può essere invertita, grazie alla convessità di $f(x)$, sicché risulta definita in modo univoco una funzione $x(p)$. Si traccia poi la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $\big(x, f(x)\big)$. Si definisce infine la *trasformata di Legendre* di $f(x)$ come l'ordinata all'origine di questa retta cambiata di segno, ossia

$$g(p) = \big[px - f(x)\big]\Big|_{x=x(p)} \ . \tag{9.1}$$

Un modo alternativo per introdurre la stessa funzione è il seguente, anch'esso illustrato in figura 9.1. Assegnato $p \in \mathbb{R}$ ad arbitrio, si cerca il massimo della funzione di due variabili $G(p, x) = px - f(x)$, che rappresenta la distanza verticale (con segno) tra la retta per l'origine di pendenza p e il grafico di $f(x)$. Se tale massimo esiste, la condizione di convessità di $f(x)$ ne garantisce l'unicità, sicché risultano definiti sia $x(p)$, che è il punto x in cui il massimo viene raggiunto, sia la trasformata di Legendre $g(p) = G(p, x(p))$.

È interessante considerare la famiglia di rette $y = px - g(p)$, dove p è considerato come un parametro e $g(p)$ è la trasformata di Legendre di $f(x)$. Il procedimento stesso di costruzione della trasformata di Legendre mostra che il grafico di $f(x)$ è l'inviluppo

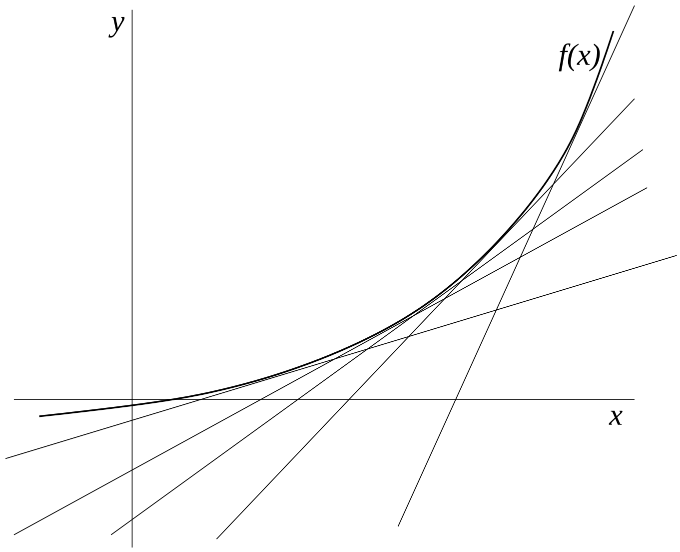

Figura 9.2. La funzione $f(x)$ è l'inviluppo della famiglia di rette $y = px - g(p)$, dove $g(p)$ è la trasformata di Legendre di $f(x)$.

della famiglia di rette al variare di p. Questo fatto suggerisce che ci sia modo di invertire il processo di costruzione, generando $f(x)$ a partire da $g(p)$. In effetti ciò non è solo possibile, ma anche elementare. Si verifica infatti che *la costruzione della trasformata di Legendre è un'operazione involutiva, ossia se $g(p)$ è la trasformata di $f(x)$, allora $f(x)$ è la trasformata di $g(p)$.*

Per dimostrare questa affermazione dobbiamo anzitutto mostrare che la funzione $g(p)$ è convessa. Ciò segue dalla definizione stessa. Infatti, differenziando la (9.1) senza tener conto della sostituzione (ossia considerando g come funzione delle due variabili x, p) si ottiene $dg = x\,dp + p\,dx - f'(x)\,dx$. Procedendo poi con la sostituzione e ricordando che $p = f'(x)$ si osserva che gli ultimi due termini si cancellano, e si ottiene $dg = x(p)\,dp$. In virtù dell'invarianza del differenziale[1] si conclude dunque che

[1] La proprietà di invarianza del differenziale significa che si possono scambiare le operazioni di sostituzione di variabili e di differenziazione, e si perviene comunque allo stesso risultato. Se abbiamo una funzione di due variabili $F(x, y)$, e vi sostituiamo $y = y(x)$ otteniamo una nuova funzione $f(x) = F\bigl(x, y(x)\bigr)$. Supponendo di voler calcolare il differenziale df di quest'ultima funzione possiamo procedere in due modi. Nel primo modo eseguiamo prima la sostituzione, calcolando espliciatmente $f(x)$, e poi differenziamo $f(x)$ scrivendo $df = \frac{df}{dx}\,dx$. In questo calcolo dobbiamo ricordare che $\frac{df}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}$, sicché alla fine abbiamo $df = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) dx$. Nel secondo modo procediamo prima a differenziare la funzione di due variabili $F(x, y)$, scrivendo $dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy$; poi procediamo alla sostituzione di variabili, e qui dobbiamo calcolare il differenziale $dy = \frac{dy}{dx}\,dx$. Effettuata la sostituzione troviamo ancora $df = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) dx$, che è esattamente l'espressione del differenziale trovata in precedenza. Ne concludiamo che nel calcolo del differenziale di una funzione le operazioni di sostituzione di varibili e di differenziazione possono essere scambiate. Ciò vale anche per funzioni di più variabili. Si noti bene che

$g'(p) = x(p)$. Da qui si calcola

$$g''(p) = x'(p) = \frac{1}{p'(x)}\Big|_{x=x(p)} = \frac{1}{f''(x)}\Big|_{x=x(p)} > 0 \ ,$$

in virtù della formula per la derivazione della funzione inversa. Stabilito dunque che $g(p)$ è funzione convessa possiamo procedere alla costruzione della sua trasformata di Legendre definendo $x(p) = g'(p)$, la cui inversa è proprio $p(x) = f'(x)$, e la trasformata è $f(x) = \bigl(xp - g(p)\bigr)\Big|_{p=p(x)}$.

Esempio 9.1: *La diseguaglianza di Young.* Due funzioni che siano la trasformata di Legendre una dell'altra vengono dette *duali nel senso di Young.* La definizione stessa di trasformata di Legendre implica la *diseguaglianza di Young:* $px \le f(x) + g(p)$, per ogni valore di p, x per cui le funzioni siano definite. Ad esempio, sia $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ con $\alpha > 1$. Allora la sua trasformata è $g(p) = \frac{p^\beta}{\beta}$, dove $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. La diseguaglianza di Young in questo caso si scrive $px \le \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}$ per x, $p > 0$, α, $\beta > 1$ e $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. La diseguaglianza di Young svolge un ruolo significativo nella costruzione degli spazi L^p in Analisi Funzionale.

9.1.2 La trasformata di Legendre in più variabili

L'aspetto che ci interessa particolarmente nella trasformata di Legendre è la connessione tra una trasformazione di variabili e la sua inversa. Formuliamo questa proprietà nella forma in cui ci sarà utile in seguito

Proposizione 9.1: *Sia $f(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ una funzione delle n variabili $(x_1, \ldots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$ e di altre variabili $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ che hanno ruolo di parametri, e supponiamo che per tutti i valori di α che ci interessano sia soddisfatta la condizione di non degenerazione*

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right) \ne 0.$$

Sia $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ una trasformazione di variabili generata da f tramite le equazioni

$$y_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} \ , \quad j = 1, \ldots, n \ . \tag{9.2}$$

Allora la trasformazione inversa $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha})$ è generata dalla trasformata di Legendre $g(y_1, \ldots, y_n)$ definita come

$$g(y_1, \ldots, y_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j - f(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\right)\Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{y},\alpha)} \ ,$$

---

questa proprietà non si estende ai differenziali di ordine superiore al primo: in quel caso il risultato dipende dall'ordine in cui vengono eseguite le operazioni.