1

OUVERTURE

« *Data la relazione tra le quantità fluenti, trovare la relazione tra le loro flussioni.* »

È questo il *Problema I* del *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* di Newton,[1] scritto tra il 1664 ed il 1671, ma pubblicato solo dopo la morte dell'autore. E poche pagine più avanti, esaurite le spiegazioni su come risolvere il primo problema, si trova l'enunciato del *Problema II*:

« *Data la relazione tra le flussioni, trovare quella tra le quantità fluenti.* »

Che altro non è se non il problema inverso del precedente. Cosa siano le *quantità fluenti* e le *flussioni* è faccenda che Newton ha spiegato poco prima, al punto LX:

« *Chiamerò Quantità Fluenti, o semplicemente Fluenti, quelle quantità che io considero soggette ad incremento graduale ed indefinito, e le indicherò con le ultime lettere dell'alfabeto v, x, y e z per distinguerle dalle altre quantità che nelle equazioni sono considerate come note e determinate, rappresentate con le lettere iniziali a, b, c, &c. E rappresenterò con le stesse lettere sovrassegnate da un punto $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$ le velocità con cui vengono incrementate le Fluenti a causa del movimento che le produce. Così per la Velocità o Flussione di v scriverò $\dot{v}$, e per le velocità di x, y, z scriverò $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.* »

In termini più vicini al linguaggio attuale, i personaggi in gioco sono delle grandezze che evolvono nel tempo e le loro derivate temporali. I problemi sono: saper calcolare le derivate quando sia nota la legge di evoluzione, e, inversamente, saper ricostruire la legge di evoluzione quando siano note le derivate. Ovvero, per quanto riguarda il secondo problema, saper risolvere delle equazioni differenziali.

---

[1] Isaac Newton, nato a Woolsthorp, Lincolnshire (Inghilterra), 25 dicembre 1642 (4 gennaio 1643 nel calendario Gregoriano, non ancora adottato in Inghilterra in quel periodo); morto a Londra, 20 marzo 1727.

1.1 Sistemi dinamici ed equazioni differenziali

Possiamo introdurre il concetto di sistema dinamico, seppure in forma semplificata, considerando:

(i) un insieme di grandezze che definiscano in modo completo lo stato di un sistema;
(ii) una legge di evoluzione che descriva come lo stato del sistema in considerazione si modifichi nel tempo;
(iii) un'equazione, o un sistema di equazioni, che permetta di prevedere l'evoluzione a patto di avere informazioni sufficienti sullo stato presente.

Alla luce degli sviluppi degli ultimi decenni questo schema può apparire troppo ristretto. Si tratta tuttavia di una buona base di partenza sulla quale si potranno poi costruire le opportune generalizzazioni. Il che, del resto, è proprio quanto è avvenuto storicamente.

1.1.1 Lo spazio delle fasi e la cinematica

Procedendo in modo astratto potremo immaginare uno *spazio delle fasi* o *degli stati*, indicato genericamente con $\mathscr{F}$, che descrive tutti gli stati possibili del sistema. Almeno inizialmente supporremo che lo spazio delle fasi sia un aperto in $\mathbb{R}^n$, oppure una varietà differenziabile, che può essere concepita in astratto o, se si preferisce, come superficie immersa[2] in uno spazio $\mathbb{R}^n$; ciascun punto x su questa varietà corrisponderà ad uno stato ben definito del sistema. In un sistema di coordinate locali il punto verrà identificato da una n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$. In molte applicazioni, in realtà, le stesse grandezze $x_1, \ldots, x_1$ che permettono di determinare lo stato del sistema assumeranno il ruolo di coordinate.

Ad un livello puramente fenomenologico la legge di evoluzione del sistema sarà rappresentata da una funzione $x(t)$ che descrive una curva sulla varietà, parametrizzata dal tempo t. Mutuando il linguaggio da quello comunemente usato in Meccanica, chiameremo *legge oraria* la funzione $x(t)$, e chiameremo *orbita* l'insieme dei punti $\bigcup_t x(t)$; in altre parole, nel prendere in considerazione l'orbita prescinderemo da come questa venga percorsa.[3] Alla descrizione in termini analitici e geometrici dell'evoluzione del

---

[2] Come esempi tipici si pensi ad una circonferenza, un cilindro, un toro o una superficie sferica in più dimensioni.

[3] Come esempio grossolano, ma tutto sommato efficace, pensiamo ad un treno che percorre una linea ferroviaria, descrivendone la posizione con un punto. La coordinata x più naturale è la distanza dal capolinea; l'orbita è la linea ferroviaria stessa; la legge oraria è descritta parzialmente dall'orario dei treni, che specifica a quale istante t il treno dovrebbe raggiungere la stazione che si trova al Km x. L'informazione è parziale nel senso ovvio che l'orario non dà la posizione del treno ad ogni istante: al passeggero basta che il treno arrivi in orario alla stazione. Riflettendo ancora un momento, proviamo ad immaginare in modo ingenuo come venga compilato l'orario. Le caratteristiche di un tratto ferroviario e del treno (pendenza, curve, potenza della motrice, stato di efficienza della linea e del materiale, &c) determinano la velocità di percorrenza, ossia forniscono la velocità $\dot{x}$ che il treno può tenere in un determinato punto x. Se cerchiamo di dare una forma idealizzata al problema diremo che ciò equivale a scrivere un'equazione dif-

sistema indipendentemente dalle sue cause viene dato in Meccanica il nome di *cinematica*. Un termine che ben si addice anche a situazioni più generali, e che senz'altro adotteremo.

1.1.2 Le equazioni differenziali e la dinamica

Supporremo ora che la funzione $x(t)$ che rappresenta l'evoluzione del sistema sia una funzione differenziabile del tempo; sarà dunque lecito considerarne una o più derivate, che indicheremo, con le notazioni introdotte da Newton e Leibniz,[4] con i simboli

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \ , \ \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \ , \ \dots \ , \ x^{(k)} = \frac{d^kx}{dt^k} \ .$$

Se consideriamo le coordinate che abbiamo introdotto, la derivata temporale del movimento sarà data dalle derivate temporali delle funzioni $x_1(t), \dots, x_n(t)$.

Potremo allora scrivere un'equazione della forma

$$\dot{x} = f(x,t) \ , \tag{1.1}$$

da intendersi nel senso seguente: in ogni punto x della varietà supponiamo assegnato un vettore $f(x,t)$, che potrà dipendere dal tempo, che determina la derivata temporale del movimento nel punto x all'istante t. Se facciamo uso delle coordinate, il vettore $f(x,t)$ potrà scriversi mediante le sue n componenti $f_1(x_1,\dots,x_n,t),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n,t)$. Avremo, in altre parole, il sistema di n equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1,\dots,x_n,t) \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1,\dots,x_n,t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

ove i secondi membri sono funzioni reali definite sullo spazio delle fasi $\mathscr{F}$.

L'incognita in queste equazioni è la funzione $x(t)$. Risolvere l'equazione significa trovare una funzione che sostituita insieme alla sua derivata nella (1.1) renda vera l'eguaglianza, identicamente in t.

L'equazione (1.1) controlla la dinamica del sistema nel senso che *le evoluzioni possibili sono tutte e sole quelle descritte dalle soluzioni dell'equazione*. In questa

---

ferenziale $\dot{x} = f(x)$, alla quale si devono aggiungere delle condizioni che specificano i tempi di sosta nelle stazioni. Si vede dunque come la compilazione dell'orario dei treni richieda un processo non molto dissimile dall'integrazione di un'equazione differenziale. Va da sé che una tale rappresentazione è solo l'inizio di una faccenda ben più ampia e complicata: sulla stessa linea devono transitare diversi treni che partono ad orari diversi e fanno fermate diverse; la rete ferroviaria è una struttura complessa sulla quale si possono individuare molti percorsi che possono ben avere tratti in comune; occorre tener conto delle coincidenze; &c.

[4] Gottfried Wilhelm Leibniz, nato a Leipzig (Germania), 1 luglio 1646; morto ad Hannover, 14 novembre 1716.

affermazione si cela il *determinismo*[5] che caratterizza la Meccanica Classica, così come una parte consistente della teoria dei sistemi dinamici: la conoscenza dello stato del sistema ad un determinato istante e delle cause che ne regolano l'evoluzione permette, in linea di principio, di conoscerne tutta la storia passata e futura. Questo concetto è espresso con rara e straordinaria efficacia in un celebre passo dell'Introduzione alla *Théorie analytique des probabilités* di Laplace,[6] datato 1812, ma maturato molti anni prima.[7]

> « *Nous devons envisager l'état present de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces donnees à l'Analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grand corps de l'univers et ceux du plus léger atome; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait present à ses yeux.* »

È opportuno soffermarsi un attimo su questo punto. L'evoluzione dello stato del sistema viene attribuita a delle cause, che si suppongono descritte in modo completo dal vettore $f(x,t)$. L'equazione (1.1) stabilisce che l'evoluzione istantanea del sistema è dovuta precisamente, ed esclusivamente, a tali cause. Ci si attende pertanto che l'evoluzione a partire da uno stato assegnato sia conseguenza ben determinata, e quindi prevedibile, dello stato iniziale, ossia che siano vere alcune affermazioni minimali, che possiamo così elencare:

(i) assegnato un tempo iniziale t_0 e un corrispondente stato iniziale x_0 esista una soluzione che descriva l'evoluzione nel passato e nel futuro;

(ii) che la soluzione sia determinata in modo univoco.

---

[5] Il determinismo, come principio filosofico, ha origini remote che si possono far risalire addirittura a Leucippo di Mileto (V secolo a.C.) e, soprattutto, al suo allievo Democrito di Abdera (vissuto tra il 460 e il 360 a.C.). Nella loro teoria il fondamento del determinismo sta nella dottrina atomistica, secondo la quale la natura è interamente governata dal movimento di particelle piccolissime e indivisibili, dette *atomi*. Tuttavia è con Laplace che il determinismo viene anche eletto a paradigma scientifico, efficacemente descritto nel passo riportato nel testo. È difficile non leggere la potente descrizione di Laplace come una traduzione delle proprietà fondamentali delle soluzioni di equazioni differenziali, delle quali Laplace aveva, se non una dimostrazione (ottenuta peraltro solo qualche anno dopo da Cauchy), senza dubbio una certezza intuitiva.

[6] Pierre Simon de Laplace, nato Beaumont-en-Auge, Normandia (Francia), 23 marzo 1749; morto a Parigi, 5 marzo 1827.

[7] "Noi dobbiamo considerare lo stato presente dell'universo come l'evoluzione del suo stato passato, e come la causa di quello che accadrà. Un'intelligenza che, ad un certo istante, potesse conoscere tutte le forze che animano la natura, e la posizione relativa di tutto ciò che la compone, e che fosse anche così vasta da riuscire a sottoporre questi dati all'Analisi, potrebbe condensare in una sola formula i movimenti dei corpi più grandi dell'universo e quelli dell'atomo più leggiero; nulla per lei sarebbe incerto, e ai suoi occhi sarebbero presenti sia l'avvenire che il passato."

Va da sé che le proprietà richieste potranno essere verificate solo se il secondo membro dell'equazione (1.1) soddisfa opportune condizioni di regolarità. Inoltre, la prima domanda nasconde un'ulteriore difficoltà: in generale l'esistenza della soluzione può essere assicurata solo *localmente*. La prolungabilità della soluzione per qualunque istante di tempo, sia nel passato che nel futuro, non può essere sempre garantita.

Su questi problemi, che costituiscono il cuore della teoria delle equazioni differenziali, torneremo più avanti, nel capitolo 2.

Prima di chiudere questo paragrafo introduciamo ancora qualche termine tecnico. Un sistema per cui il vettore $f(x,t)$ non dipenda esplicitamente dal tempo, e quindi si possa scrivere semplicemente $f(x)$, viene detto *autonomo*. In tal caso si suppone che l'evoluzione del sistema dipenda solo dalle interazioni tra le parti che lo compongono; in altre parole, si considera il sistema come isolato. Per contrapposizione, se la dipendenza dal tempo è esplicita si dice che il sistema è *non autonomo*. Si intende in tal caso che l'evoluzione del sistema dipende anche da qualche agente esterno che influenza l'evoluzione delle grandezze del sistema, ma non ne viene modificato. Rimandiamo agli esempi qui sotto per rendere più chiaro questo concetto.

1.2 I primi esempi

Sarebbe perfettamente naturale porre in cima all'elenco degli esempi i modelli della Meccanica Classica: non si dimentichi che proprio in quell'ambito sono nati e si sono sviluppati i metodi che oggi trovano applicazione nei campi più disparati, e si è creata l'ossatura di quella che oggi è diventata la teoria dei sistemi dinamici. Ma preferiamo iniziare da modelli più semplici. Inoltre, ci limiteremo qui a scrivere delle equazioni, senza spingerci, salvo in casi veramente elementari, fino a descrivere le soluzioni. Queste verranno trattate nei capitoli che seguiranno.

1.2.1 Il decadimento radioattivo

Il fenomeno del decadimento radioattivo spontaneo, scoperto da Becquerel[8] nel 1896, consiste, in termini semplici, nella trasformazione di un nucleo atomico in un nucleo diverso, con emissione contemporanea di particelle e radiazione. Il processo è casuale, sicché non è possibile a priori stabilire se e quando un determinato atomo sarà soggetto a decadimento. Tuttavia se ne può dare una descrizione statistica.

Si considerano N nuclei, con N molto grande, e si assume che ad un determinato istante tutti gli atomi abbiano la stessa probabilità di decadimento. Dunque il numero ΔN di atomi che decadranno in un intervallo di tempo Δt sarà proporzionale sia a Δt che al numero N di atomi presenti, ovvero $\Delta N = -\lambda N \Delta t$, dove λ è una costante che caratterizza il tipo di nucleo atomico in esame, e che dovrà determinarsi sperimentalmente; il segno negativo si giustifica osservando che il numero totale di nuclei soggetti a decadimento diminuisce.

[8] Antoine Henri Becquerel (Parigi, 15 Dicembre 1852 – Le Croisic, département de Loire-Atlantique 25 Agosto 1908), premio nobel per la Fisica nel 1903 con Marie e Pierre Curie.

Poiché N è molto grande, potremo considerarlo come una variabile continua, sicché lo stato del sistema è rappresentato da $\mathbb{R}_+$, ovvero il semiasse positivo della retta reale. Riscriveremo la relazione precedente come

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \ . \tag{1.3}$$

Questa è l'equazione differenziale che descrive il processo, e da qui possiamo ricavare la funzione $N(t)$ che ci dà il numero di nuclei residui al tempo t. Possiamo verificare direttamente che la soluzione è

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{1.4}$$

dove N_0 è il numero di nuclei presenti all'istante iniziale $t = 0$. Si ha dunque una decrescita esponenziale del numero di nuclei potenzialmente attivi.

È d'uso considerare il *tempo di dimezzamento* τ definito come il tempo necessario perché la metà dei nuclei inizialmente presenti abbia subito il decadimento. Questo si calcola facilmente imponendo $N(\tau) = N_0 e^{-\lambda\tau} = N_0/2$, ovvero

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda} \simeq \frac{0.6931471806}{\lambda} \ . \tag{1.5}$$

1.2.2 La crescita delle popolazioni

Veniamo ad alcuni modelli talvolta usati in biologia. Si vuole descrivere l'evoluzione di una specie tenendo traccia del numero di individui. Anche in questo caso la grandezza considerata dovrebbe essere rappresentata da un numero intero, ma i modelli più comuni fanno uso di un numero reale, sicché lo spazio delle fasi è ancora $\mathbb{R}_+$.

L'equazione di evoluzione più semplice consiste nel considerare la specie come inserita in un ambiente che mette a disposizione risorse infinite. In tal caso si può assumere che la variazione della popolazione sia determinata solo dalla morte di individui esistenti e dalla nascita di nuovi individui. È anche naturale assumere che sia il numero dei morti che quello dei nuovi nati ad ogni generazione sia proporzionale al numero corrente x di individui, con un fattore di proporzionalità $\lambda_+ > 0$ per le nascite dipendente dalla capacità di proliferare degli individui stessi e un fattore $\lambda_- < 0$ per le morti. Si avrà dunque l'equazione

$$\dot{x} = \lambda x \ , \quad \lambda = \lambda_+ + \lambda_- \ . \tag{1.6}$$

Se si suppone che all'istante iniziale $t = t_0$ vi siano x_0 individui allora la legge di evoluzione diventa

$$x(t) = x_0 e^{\lambda(t-t_0)} \ ; \tag{1.7}$$

per convincersene basta verificare per sostituzione che la funzione qui scritta soddisfa l'equazione. Si hanno quindi i casi di crescita esponenziale se le nascite superano le morti, di popolazione costante se nascite e morti si equilibrano, e decrescita esponenziale fino all'estinzione se le morti prevalgono sulle nascite. È questo il modello

proposto da Malthus[9] nel 1798 [48].

Si può tener conto almeno in misura minima dell'azione dell'ambiente, e in particolare dell'insufficienza di risorse causata da un'eventuale crescita esponenziale, modificando l'equazione (1.7) in[10]

$$\dot{x} = \lambda x(1-x) \ . \tag{1.8}$$

Questo modello è stato proposto da Verhulst[11] in due lavori del 1838 e 1845, ed è talvolta chiamato *equazione logistica*. Rimandiamo la discussione delle soluzioni di questa equazione al prossimo capitolo.

Naturalmente, è ben lecito supporre che i parametri ambientali possano variare col tempo (ad esempio con le stagioni). In tal caso si potrà scrivere, ad esempio, l'equazione

$$\dot{x} = \lambda(t)x \ , \tag{1.9}$$

ossia correggere la legge di Malthus rendendo dipendente dal tempo il fattore λ. Così facendo il modello diventa non autonomo (le stagioni possono condizionare la crescita di una specie di insetti, ma non ne sono modificate). Un'ulteriore modifica potrebbe tener conto di parametri ambientali, anch'essi dipendenti dal tempo, che sono indipendenti dalla popolazione. Si potrebbe dunque ipotizzare, in generale, un'equazione del tipo

$$\dot{x} = \lambda(t)x + b(t) \ , \tag{1.10}$$

con una funzione $b(t)$ assegnata.

Il modello preda–predatore, proposto indipendente da Lotka[12] [47] nel 1925 e da Volterra[13] [66] nel 1926, e noto appunto come modello di Lotka-Volterra, prende in considerazione la possibilità di interazione tra due specie diverse. Si suppone che la preda trovi nutrimento nell'ambiente, e che ne trovi senza limitazioni; il predatore invece si nutre solo delle prede. Una situazione di questo tipo può descriversi mediante il sistema di equazioni

$$\dot{x} = \alpha x - \beta xy \ , \quad \dot{y} = -\gamma y + \delta xy \ , \tag{1.11}$$

---

[9] Thomas Robert Malthus, nato a Dorking, poco a sud di Londra, 14 febbraio 1766; morto a Bath, 29 dicembre 1834.

[10] Qui si deve pensare a $x = N/N_*$ come alla frazione di individui rispetto ad un non meglio precisato N_*, che può pensarsi come un massimo ammesso dalle condizioni ambientali.

[11] Pierre–Francois Verhulst, nato a Bruxelles, 28 ottobre 1804; morto a Bruxelles, 15 febbraio 1849.

[12] Alfred James Lotka, nato a Lwów (Lemberg), allora in Austria ma oggi in Ucraina, il 2 marzo 1880; emigrato nel 1902 in USA, dove morì il 5 dicembre 1949.

[13] Vito Volterra, nato ad Ancona, allora nello Stato Pontificio, 3 maggio 1860; morto a Roma, 11 ottobre 1940.

dove x, y sono rispettivamente le popolazioni di prede e predatori, e $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono parametri positivi. È bene soffermarsi a leggere l'equazione. Le prede, trovando nutrimento a volontà nell'ambiente, si moltiplicano secondo la legge di Malthus (il termine αx); invece i predatori tenderebbero semplicemente ad estinguersi, in mancanza di prede (il termine $-\gamma y$). Consideriamo ora l'interazione tra le due popolazioni. Le prede diminuiscono in conseguenza dell'azione dei predatori; è ragionevole supporre, in prima approssimazione, che il numero di prede catturate sia proporzionale sia al numero dei predatori attivi che a quello delle prede disponibili (il termine βxy). D'altro canto i predatori, trovando cibo, possono a loro volta moltiplicarsi proporzionalmente al loro numero e al numero di prede catturate (il termine δxy).

Anche qui, potremmo rendere il modello più complesso aggiungendo dipendenze temporali nei parametri, o termini che tengano conto di altri aspetti (ad esempio, la capacità delle prede di nascondersi, o la limitazione delle risorse ambientali a disposizione delle prede). Analogamente, si potrebbero immaginare modelli che descrivano l'interazione di tre o più specie diverse. Ma riteniamo più conveniente passare ad altri modelli.

1.2.3 I sistemi meccanici

Facciamo riferimento anzitutto, per semplicità, al modello di un punto materiale. L'insieme delle posizioni che un punto può assumere viene detto *spazio delle configurazioni*. Questo potrà essere, ad esempio, la retta, o il piano, o lo spazio tridimensionale in cui si svolge la nostra esistenza. Il movimento verrà descritto mediante una funzione $x(t)$ che si dovrà assumere almeno continua, ma che noi – salvo avviso contrario – supporremo essere anche differenziabile quanto serve.

Va da sé che la conoscenza della posizione – ovvero del punto che rappresenta il sistema nello spazio delle configurazioni – non è sufficiente a caratterizzare il sistema in modo completo. Dovremo dunque considerare anche la velocità $v = \dot{x}$ e l'accelerazione $a = \ddot{x}$. Potremmo considerare anche le derivate successive, ma nella Meccanica Newtoniana ciò non è necessario.

È notevole il fatto – su cui si fonda la Meccanica Classica – che la coppia posizione–velocità sia sufficiente a caratterizzare in modo completo lo stato del sistema. Lo spazio delle fasi è dunque costituito dall'insieme di tutte le possibili coppie (x, v). L'evoluzione temporale verrà a sua volta descritta dalla coppia di funzioni $\big(x(t), v(t)\big)$.

La dinamica del punto obbedisce all'equazione di Newton

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) \ , \tag{1.12}$$

ove m è la massa del punto materiale, e $F(x, \dot{x}, t)$ è la forza che agisce sul punto. Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine (nel senso che coinvolge le derivate della funzione fino alla seconda).

È consuetudine – peraltro comoda – introdurre nello spazio delle configurazioni un riferimento cartesiano ortogonale. In tal caso la posizione verrà identificata da una singola coordinata x nel caso della retta, o da una coppia di coordinate (x, y) nel caso del piano, o ancora da una terna (x, y, z) nel caso di un punto nello spazio. Analogamente, la velocità e l'accelerazione del punto, così come la forza, verranno

rappresentate mediante le componenti sugli assi cartesiani. Come di consueto nel caso piano e spaziale identificheremo le componenti di un vettore con dei pedici x, y, z. Così, nel caso spaziale potremo scrivere l'equazione di Newton nella forma

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \ , \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \ , \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \ , \end{aligned} \tag{1.13}$$

dove le forze F_x, F_y, F_z dovranno considerarsi funzioni note dello stato del sistema, ovvero della posizione, della velocità e del tempo.

Tra i modelli meccanici più semplici possiamo senz'altro annoverare numerosi modelli in una dimensione. Ecco un breve elenco dei casi più comuni.

$\ddot{x} = 0$	punto libero,
$\ddot{x} = -g$	caduta dei gravi,
$m\ddot{x} = -kx$	oscillatore armonico,
$m\ddot{x} = kx$	repulsore armonico,
$m\ddot{x} = -kx + a\cos\nu t$	oscillatore forzato,
$\ddot{x} = -\dfrac{g}{l}\sin x$	pendolo semplice,
$m\ddot{x} = -\dfrac{g}{l}\sin x + a\cos\nu t$	pendolo forzato,

dove m (massa) g (accelerazione di gravità), k (costante elastica), ν (frequenza della forzante) e l (lunghezza del pendolo) sono costanti positive. Una variante interessante consiste nell'aggiungere al membro di destra di ciascuna delle equazioni elencate sopra un termine $-\gamma\dot{x}$, con $\gamma > 0$ (coefficiente di attrito viscoso), che tiene conto dell'attrito esercitato da un mezzo.

Le prime cinque equazioni si risolvono con metodi elementari anche quando si aggiunga il termine di attrito viscoso – ne discuteremo in maggior dettaglio nel prossimo capitolo. La caratteristica che le accomuna è l'appartenenza alla classe delle *equazioni lineari*, per le quali si possono ricavare le soluzioni con metodi ben conosciuti. L'equazione del pendolo invece rientra nella classe delle equazioni *non lineari*. La soluzione è nota, ma richiede già, per la sua scrittura, la tecnologia non elementare delle funzioni ellittiche. Infine, l'equazione del pendolo forzato, per quanto possa apparire innocua per chi già sappia trattare l'equazione del pendolo, rientra nella classe dei sistemi cosiddetti *non integrabili*: per particolari dati iniziali l'evoluzione del sistema risulta essere sì deterministica, ma caotica. Questo concetto richiederebbe una discussione approfondita, ma per ora può essere sufficiente pensare ad un sistema con una sensibilità alle condizioni iniziali tale da renderne in pratica imprevedibile il comportamento.

Esercizio 1.1: Verificare che alle equazioni sulla colonna di sinistra corrispondono le soluzioni sulla colonna di destra, con x_0, v_0 costanti. Verificare anche che per le soluzioni scritte x_0, v_0 rappresentano rispettivamente la posizione e la velocità al

tempo $t = 0$, ossia vale $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= 0 \ , & x(t) &= v_0 t + x_0 \ . \\
\ddot{x} &= -g \ , & x(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + x_0 \ . \\
\ddot{x} &= -\omega^2 x \ , & x(t) &= x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \ . \\
\ddot{x} &= \lambda^2 x \ , & x(t) &= \frac{\lambda x_0 + v_0}{2\lambda} \, e^{\lambda t} + \frac{\lambda x_0 - v_0}{2\lambda} \, e^{-\lambda t} \ .
\end{aligned}$$

Esercizio 1.2: Verificare che l'equazione $\ddot{x} = -\omega^2 x + \varepsilon \cos \nu t$ ammette le soluzioni

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{\varepsilon}{\omega^2 - \nu^2} \cos \nu t + A \cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{per } \omega \neq \nu \ , \\
x(t) &= \frac{\varepsilon}{2\omega} t \sin \omega t + A \cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{per } \omega = \nu \ .
\end{aligned}$$

Tracciare il grafico delle soluzioni $x(t)$ in funzione del tempo.

Per la considerazione di casi di moto nello spazio o di sistemi di punti materiali rimandiamo senz'altro al capitolo sulla Meccanica Newtoniana.

1.3 Un po' di fenomenologia

Abbiamo già osservato come il modello di Lotka–Volterra sia stato usato per descrivere sistemi ben diversi, in ambiente chimico o biologico. Tale fatto non deve stupire più di tanto. In effetti, la rappresentazione di sistemi reali mediante modelli matematici astratti rivela spesso una sostanziale identità nel comportamento di sistemi apparentemente privi di elementi in comune. Così, per esempio, l'equazione dell'oscillatore armonico con le sue varianti – con forzante e/o con attrito – si rivela un'ottima approssimazione per numerosi modelli il cui comportamento dinamico presenta delle oscillazioni regolari intorno ad una situazione di equilibrio; l'equazione del pendolo forzato si ritrova, in qualche forma, nella descrizione dei fenomeni di risonanza; la stessa equazione con l'aggiunta di un piccolo smorzamento può descrivere il fenomeno di accoppiamento spin–orbita.[14] Fenomeni di questo genere si presentano in un gran numero di sistemi: circuiti oscillanti, fisica degli acceleratori o dei plasmi, reazioni chimiche, cicli biologici, &c.

È dunque interessante studiare il comportamento delle soluzioni delle equazioni differenziali anche senza far riferimento a modelli specifici. Per questo vogliamo richiamare almeno le equazioni di alcuni modelli che vengono di fatto usati come paradigmi per illustrare dei fenomeni interessanti.

---

[14] Il fatto, ad esempio, che la luna rivolga sempre la stessa faccia alla terra. È un fenomeno che si presenta per molti satelliti nel sistema solare.

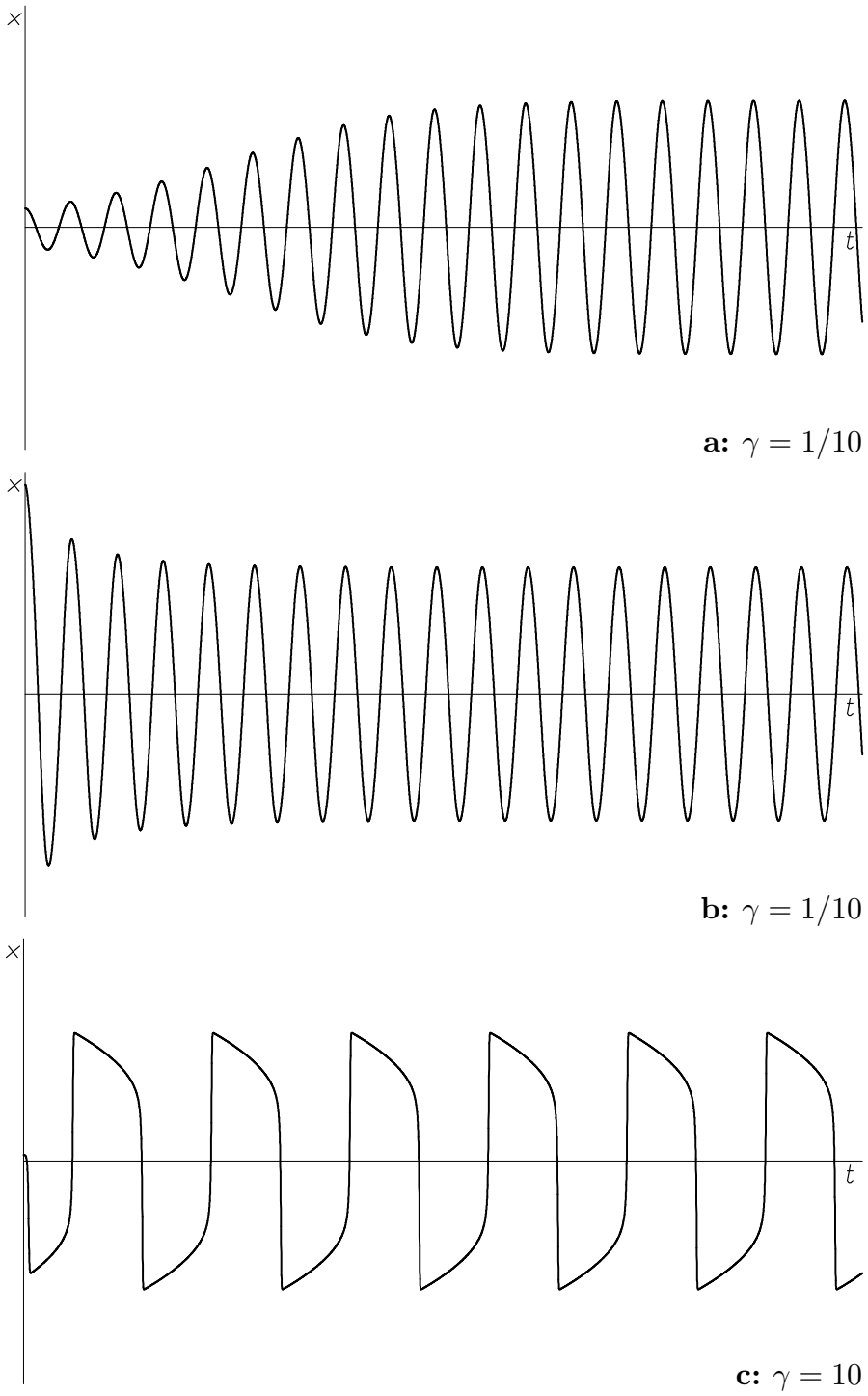


Figura 1.1. L'evoluzione temporale del modello di Van der Pol. Per valori bassi della costante γ (figure **a**, **b**)che controlla l'attrito l'evoluzione tende ad un andamento oscillante con regolarità. Per valori alti di γ (figura **c**) le oscillazioni diventano sensibilmente più brusche, e assumono un tipico andamento a scatti.

1.3.1 Il ciclo limite

Un primo fenomeno è quello del *ciclo limite*, che si ritrova nella celebre equazione di Van der Pol

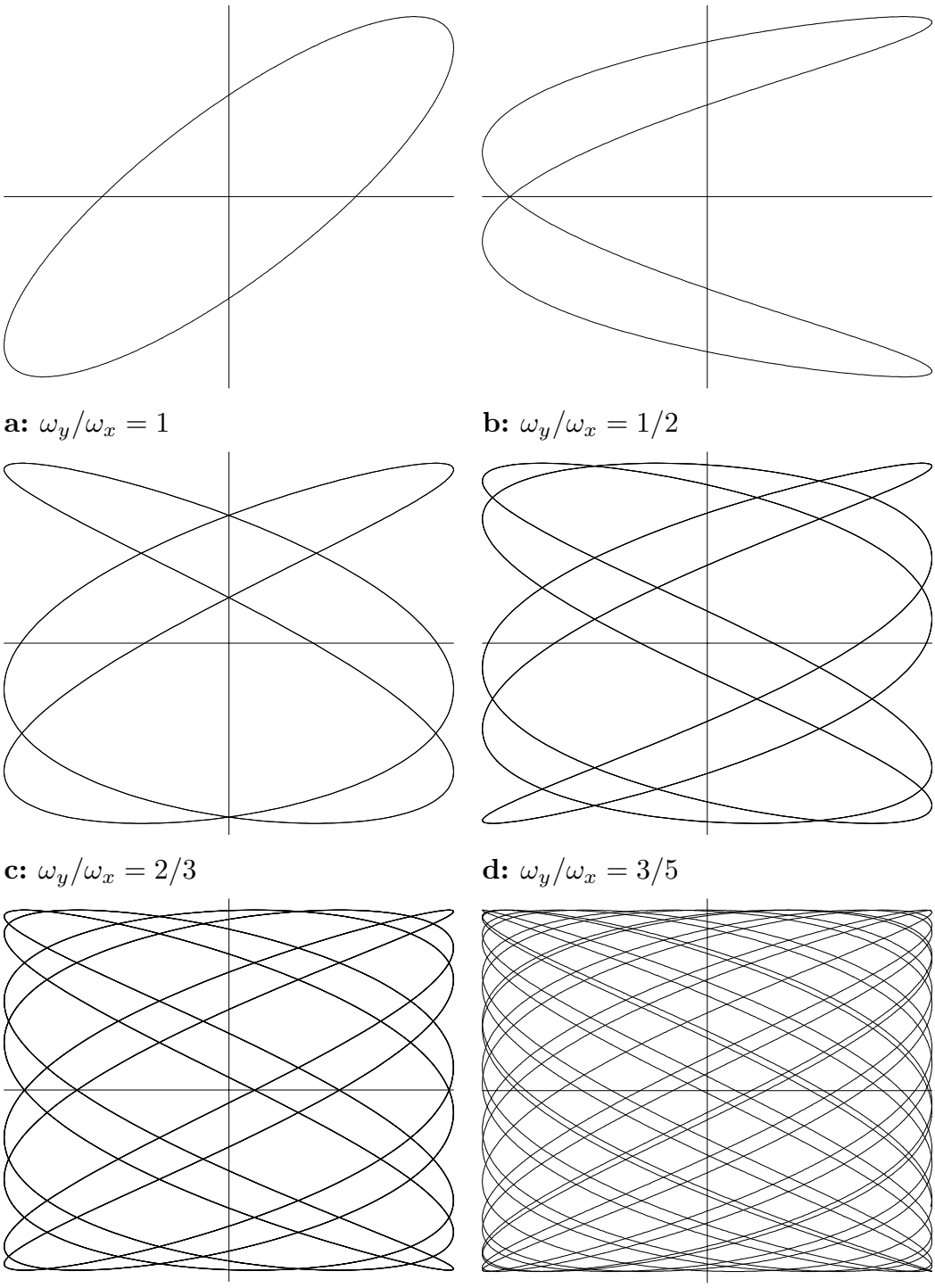
$$\ddot{x} + \gamma(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \ , \tag{1.14}$$

utilizzata originariamente per descrivere il comportamento di un circuito elettrico non lineare [64][65]. L'equazione è simile a quella dell'oscillatore smorzato, salvo per il fatto che il coefficiente di $\dot{x}$ contiene un fattore $x^2 - 1$ che ne cambia il segno per $|\dot{x}| > 1$. Si ha dunque, per velocità piccole, una sorta di attrito positivo, che tende ad accrescere l'ampiezza delle oscillazioni, mentre per velocità elevate si introduce uno smorzamento. Si può immaginare che in queste condizioni il sistema tenda a stabilizzarsi in uno stato permanente di oscillazione con un periodo ben definito. Così accade, infatti, come viene illustrato in figura 1.1. L'aspetto rilevante, che ben si vede nei grafici **a** e **b** della figura, è che una volta superato un transiente più o meno lungo il sistema si stabilizza su un'oscillazione di ampiezza costante, che per valori piccoli di γ sembra alquanto regolare e non troppo dissimile da quella di un oscillatore armonico. Quando si considera una costante di attrito γ elevata invece il sistema sembra saltare bruscamente tra due stati abbastanza ben definiti, senza però perdere le caratteristiche di periodicità.

Il fenomeno del ciclo limite si presenta anche nei comuni orologi, a pendolo, meccanici o elettronici poco importa. Gli ingredienti sono sostanzialmente gli stessi: un meccanismo di auto sostentamento delle oscillazioni che tende a fornire energia ad ogni ciclo, e un meccanismo di attrito che tende a dissiparla. Negli orologi a pendolo o meccanici l'energia è fornita da una molla o da un sistema di pesi, con il tramite di un meccanismo di scappamento ad ancora che ad ogni oscillazione dà un colpetto all'asta che sostiene la massa oscillante o al bilanciere — ciò che del resto fa ogni buon nonno intento a spingere il nipotino su un'altalena; l'attrito è generato dai congegni meccanici – cerniere, ruote dentate che trasmettono il movimento alle lancette, &c. Negli orologi elettronici la massa oscillante è sostituita da un quarzo, l'energia è fornita da una batteria, e la dissipazione è causata dalla resistenza dei circuiti elettrici. È notevole il fatto che la possibilità di realizzare oscillazioni permanenti a frequenza fissata dipenda in modo cruciale dall'esistenza dell'attrito. Un pendolo ideale, totalmente privo di attriti, potrebbe oscillare indefinitamente, mantenendo invariata la sua ampiezza, ma la frequenza di oscillazione dipenderebbe, per l'appunto, dall'ampiezza, e non sarebbe dunque ben definita. La combinazione dei meccanismi di alimentazione e di attrito invece forza il sistema a rilassare verso un'ampiezza di oscillazione ben determinata, con una frequenza ben definita.

1.3.2 Le oscillazioni intorno ad un equilibrio

Un modello più complesso è rappresentato dall'interazione di sistemi oscillanti. Per comprendere il problema si pensi, ad esempio, ad un punto soggetto contemporaneamente a due oscillazioni con frequenze costanti lungo l'asse x e lungo l'asse y di un sistema di riferimento cartesiano, ma con due frequenze diverse. Ciò si può realizzare, ad esempio, lasciando oscillare una pallina sul fondo di una scodella con forma



a: $\omega_y/\omega_x = 1$ **b:** $\omega_y/\omega_x = 1/2$

c: $\omega_y/\omega_x = 2/3$ **d:** $\omega_y/\omega_x = 3/5$

e: $\omega_y/\omega_x = 5/8$ **f:** $\omega_y/\omega_x = (\sqrt{5}-1)/2$

Figura 1.2. Le traiettorie nel piano x, y generate da due movimenti oscillatori lungo i due assi, con frequenze diverse. Nelle figure **a**–**e** il rapporto tra le frequenze è razionale, e la curva è chiusa. Nella figura **f** il rapporto è irrazionale, e la curva non si richiude su se stessa.

ellissoidale. Le equazioni che descrivono un tal sistema sono

$$\ddot{x} + \omega_x^2 x = 0 \ , \quad \ddot{x} + \omega_y^2 x = 0 \tag{1.15}$$

Il lettore potrà verificare senza difficoltà che le soluzioni di questo sistema si scrivono

$$x(t) = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x) \ , \quad y(t) = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y) \ , \tag{1.16}$$

dove $A_x \, , A_y$ (le *ampiezze*) e $\varphi_x \, , \varphi_y$ (le *fasi*) sono costanti arbitrarie. Ma la sorpresa viene quando si tenti di rappresentare le curve così definite nel piano x, y. Si scopre che la curva risultante dipende sensibilmente dal rapporto ω_y/ω_x tra le frequenze; più avanti analizzaremo questo fenomeno in dettaglio. Le figure tracciate prendono il nome di *figure di Lissajous*, rappresentate in figura 1.2 per alcuni valori del rapporto ω_y/ω_x. Per chi non abbia dimestichezza con questi fenomeni può già essere sorprendente il fatto che l'orbita sia chiusa, e quindi il moto sia periodico, se e solo se il rapporto tra le frequenze è un numero razionale.

Fenomeni analoghi si hanno combinando oscillazioni in dimensione superiore a 2. In effetti, il comparire di frequenze caratteristiche di oscillazione è tipico per tutti i sistemi che si trovino in prossimità di un equilibrio, quali ad esempio gli atomi in un reticolo cristallino o i singoli atomi che compongono una molecola. Nel caso di sistemi continui si hanno fenomeni analoghi anche per il caso di una corda tesa tra due estremi fissi (si pensi ad una corda di chitarra o di pianoforte), o di una colonna d'aria in un tubo (una canna d'organo o uno strumento a fiato), o del campo elettromagnetico in una cavità (un forno, eventualmente a microonde).

1.3.3 Le oscillazioni non lineari e il comportamento caotico

Le equazioni(1.16) rientrano nella classe delle cosiddette *equazioni lineari*, che discuteremo in dettaglio. Ma sarebbe illusorio pensare che equazioni di questo tipo descrivano completamente il comportamento di un modello reale. Ci si può avvicinare meglio alla realtà includendo nelle equazioni anche dei termini che siano non–lineari nelle variabili x, y, ad esempio termini quadratici. Un esempio ormai classico è il sistema

$$\ddot{x} + \omega_x^2 x = -2xy \ , \quad \ddot{x} + \omega_y^2 x = -x^2 + y^2 \ . \tag{1.17}$$

Per quanto le equazioni possano apparire innocue – soprattutto agli occhi di uno studente che ha acquisito una certa familiarità con gli esercizi di Analisi Matematica – si tratta di un sistema di cui non è possibile scrivere le soluzioni in termini di funzioni note. Sistemi di questo tipo sono stati studiati a lungo da G. Contopoulous a partire dalla fine degli anni '50, quando la disponibilità dei calcolatori elettronici rese possibile l'esecuzione di calcoli lunghi e complessi, che nessuno mai avrebbe tentato di eseguire a mano.[15] In effetti, fu proprio con questo modello, con $\omega_x = \omega_y = 1$, che Hénon e

[15] Il primo calcolatore elettronico nel senso moderno del termine fece la sua comparsa nel 1949. Nel 1952 E. Fermi, J. Pasta e S. Ulam diedero inizio alla prima esplorazione della dinamica di un sistema fisico complesso condotta con metodi di integrazione numerica di equazioni differenziali, studiando un modello discretizzato di una corda vibrante. Le equazioni non erano molto dissimili da quelle del sistema (1.17), salvo per il fatto che

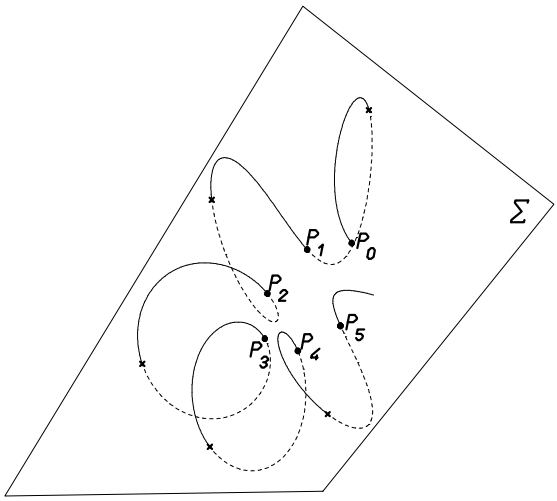


Figura 1.3. Ad illustrazione del metodo della sezione di Poincaré. L'orbita che parte dal punto P_0 interseca successivamente la superficie Σ nei punti P_1, $P_2, \ldots$; l'osservazione di questi punti dà informazioni qualitative sul comportamento dell'orbita.

Heiles misero in evidenza l'esistenza di moti caotici anche in sistemi apparentemente semplici. Un fatto, questo, già scoperto da Poincaré[16] nel 1890, ma rimasto pressoché sconosciuto alla quasi totalità dei fisici e dei matematici per più di ottant'anni [58].

Lo strumento più semplice per mettere in evidenza il comportamento caotico è la cosiddetta *sezione di Poincaré*, illustrata in figura 1.3. Se si considera un'orbita in uno spazio tridimensionale si può identificare una superficie – nel caso più semplice un piano – che venga intersecata regolarmente dall'orbita. Si possono allora ricavare diverse informazioni qualitative sulla dinamica semplicemente osservando le intersezioni successive dell'orbita con la superficie. Ad esempio, un'orbita periodica intersecherà la superficie di sezione in un numero finito di punti; un'orbita che giace su una superficie regolare intersecherà la superficie di sezione lungo una curva, anch'essa regolare; un'orbita che vaga nello spazio in modo irregolare darà origine ad una successione di

---

si trattava di un sistema di 32 o 64 equazioni. I risultati di quel primo lavoro numerico, pubblicati nel 1955 in un rapporto interno dei laboratori di Los Alamos [20], aprirono una serie di problemi ai quali a tutt'oggi non è stata data una risposta soddisfacente, e che continuano a suscitare interesse. Nel 1958 G. Contopoulos pubblicò i primi studi numerici di orbite galattiche; delle sue lunghe ricerche in questo campo, proseguite per diversi anni, si dà conto nel libro [11]. Nel 1964 vide la luce il lavoro di M. Hénon e C. Heiles [32] in cui si metteva in evidenza l'esistenza di orbite con comportamento caotico nel modello descritto dalle equazioni (1.17). Non è esagerato dire che quei lavori segnarono l'inizio della crescita esplosiva di interesse nei confronti dei sistemi dinamici – una materia fino a quel momento nota solo a pochi matematici di gran valore – iniziata dopo il 1970.

[16] Jules Henri Poincaré, nato a Nancy, Francia, 29 aprile 1854; morto a Parigi, 17 luglio 1912.

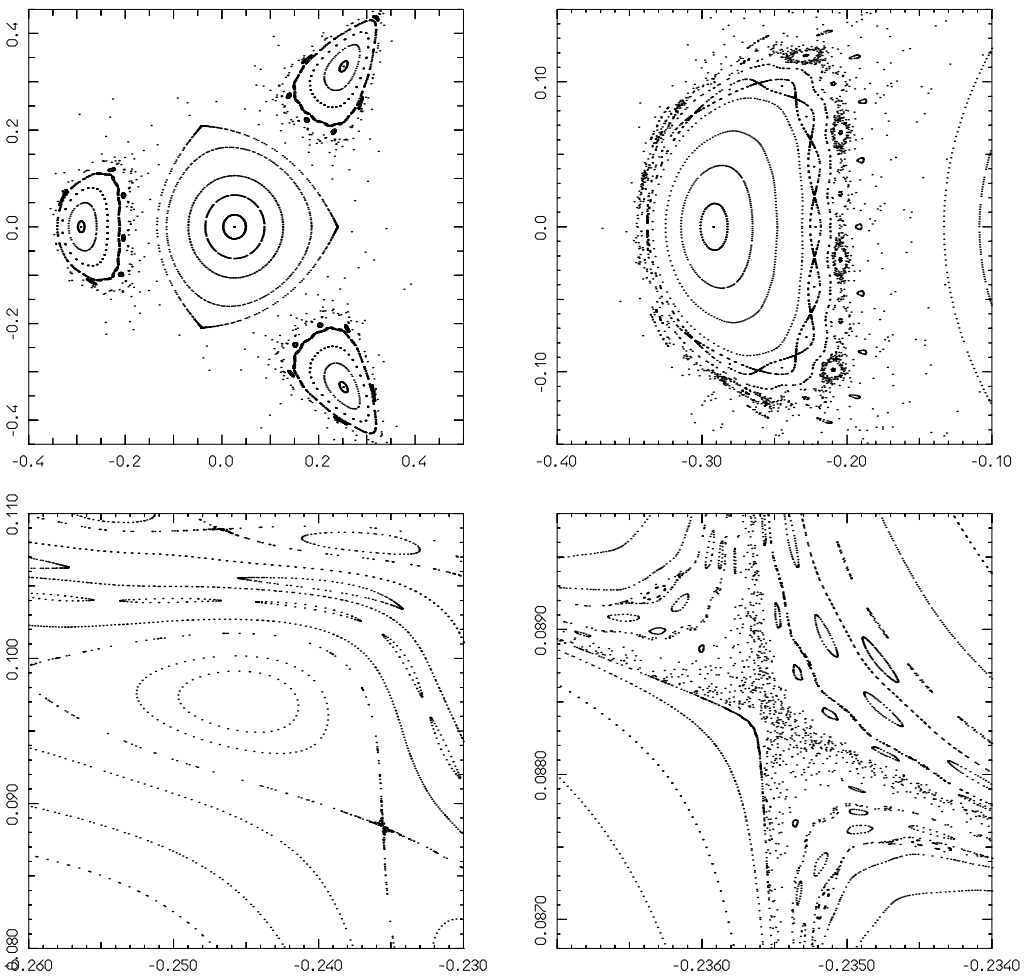


Figura 1.4. Sezioni di Poincaré per il sistema di equazioni (1.17). La figura in alto a destra descrive tutta la regione che presenta aspetti interessanti dal punto di vista dinamico. Le altre figure sono ingrandimenti che mettono in evidenza la complessità delle orbite.

punti disposti in modo del tutto casuale.

Nel caso del sistema di equazioni (1.17) occorre qualche informazione preliminare. Lo spazio delle fasi è $\mathbb{R}^4$, in quanto lo stato del sistema è identificato in modo completo dalle posizioni x, y e dalle velocità $\dot{x}, \dot{y}$ del punto che rappresenta l'orbita. L'orbita però occupa solo una superficie tridimensionale caratterizzata da un valore costante di energia, immersa nello spazio $\mathbb{R}^4$. Si tratta infatti di un sistema cosiddetto *conservativo* (discuteremo in dettaglio questo concetto nel capitolo sui sistemi meccanici), per il quale l'energia si scrive

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \omega_x^2 x^2) + \frac{1}{2}(\dot{y}^2 + \omega_y^2 y^2) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3.$$

Come superficie di sezione si utilizza il piano $x = 0$, e i punti di sezione vengono

rappresentati sul piano $y, \dot{y}$. Si tratta di fatto di una proiezione su quest'ultimo piano dei punti ove l'orbita, che giace sulla superficie dell'energia, interseca il piano di sezione $x = 0$. Conoscendo le coordinate $y, \dot{y}$ del punto di sezione si può determinare anche $\dot{x}$, a meno del segno, dal valore dell'energia.

La figura 1.4 rappresenta delle sezioni per il sistema (1.17), con $\omega_x = 1$, $\omega_y = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ed energia $E = 0.015$. La figura in alto a sinistra rappresenta tutta la regione interessante dello spazio delle fasi. Vi sono rappresentate diverse orbite.

(i) Il punto al centro rappresenta un'orbita periodica che interseca il piano sempre nello stesso punto.

(ii) Le curve che circondano il punto centrale sono formate in realtà dalle successioni di punti di intersezione generati da orbite distinte, che tendono a riempire densamente le curve. Si tratta di orbite che sembrano giacere su superficie regolari.

(iii) La curva di forma vagamente triangolare contiene in realtà due orbite: i tre vertici che sono un'orbita periodica che si richiude alla terza intersezione, e una seconda orbita che per un certo tempo percorre i tratti di curva che congiungono i punti periodici. A queste curve si dà il nome di *separatrici*, in quanto separano regioni caratterizzate da dinamiche di carattere diverso. Chiariremo meglio il significato di questo termine quando discuteremo gli equilibri instabili.

(iv) I tre gruppetti di curve staccati dalla parte centrale hanno al centro una seconda orbita periodica che si richiude dopo tre intersezioni. Attorno a quest'orbita si riproduce una struttura simile a quella che circonda l'orbita centrale.

(v) La zona pressoché vuota che separa il gruppo centrale di curve dai tre gruppetti staccati è una zona dominata da un comportamento caotico: le sezioni sono disposte in modo del tutto casuale, e l'orbita sfugge rapidamente all'infinito, in questo modello. In realtà, anche l'orbita che forma la separatrice subisce la stessa sorte, ossia sfugge all'infinito, dopo un po' di tempo.

Hénon ha descritto la struttura di queste orbite con termini molto efficaci parlando di *isole* di comportamento ordinato in un *mare* di orbite caotiche.

Di fatto, la struttura generata da orbite periodiche circondate da gruppi di curve chiuse regolari, a loro volta separati da zone di moto caotico che si creano intorno alle separatrici si ripete a scale sempre più piccole. Le tre figure, che sono degli ingrandimenti di zone della prima, danno un'idea della complessità della dinamica generata da un sistema di equazioni dall'aspetto apparentemente innocuo.