

# 8

## DINAMICA LAGRANGIANA: EQUILIBRI E MOVIMENTI

Questo capitolo è dedicato ad alcuni risultati classici di interesse generale e alla discussione di alcuni sistemi fisici particolarmente significativi.

Come risultati generali discutiamo anzitutto l'integrale di Jacobi, che nel caso di sistemi autonomi si riconduce all'energia, e costituisce un esempio notevole di integrale primo. Segue poi una discussione più generale sugli integrali primi, almeno nella forma in cui ciò è possibile nell'ambito del formalismo lagrangiano. In particolare, mettiamo in luce la relazione tra quantità conservate e proprietà di simmetria della Lagrangiana, che viene enunciata in modo molto elegante nel teorema di Noether. Diamo anche spazio alla discussione delle piccole oscillazioni intorno a un punto di equilibrio. Si tratta di un argomento di interesse fondamentale per la fisica, che si svolge trasportando in ambito lagrangiano il metodo di linearizzazione nell'intorno degli equilibri che abbiamo trattato nel paragrafo 3.1.

Come esempi significativi discutiamo anzitutto il problema del pendolo sferico, che costituisce un esempio interessante di sistema vincolato. Dedichiamo poi ampio spazio a due problemi classici, le cui radici si trovano già nel lavoro di Newton ma sono stati sviluppati in modo sostanzialmente completo da Lagrange. Il primo problema è il modello della catena lineare di particelle interagenti; il secondo è l'equazione lineare della corda vibrante, o delle onde, e in particolare il caso della corda con estremi fissi che ben descrive molti strumenti musicali e fornisce un supporto dinamico all'armonia musicale.

La catena lineare può ben vedersi, come del resto faceva Lagrange, come una discretizzazione del modello continuo della corda. Il problema, essendo lineare, può risolversi in modo completo, e conduce alla rappresentazione della dinamica mediante i cosiddetti *modi normali*. Non ci occuperemo invece dell'estensione al caso non lineare, che costituisce un problema estremamente complesso, tipicamente non integrabile a meno che il potenziale di interazione tra le particelle abbia una forma estremamente particolare. Il solo caso integrabile significativo è noto come *modello di Toda*. Per gli altri casi si ha un risultato molto particolare ma interessante dovuto a Lyapounov: il

suo teorema garantisce la possibilità di prolungare i modi normali lineari in soluzioni periodiche del problema non lineare. Sul comportamento generale delle soluzioni si può solo ricorrere ai metodi tipici della teoria delle perturbazioni sviluppati nel corso del secolo XIX, oppure ai metodi della Meccanica Statistica, o ancora all'indagine con metodi numerici. A questo proposito è d'obbligo citare la celeberrima memoria di Fermi–Pasta–Ulam<sup>[20]</sup>, che ha dato origine a una lunga serie di studi tuttora in corso.<sup>1</sup>

Per l'estensione al modello continuo seguiamo il procedimento di Lagrange, con un passaggio al limite di infinite particelle effettuato introducendo in modo consistente la densità e la tensione della corda. Discutiamo poi la soluzione di D'Alembert, che mette in particolare evidenza i fenomeni di propagazione di onde o segnali lungo la corda e permette di discutere in modo semplice ed elegante il fenomeno della riflessione. Per il caso di estremi fissi invece facciamo di nuovo ricorso al metodo di Lagrange, che conduce in modo diretto alla scrittura delle soluzioni sotto forma di serie di Fourier. Qui è opportuno notare che la nostra trattazione differisce da quella che si trova comunemente nei testi di Meccanica o di Fisica Matematica. Riteniamo però che il ricorso ai metodi di Lagrange presenti un certo interesse sia dal punto di vista storico, sia per la relativa semplicità.

## 8.1 Un esempio di sistema vincolato: il pendolo sferico

Come esempio di sistema vincolato studiamo il problema seguente: *Un punto  $P$  si muove senza attrito su una superficie sferica, soggetto all'azione della gravità. Si chiede di determinarne il movimento.* Si può pensare di realizzare un tal sistema sospendendo un peso mediante un'asticella perfettamente rigida la cui massa sia trascurabile rispetto a quella del corpo sospeso, oppure mediante un filo inestensibile ma considerando solo i movimenti in cui il filo resta teso, sicché il vincolo possa considerarsi come bilatero. Si approssima meglio, in tal modo, il movimento di un pendolo reale, quale quello utilizzato nell'esperienza di Foucault discussa nel paragrafo 5.4.8.

### 8.1.1 La Lagrangiana e le equazioni di moto

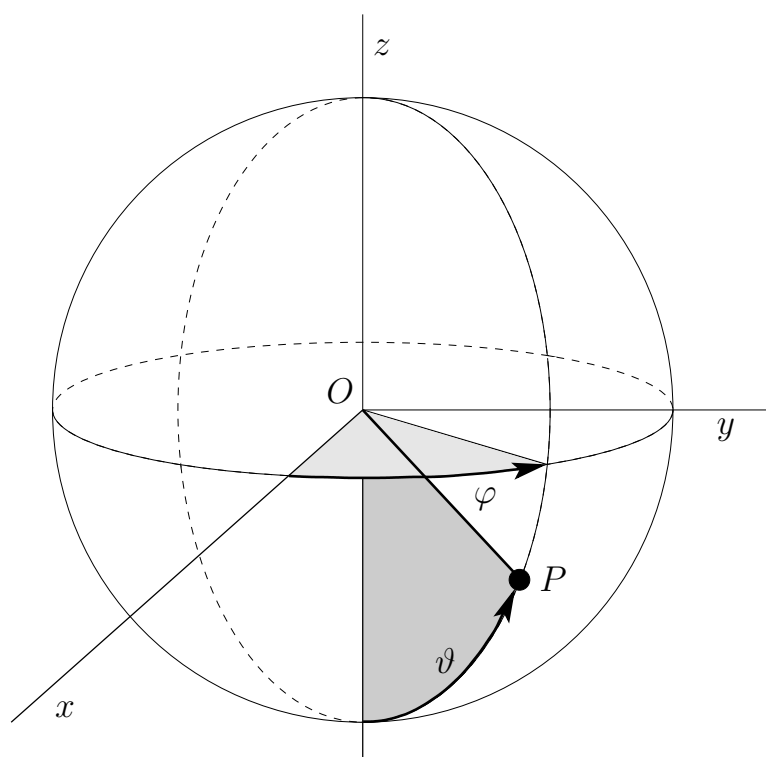
La simmetria stessa del sistema impone l'uso di coordinate sferiche, salvo misurare la latitudine partendo dal punto più basso come illustrato in figura 8.1, sicché determineremo le coordinate cartesiane del punto  $P$  sulla sfera di raggio  $\ell$  fissato mediante la trasformazione

$$x = \ell \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = \ell \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = -\ell \cos \vartheta.$$

In queste coordinate i punti  $\vartheta = 0, \pi$  sono singolari, ma ciò non crea difficoltà a patto che si considerino dati iniziali che non danno luogo a movimenti che passino per tali

---

<sup>1</sup> Si tratta del primo esempio di studio della dinamica di un sistema non lineare mediante integrazione numerica delle equazioni. Il lavoro fu iniziato nel 1952 nei laboratori di Los Alamos, poco dopo l'installazione di uno dei primi modelli di calcolatore elettronico. La memoria fu pubblicata nel 1955, poco dopo la morte di Fermi, sotto forma di rapporto interno dei laboratori.



**Figura 8.1.** Ad illustrazione della scelta delle coordinate libere per il pendolo sferico.

punti. Ciò esclude il solo caso del moto piano del pendolo, che ormai ben conosciamo.

L'energia cinetica si scrive

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) .$$

L'energia potenziale è dovuta alla sola forza peso, e si scrive (tenuto conto che l'asse  $z$  è orientato verso l'alto)

$$V = mgz = -mgl \cos \vartheta .$$

Pertanto la Lagrangiana del sistema risulta essere

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + mgl \cos \vartheta .$$

Grazie alla proposizione 6.13 possiamo poi dividere  $L$  per  $m\ell^2$ , sicché ci si riconduce a studiare la dinamica determinata dalla Lagrangiana

$$(8.1) \quad L = \frac{1}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{g}{\ell} \cos \vartheta .$$

Le equazioni di moto si scrivono

$$(8.2) \quad \begin{aligned} \ddot{\vartheta} - \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{\ell} \sin \vartheta &= 0 \\ \dot{p}_\varphi &= 0 , \quad p_\varphi = \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} . \end{aligned}$$

Si nota subito che la seconda equazione dice che  $p_\varphi$  è una costante del moto, e ciò è dovuto alla circostanza che la Lagrangiana non dipende dalla coordinata  $\varphi$ . Si dice che  $\varphi$  è una *coordinata ciclica*. Il sistema ammette anche una seconda costante del moto, e precisamente l'energia totale  $E = T + V$ .

Possiamo verificare che la costante del moto  $p_\varphi$  si riconduce alla componente verticale  $M_z$  del momento della quantità di moto,<sup>2</sup> essendo  $p_\varphi = \frac{M_z}{ml^2}$ . Per verificarlo conviene fare una breve digressione, e procedere al calcolo del momento angolare in coordinate sferiche: si tratta comunque di un calcolo utile in diverse circostanze. Osserviamo però subito che la conservazione della componente  $z$  del momento della quantità di moto segue immediatamente anche dalla seconda equazione cardinale. Infatti, essendo la forza peso diretta come l'asse  $z$  ne segue che il suo momento  $\mathbf{N}$  rispetto all'origine ha componente  $N_z$  nulla, e quindi l'equazione cardinale  $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{N}$  implica immediatamente  $M_z = N_z = 0$ .

### 8.1.2 Il momento angolare in coordinate sferiche

Consideriamo per un momento un punto che si muova liberamente nello spazio, e denotiamone con  $\mathbf{x}$  la posizione e con  $\mathbf{v}$  la velocità. Avendo introdotto le coordinate sferiche  $r, \vartheta, \varphi$  mediante la trasformazione

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta$$

possiamo calcolare facilmente le componenti della base coordinata in qualunque punto  $(r, \vartheta, \varphi)$  sulla base cartesiana  $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$ , e abbiamo (si veda l'esempio 6.10)

$$(8.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} &= \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{u}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{u}_y + \cos \vartheta \mathbf{u}_z, \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \vartheta} &= r \cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{u}_x + r \cos \vartheta \sin \varphi \mathbf{u}_y - r \sin \vartheta \mathbf{u}_z, \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} &= -r \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{u}_x + r \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{u}_y. \end{aligned}$$

Questi vettori sono mutuamente ortogonali, ma non ortonormali. È utile introdurre una base ortonormale  $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\vartheta, \mathbf{u}_\varphi$ , che può ottenersi semplicemente normalizzando i vettori della base già calcolata, e che scriviamo come

$$\mathbf{u}_r = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}, \quad \mathbf{u}_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \vartheta}, \quad \mathbf{u}_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}.$$

Per il calcolo del momento angolare ci servono anche le relazioni

$$(8.4) \quad \mathbf{u}_r \wedge \mathbf{u}_\vartheta = \mathbf{u}_\varphi, \quad \mathbf{u}_\vartheta \wedge \mathbf{u}_\varphi = \mathbf{u}_r, \quad \mathbf{u}_\varphi \wedge \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\vartheta.$$

La verifica algebrica di queste relazioni è un calcolo noioso ma facile, e lo omettiamo. Val la pena però di osservare che la base qui introdotta è ortonormale, e quindi le

---

<sup>2</sup> L'esistenza di questa costante del moto può ricondursi all'invarianza del sistema meccanico che stiamo considerando rispetto a rotazioni attorno all'asse  $z$ . Discuteremo questo punto in un contesto generale nel paragrafo 8.3.4, e in particolare nell'esempio 8.8.

relazioni scritte risultano evidenti dopo una breve riflessione, con un pizzico di immaginazione, per determinare correttamente i segni: il calcolo algebrico, oltre che noioso, è praticamente inutile.<sup>3</sup>

Possiamo ora procedere al calcolo del momento angolare, o momento della quantità di moto, rispetto all'origine, ricordandone anzitutto la definizione

$$\mathbf{M} = \mathbf{x} \wedge m\mathbf{v} .$$

Ricordando che la velocità sulla base coordinata (8.3) si scrive

$$\mathbf{v} = \dot{r} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} + \dot{\vartheta} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \vartheta} + \dot{\varphi} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}$$

abbiamo anche

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r\dot{\vartheta} \mathbf{u}_\vartheta + r \sin \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{u}_\varphi .$$

Sostituendo nell'espressione del momento angolare otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= r\mathbf{u}_r \wedge m(\dot{r} \mathbf{u}_r + r\dot{\vartheta} \mathbf{u}_\vartheta + r \sin \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{u}_\varphi) \\ &= -mr^2 \sin \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{u}_\vartheta + mr^2 \dot{\vartheta} \mathbf{u}_\varphi . \end{aligned}$$

In particolare la componente  $z$  del momento angolare è

$$M_z = \mathbf{M} \cdot \mathbf{u}_z = -mr^2 \sin \vartheta \dot{\varphi} (\mathbf{u}_\vartheta \cdot \mathbf{u}_z) ,$$

perché  $\mathbf{u}_\varphi$  non ha componente verticale, e ricorrendo alle (8.3) e (8.4) concludiamo

$$M_z = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} ,$$

da cui ricaviamo subito l'espressione di  $p_\varphi$  calcolata alla fine del paragrafo precedente.

Più in generale, data una qualunque direzione identificata da un versore  $\mathbf{n}$  la componente del momento angolare lungo  $\mathbf{n}$  sarà

$$M_{\mathbf{n}} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = -mr^2 \sin \vartheta \dot{\varphi} (\mathbf{u}_\vartheta \cdot \mathbf{n}) + mr^2 \dot{\vartheta} (\mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{n}) ,$$

ove occorre calcolare esplicitamente i prodotti scalari, facendo ancora ricorso alle (8.3) e (8.4).

---

<sup>3</sup> Nello spazio euclideo di dimensione 3 si può costruire una base scegliendo due vettori non paralleli e completandoli col loro prodotto vettoriale, che essendo ortogonale ai primi due è necessariamente indipendente da essi. Se poi i due vettori scelti inizialmente sono ortogonali e normalizzati, anche il terzo vettore risulta necessariamente normalizzato, e la base costruita risulta essere destrorsa. Ne segue necessariamente che il prodotto vettoriale tra due vettori qualsiasi della base dà il terzo, a meno del segno. Nel nostro caso si tratta solo di verificare che i segni sono scelti in modo che i vettori  $\mathbf{u}_r$ ,  $\mathbf{u}_\vartheta$ ,  $\mathbf{u}_\varphi$  (in quest'ordine) formano una base destrorsa.

### 8.1.3 Integrazione per quadrature

La presenza di due costanti del moto indipendenti consente di integrare il sistema (8.2), o, più precisamente, di ricondurlo alle quadrature. Il procedimento è simile a quello seguito per lo studio del moto centrale.

Teniamo conto anzitutto della conservazione della componente verticale del momento angolare ponendo  $p_\varphi = \gamma$ , costante da determinarsi mediante i dati iniziali, e riscriviamo la seconda delle (8.2) come

$$(8.5) \quad \dot{\varphi} = \frac{\gamma}{\sin^2 \vartheta} .$$

Da qui deduciamo subito che se  $\gamma \neq 0$  allora  $\dot{\varphi}$  ha segno costante, coincidente con il segno di  $\gamma$ . Se invece  $\gamma = 0$  allora è anche  $\dot{\varphi} = 0$ , e il moto avviene lungo un meridiano. In quest'ultimo caso l'orbita passa per il punto  $\vartheta = 0$  (e per condizioni iniziali a energia abbastanza elevata anche per il punto  $\vartheta = \pi$ ), e quindi si incappa nella singolarità del sistema di riferimento; diventa dunque indispensabile far ricorso a una carta diversa, o, meglio, ricondursi semplicemente al caso del pendolo che oscilla in un piano. Nel resto di questo paragrafo supporremo senz'altro  $\gamma \neq 0$ .

Consideriamo ora l'equazione dell'energia

$$E = \frac{1}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - \frac{g}{\ell} \cos \vartheta ,$$

e sostituiamo  $\dot{\varphi}$  ricavato dalla (8.5). Otteniamo

$$(8.6) \quad E = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 + V^*(\vartheta) , \quad V^*(\vartheta) = -\frac{g}{\ell} \cos \vartheta + \frac{\gamma^2}{2 \sin^2 \vartheta} .$$

dove  $V^*(\vartheta)$  è il *potenziale efficace*.

Per fissato  $\gamma \neq 0$  la (8.6) è equivalente un sistema conservativo fittizio a un grado di libertà descritto dalla coordinata  $\vartheta$  e soggetto a una forza con energia potenziale efficace  $V^*(\vartheta)$ . L'andamento qualitativo dell'energia potenziale come funzione di  $\vartheta$  è rappresentato in fig. 8.2. Le caratteristiche salienti sono i due asintoti verticali per  $\vartheta = 0, \pi$  e il punto di minimo in  $\bar{\vartheta}$ , soluzione dell'equazione

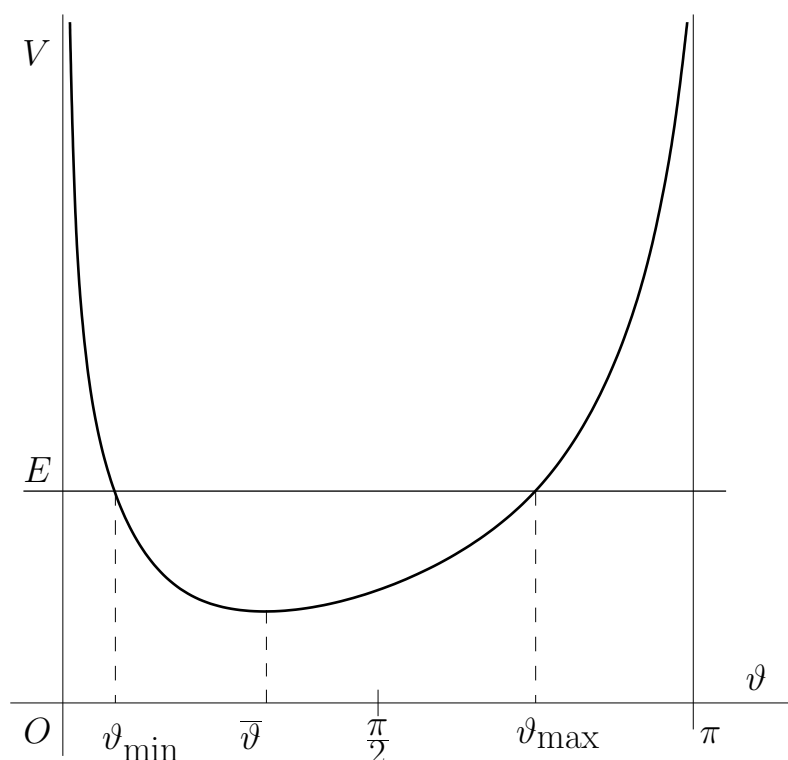
$$\frac{g}{\gamma^2 \ell} \sin^4 \vartheta - \cos \vartheta = 0 .$$

Veniamo alla descrizione della dinamica usando come parametro l'energia  $E$  o, meglio, assumendo assegnati inizialmente  $\vartheta, \varphi, \gamma, E$ .

- (i) Per  $E < V^*(\bar{\vartheta})$  non è possibile alcun movimento.
- (ii) Per  $E = V^*(\bar{\vartheta})$  si ha la soluzione di equilibrio  $\vartheta = \bar{\vartheta}$ . Per la (8.5) segue che anche  $\dot{\varphi}$  è costante, sicché il moto del punto  $P$  ha luogo lungo il parallelo  $\bar{\vartheta}$  con velocità uniforme. Si parla in questo caso di *moto conico*<sup>4</sup>.
- (iii) Per  $E > V^*(\bar{\vartheta})$  l'angolo  $\vartheta$  può oscillare tra due estremi  $\vartheta_{\min}, \vartheta_{\max}$ , soluzioni dell'equazione  $E - V^*(\vartheta) = 0$ .

---

<sup>4</sup> Il filo del pendolo descrive una superficie conica.



**Figura 8.2.** L'andamento qualitativo del potenziale efficace del pendolo sferico.

Discutiamo in dettaglio la soluzione in quest'ultimo caso. L'equazione per  $\vartheta$  si può ricondurre alle quadrature nel modo che ormai ben conosciamo, facendo ricorso all'equazione dell'energia risolta rispetto a  $\dot{\vartheta}$ , ossia

$$(8.7) \quad \dot{\vartheta} = \pm \sqrt{2(E - V^*(\vartheta))} .$$

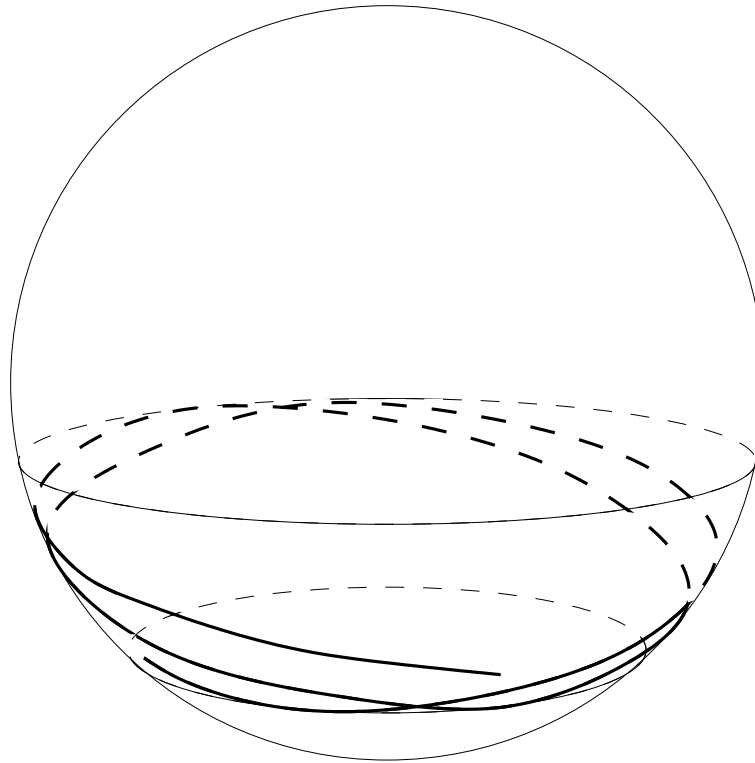
Si ottiene

$$t - t_0 = \pm \int_{\vartheta(0)}^{\vartheta(t)} \frac{du}{\sqrt{2(E - V^*(u))}} .$$

Da questa formula è possibile dedurre il periodo delle oscillazioni in  $\vartheta$ , integrando tra  $\vartheta_{\min}$  e  $\vartheta_{\max}$ , ossia

$$(8.8) \quad T_{\vartheta}(E, \gamma) = \sqrt{2} \int_{\vartheta_{\min}}^{\vartheta_{\max}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{E - V^*(\vartheta)}} .$$

Naturalmente il moto complessivo del pendolo non è necessariamente periodico: fin qui sappiamo solo che il punto  $P$  si muove in una striscia delimitata dai due paralleli  $\vartheta_{\min}$ ,  $\vartheta_{\max}$ , e che l'intervallo di tempo necessario per passare da  $\vartheta_{\min}$  a  $\vartheta_{\max}$  e tornare a  $\vartheta_{\min}$  è  $T_{\vartheta}(E, \gamma)$ , come calcolato dalla (8.8). Contemporaneamente l'azimuth  $\varphi$  si incrementa in modo monotono. La descrizione è simile a quella che abbiamo svolto per il moto centrale: il pendolo percorre un'orbita "a rosetta" del tipo rappresentato



**Figura 8.3.** Rappresentazione qualitativa di un'orbita possibile per il pendolo sferico.

in figura 7.5, che riportata sulla superficie della sfera apparirà qualitativamente come in figura 8.3.

Sul comportamento dell'angolo  $\varphi$  si possono avere informazioni più precise. Anzitutto, essendo nota in linea di principio la funzione  $\vartheta(t)$ , si può ricavare  $\varphi(t)$  col semplice calcolo di una primitiva dall'equazione

$$\dot{\varphi} = \frac{\gamma}{\sin^2 \vartheta(t)},$$

che altro non è che la (8.5) ove si pensi di sostituire a  $\vartheta$  la sua espressione in funzione del tempo. Se però il fine è calcolare la traiettoria del moto del punto  $P$  sulla superficie sferica si può agire in modo diverso, mimando il procedimento seguito per il moto in un campo di forze centrali. Eliminando il tempo dalle equazioni (8.7) per  $\dot{\vartheta}$  e (8.5) per  $\dot{\varphi}$  si ottiene l'equazione differenziale

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\vartheta}} = \pm \frac{\gamma}{\sin^2 \vartheta \sqrt{2(E - V^*(\vartheta))}}.$$

Integrando quest'ultima equazione a partire dal dato iniziale  $\vartheta_0$  abbiamo

$$\varphi(\vartheta) - \varphi(\vartheta_0) = \pm \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{du}{\sin^2 u \sqrt{E - V^*(u)}},$$



che è l'equazione dell'orbita, a meno di una quadratura. Se in particolare integriamo l'espressione precedente tra gli estremi  $\vartheta_0 = \vartheta_{\min}$ ,  $\vartheta = \vartheta_{\max}$  e la raddoppiamo otteniamo la variazione dell'azimuth  $\varphi$  durante un periodo  $T_\vartheta$ , ossia

$$(8.9) \quad \Delta\varphi(E, \gamma) = \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \int_{\vartheta_{\min}}^{\vartheta_{\max}} \frac{du}{\sin^2 u \sqrt{E - V^*(u)}} .$$

Perciò in un tempo  $T_\vartheta$  avremo, qualunque sia  $t$ ,

$$\varphi(t + T_\vartheta) = \varphi(t) + \Delta\varphi(E, \gamma) .$$

Se per valori fissati di  $E$ ,  $\gamma$  accade che  $\Delta\varphi(E, \gamma)$  è un multiplo razionale di  $2\pi$ , ossia

$$\frac{\Delta\varphi(E, \gamma)}{2\pi} = \frac{r}{s}$$

con  $r$ ,  $s$  interi non nulli e primi tra loro, allora vale anche

$$\varphi(t + sT_\vartheta) = \varphi(t) + s \Delta\varphi = \varphi(t) + 2\pi r \equiv \varphi(t) \pmod{2\pi} ,$$

e la traiettoria si chiude dopo  $s$  oscillazioni della coordinata  $\vartheta$ . Quindi il moto è periodico di periodo  $T \equiv sT_\vartheta$ .

Se, al contrario, il rapporto  $\frac{\Delta\varphi(E, \gamma)}{2\pi}$  è irrazionale, allora l'orbita non si chiude, e anzi si può mostrare che essa è densa nella regione della superficie sferica compresa tra  $\vartheta_{\min}$  e  $\vartheta_{\max}$ . In altre parole, l'orbita passa vicino quanto si vuole a ogni punto di quella regione.

#### 8.1.4 Una nota sul pendolo di Foucault

Possiamo ora riprendere la discussione sul pendolo di Foucault, riferendoci al calcolo della precessione del piano di oscillazione che abbiamo svolto nel paragrafo 5.4.8 e in particolare alla nota 43 di quel paragrafo. Il calcolo che abbiamo svolto mostra che la rotazione del piano del pendolo non è dovuta solo alla rotazione della Terra: si deve aggiungere l'angolo di precessione propria  $\Delta\varphi(E, \gamma)$  dato dalla (8.9).

Il lettore osserverà che se  $\gamma = 0$  allora risulta anche  $\dot{\varphi} = 0$ , sicché il moto del pendolo risulta essere piano e dunque l'angolo di precessione  $\Delta\varphi$  non è osservabile. Ma svolgendo il calcolo nell'approssimazione del moto piano, valida per piccoli angoli di oscillazione, come abbiamo fatto nel paragrafo 5.4.8 abbiamo visto che dare inizialmente al pendolo momento nullo è praticamente impossibile. In effetti, imponendo dati iniziali con velocità nulla nel riferimento terrestre non si ottiene  $\gamma = 0$ : il pendolo è fermo rispetto alla Terra, ma non rispetto alle stelle fisse. Ne risulta, come del resto abbiamo calcolato in quel paragrafo, che la traiettoria del pendolo ha una forma ellittica molto schiacciata, che è soggetta alla precessione  $\Delta\varphi$ .

Si vede dunque come il calcolo teorico del comportamento del pendolo di Foucault risulti alquanto complesso (pur trascurando gli attriti, comunque presenti). Sperimentalmente si può ridurre l'effetto della precessione propria mettendosi in condizioni tali che il pendolo compia oscillazioni piccole, e quindi avvicinandosi alla situazione

ideale del moto puramente armonico. La possibilità di controllare con un errore piccolo queste oscillazioni richiede un pendolo di lunghezza considerevole, che in effetti Foucault aveva ottenuto sfruttando l'altezza del Pantheon di Parigi.

Queste osservazioni sono discusse in dettaglio nella memoria di Hagen [31], e l'autore ne fa ampio uso per giustificare la sua scelta di costruire uno strumento, l'*isotomeografo*, appositamente studiato per verificare con tutta la precisione possibile la rotazione della Terra.

### 8.1.5 Calcolo delle reazioni vincolari

Mostriamo ora che grazie al formalismo lagrangiano siamo in grado anche di determinare le reazioni vincolari. Dalla teoria generale, in particolare dalla prima equazione cardinale, sappiamo che le reazioni vincolari sono date da

$$\Phi = m\mathbf{a} - \mathbf{F} .$$

Avendo risolto le equazioni di moto pure (ovvero senza reazioni vincolari), il secondo membro di questa equazione è da considerarsi noto. Per calcolare le componenti non nulle della reazione vincolare dobbiamo proiettare l'equazione precedente sul complemento ortogonale (detto anche *spazio normale*) in  $\mathbb{R}^3$  dello spazio tangente in ogni punto della sfera. Questo è generato dal solo vettore  $\mathbf{u}_r = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}$  (si veda la (8.3)).

Questo calcolo può eseguirsi con un procedimento generale, semplicemente considerando l'intero spazio  $\mathbb{R}^3$  e ignorando temporaneamente il vincolo che costringe il punto a restare sulla superficie sferica. Ricordiamo che in generale il calcolo delle componenti dell'accelerazione sulla base locale in  $\mathbb{R}^3$  si svolge grazie alla formula del binomio lagrangiano, e precisamente

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^3 g_{ij}(q) a_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) .$$

Per un punto in  $\mathbb{R}^3$  in coordinate sferiche abbiamo  $\mathbf{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2$  e  $g = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \vartheta)$ , e dunque

$$a_r = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_r = \ddot{r} - r \dot{\vartheta}^2 - r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 .$$

Tenendo conto che sulla superficie della sfera è  $r = R$ , costante, avremo allora

$$a_r = -R \dot{\vartheta}^2 - R \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 = -\frac{\mathbf{v}^2}{R} ,$$

che è la formula già nota per il moto circolare.

Ricordiamo anche che la forza attiva è la forza peso, ossia  $\mathbf{F} = -mg\mathbf{u}_z$ , e dunque  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_r = -mg \cos \vartheta$  (si usa l'espressione di  $\mathbf{u}_r$  data dalla (8.3)). Concludiamo che la reazione vincolare è data dalla formula

$$\Phi = [-(R \dot{\vartheta}^2 + R \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + mg \cos \vartheta] \mathbf{u}_r = \left( -m \frac{\mathbf{v}^2}{R} + mg \cos \vartheta \right) \mathbf{u}_r .$$

Nel secondo membro occorrerà sostituire le coordinate e le velocità in funzione del tempo, date dalle soluzioni ormai note.

**Esercizio 8.1:** Studiare il movimento di un punto materiale di massa  $m$  che si muove, sotto l'azione della forza peso e senza attrito,

- (a) sulla superficie di un cono;
- (b) sulla superficie di un toro;
- (c) sulla superficie di rivoluzione assegnata in coordinate cilindriche dalle formule  $x = r(z) \cos \vartheta$ ,  $y = r(z) \sin \vartheta$ ,  $z = z$  ottenuta facendo ruotare attorno all'asse  $z$  la curva di equazione  $r = r(z)$ .

## 8.2 Stabilità e piccole oscillazioni

Le equazioni di Lagrange, e in generale le equazioni che descrivono la dinamica di un sistema meccanico anche semplice, sono tipicamente non lineari. Questo rende spesso inaccessibile ed utopistico il tentativo di risolverle esattamente, e pone il problema del loro studio qualitativo o comunque dell'introduzione di opportune approssimazioni.

Come abbiamo visto nello studio generale delle equazioni differenziali il primo passo dello studio qualitativo è la ricerca di punti di equilibrio e l'individuazione delle loro caratteristiche di stabilità, o stabilità asintotica, &c. A tal fine è particolarmente utile il ricorso alla linearizzazione nell'intorno dell'equilibrio.

In questo paragrafo ci occupiamo di questo problema nel caso delle equazioni di Lagrange per sistemi lagrangiani naturali con vincoli olonomi, bilateri e perfetti, ma senza assumere che la forza ammetta energia potenziale. Considereremo invece il caso in cui la forza si possa decomporre in una componente puramente posizionale che sia conservativa, ed una componente che si annulli con la velocità. In termini più precisi assumeremo che la forza si possa scrivere come

$$(8.10) \quad Q_j(q, \dot{q}) = Q_j^{(c)}(q) + Q_j^{(g)}(q, \dot{q}), \quad \text{con} \quad Q_j^{(g)}(q, 0) = 0.$$

Riprendiamo la forma generale delle equazioni di Lagrange discussa nel paragrafo 6.6, tenendo presente che in virtù delle ipotesi sui vincoli stabilite sopra l'energia cinetica ha solo la parte quadratica e la metrica  $g_{jk}(q)$  non dipende esplicitamente dal tempo,  $T = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n g_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l$ . Possiamo allora riscrivere le equazioni nella forma generale

$$(8.11) \quad \sum_{k=1}^n g_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k,l=1}^n \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_l} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l = Q_j^{(c)}(q) + Q_j^{(g)}(q, \dot{q}), \quad j = 1, \dots, n.$$

### 8.2.1 Condizioni di equilibrio

Dimostriamo anzitutto il seguente

**Lemma 8.1:** Per un sistema meccanico con vincoli olonomi, fissi, bilateri e perfetti, soggetto a forze della forma (8.10) le posizioni di equilibrio devono soddisfare l'equazione  $Q_j^{(c)}(q) = 0$  per  $j = 1, \dots, n$ , e tutte le velocità generalizzate  $\dot{q}$  devono essere nulle.

**Dimostrazione.** È conveniente riscrivere le equazioni (8.11) come sistema del primo ordine, introducendo come di consueto le nuove variabili  $y = \dot{q}$ . Abbiamo così

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= y_j \\ \sum_{k=1}^n g_{jk} \dot{y}_k + \sum_{k,l=1}^n \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_l} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q_j} \right) y_k y_l &= Q_j^{(c)}(q) + Q_j^{(g)}(q, y) , \\ & j = 1, \dots, n . \end{aligned}$$

Annullando il secondo membro della prima equazione abbiamo  $y = 0$ , e la seconda equazione si riduce a

$$\sum_{k=1}^n g_{jk} \dot{y}_k = Q_j^{(c)}(q) + Q_j^{(g)}(q, 0) , \quad j = 1, \dots, n .$$

dove l'ultimo termine si annulla in virtù delle ipotesi sulla forza. Poiché la metrica  $g_{jk}(q)$  è non degenere, deve essere nullo il secondo membro, e quindi otteniamo il sistema di equazioni  $Q_j^{(c)}(q) = 0$ . *Q.E.D.*

### 8.2.2 Il teorema di Dirichlet–Lagrange

Esiste un notevole criterio sufficiente a garantire che l'equilibrio sia stabile. Occorre però assumere che la componente della forza generalizzata  $Q_j^{(c)}(q)$  indipendente dalla velocità ammetta energia potenziale. Si applica allora il seguente risultato classico detto *teorema di Lagrange–Dirichlet*.

**Proposizione 8.2:** *Sia dato un sistema meccanico olonomo a vincoli fissi, bilateri e perfetti, e sia  $(\bar{q}, 0)$  un punto di equilibrio per questo sistema. Supponiamo che le componenti delle forze generalizzate ammettano la decomposizione*

$$Q_j(q, \dot{q}) = Q_j^{(c)}(q) + Q_j^{(g)}(q, \dot{q}) ,$$

dove  $Q_j^{(c)}(q)$  è la parte conservativa,

$$Q_j^{(c)}(q) = -\frac{\partial V}{\partial q_j}(q) ,$$

e supponiamo che  $Q_j^{(g)}(q, \dot{q})$  soddisfi

$$Q_j^{(g)}(\bar{q}, 0) = 0 , \quad \sum_{j=1}^n Q_j^{(g)}(q, \dot{q}) \dot{q}_j \leq 0 .$$

Se  $\bar{q}$  è un punto di minimo stretto (locale) per  $V$  allora  $(\bar{q}, 0)$  è punto di equilibrio stabile per il sistema.

Ricordiamo qui che  $V(q)$  è l'energia potenziale della parte conservativa delle forze.

**Dimostrazione.** Si applica il teorema di Lyapounov sulla stabilità (si veda il paragrafo 3.4.3).<sup>5</sup> Occorre osservare che la funzione, che rappresenta di fatto l'energia totale,

$$W(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) + V(q) - V(\bar{q})$$

è una buona funzione di Lyapounov per il sistema. Infatti, per l'ipotesi che  $\bar{q}$  sia un minimo stretto locale di  $V$ , esiste un intorno di  $\bar{q}$  nel quale vale  $V(q) - V(\bar{q}) \geq 0$ , e in particolare si ha  $V(q) - V(\bar{q}) = 0$  se e solo se  $q - \bar{q} = 0$ . Inoltre per ogni  $q$  fissato l'energia cinetica  $T(q, \dot{q})$  è una forma definita positiva, ossia  $T(q, \dot{q}) > 0$  se  $\dot{q} \neq 0$ . Pertanto  $W(q, \dot{q})$ , come funzione sullo spazio degli stati, è definita positiva in un intorno dell'equilibrio  $(\bar{q}, 0)$ . Calcoliamo ora la derivata temporale della funzione  $W(q, \dot{q})$  lungo l'orbita del sistema. Cominciamo con l'osservare che vale

$$(8.12) \quad \frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^n Q_j^{(c)} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n Q_j^{(g)} \dot{q}_j .$$

Infatti abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \sum_{l=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_l} \dot{q}_l \\ &= \sum_{j,k=1}^n g_{jk}(q) \dot{q}_j \ddot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_l} \dot{q}_j \dot{q}_k \dot{q}_l \\ &= \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{k=1}^n g_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k,l=1}^n \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_l} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l \right] \dot{q}_j \\ &= \sum_{j=1}^n (Q_j^{(c)}(q) + Q_j^{(g)}(q, \dot{q})) \dot{q}_j , \end{aligned}$$

dove nell'ultima eguaglianza abbiamo tenuto conto della (8.11).<sup>6</sup> Abbiamo quindi mostrato che vale la (8.12), che del resto altro non è che il teorema dell'energia cinetica.

<sup>5</sup> In effetti, la formulazione di questo teorema precede storicamente il secondo teorema di Lyapounov, ma di quest'ultimo costituisce il modello e la motivazione naturale.

<sup>6</sup> La penultima uguaglianza nel calcolo precedente può risultare un po' misteriosa, ma basta osservare che vale

$$\sum_{j,k,l=1}^n \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_l} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \dot{q}_l = \frac{1}{2} \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_l} \dot{q}_j \dot{q}_k \dot{q}_l .$$

Infatti, nel secondo termine tra parentesi è lecito permutare ciclicamente gli indici  $k, l, j$  in  $j, k, l$ , perché dovendosi comunque moltiplicare per  $\dot{q}_j \dot{q}_k \dot{q}_l$  e sommare su tutti gli indici il risultato finale non cambia. Così facendo i due termini tra parentesi risultano essere uguali, e si compensano parzialmente.

Resta ora da calcolare

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_j} \dot{q}_j = - \sum_{j=1}^n Q_j^{(c)}(q) \dot{q}_j .$$

Lungo l'orbita del sistema abbiamo dunque

$$\frac{dW}{dt}(q, \dot{q}) = \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^n Q_j^{(g)} \dot{q}_j \leq 0 ,$$

dove la diseuguaglianza vale per l'ipotesi che abbiamo posto. Poiché la derivata lungo l'orbita della funzione definita positiva  $W$  è non positiva, il teorema di Lyapounov assicura che  $(\bar{q}, 0)$  è punto di equilibrio stabile. Q.E.D.

**Esempio 8.1:** *Il caso conservativo.* Nel caso di forze conservative, dipendenti dalla sola posizione, basta dimostrare che il punto di equilibrio è un punto di minimo per l'energia potenziale. Infatti si ha  $Q_j^{(g)} = 0$ .

**Esempio 8.2:** *Il caso giroscopico.* Nel caso giroscopico il termine  $Q_j^{(g)}(q, \dot{q})$  dipende linearmente dalla velocità, come abbiamo visto nella proposizione 6.9, e inoltre ha potenza nulla, come abbiamo mostrato nel corollario 6.10. Sono dunque soddisfatte le condizioni su  $Q_j^{(g)}(q, \dot{q})$ , e l'applicazione del teorema richiede solo che l'energia potenziale della parte conservativa delle forze abbia un minimo stretto nell'equilibrio. In questi casi rientrano la forza di Coriolis per il moto relativo, ossia la forza apparente che si manifesta in un sistema di riferimento rotante e che è data da  $-m\mathbf{a}^c = -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}$ , e la forza agente su una carica elettrica in moto in un campo magnetico esterno, discussa nell'esempio 6.21.

Il teorema di Dirichlet–Lagrange che abbiamo appena dimostrato è condizione sufficiente per l'equilibrio. È interessante quindi indagare se sia anche condizione necessaria, ossia se la violazione delle condizioni del teorema conduca alla conclusione che il sistema non è stabile. Ciò risulta falso. In effetti Painlevé e Wintner hanno costruito un controesempio: il sistema conservativo ad un grado di libertà con energia potenziale

$$V(q) = \begin{cases} e^{-1/q^2} \cos \frac{1}{q} & \text{per } q \neq 0 \\ 0 & \text{per } q = 0 \end{cases}$$

non ha un minimo in  $q = 0$ , ma ciononostante l'equilibrio  $(0, 0)$  è stabile. Questo perché la funzione  $V(q)$  ha infiniti punti di minimo che si accumulano nell'origine. Perciò un punto che si trovi inizialmente vicino all'origine con velocità sufficientemente piccola non può allontanarsene.

### 8.2.3 Linearizzazione nell'intorno di un equilibrio

Veniamo ora al procedimento di *linearizzazione nell'intorno di un equilibrio*. Si tratta di un metodo che abbiamo già discusso, nei suoi aspetti generali, nel paragrafo 3.1. Nel caso lagrangiano e conservativo si dà un teorema di carattere generale e molto

preciso riguardo al carattere degli autovalori associati a una configurazione di equilibrio. Inoltre, è un caso speciale e significativo nel quale la stabilità lineare comporta quella non lineare.

Consideriamo ancora il caso di sistemi a vincoli fissi, olonomi, bilateri e perfetti, e facciamo l'ulteriore ipotesi che le forze ammettano energia potenziale, sicché la Lagrangiana si scrive  $L = T - V$ , e non dipende esplicitamente dal tempo.

Vi sono due modi di procedere: il primo consiste nell'agire sulle equazioni di Lagrange scritte nella forma (8.11); il secondo metodo consiste nell'agire direttamente sulla Lagrangiana.

Cominciamo, per comodità, col riscrivere le equazioni (8.11) tenendo conto che le forze ammettono energia potenziale:

$$\sum_{k=1}^n g_{jk}(q)\ddot{q}_k + \sum_{k,l=1}^n \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_l} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l = \frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Procediamo poi alla linearizzazione nell'intorno di un punto di equilibrio  $(\bar{q}, 0)$ , che supponiamo esistere. Il sistema lineare non potrà contenere il termine quadratico nelle velocità. Inoltre la metrica che compare a primo membro, essendo coefficiente di un termine che è già lineare nell'accelerazione, dovrà essere approssimata col suo valore nel punto di equilibrio. Infine occorrerà sviluppare in serie di Taylor il termine contenente la derivata dell'energia potenziale, arrestando lo sviluppo al primo ordine. Per far questo occorrerà calcolare la matrice Hessiana dell'energia potenziale e valutarla nel punto di equilibrio. Otteniamo dunque le equazioni

$$\sum_{k=1}^n g_{jk}(\bar{q})\ddot{q}_k + \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_l} \Big|_{q=\bar{q}} (q_l - \bar{q}_l) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Introduciamo ora come variabile lo *scostamento dall'equilibrio*  $\eta_l = q_l - \bar{q}_l$ . Inoltre denotiamo la metrica e la matrice Hessiana dell'energia potenziale valutate nel punto di equilibrio con

$$(8.13) \quad \mathbf{G} = \{g_{jk}(\bar{q})\}_{j,k=1}^n, \quad \mathbf{H} = \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}(\bar{q}) \right\}_{j,k=1}^n.$$

Con queste notazioni il sistema si scrive, in forma vettoriale,

$$(8.14) \quad \mathbf{G}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{H}\boldsymbol{\eta} = 0,$$

Questa è l'equazione lineare che dobbiamo discutere.

Un modo equivalente per dedurre la medesima equazione consiste nel partire dalla Lagrangiana, che scriviamo esplicitando la forma dell'energia cinetica

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n g_{jk}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k - V(q),$$

e sviluppare in serie di Taylor intorno al punto  $(\bar{q}, 0)$  fino a comprendere tutti i termini di secondo grado in  $q - \bar{q}$  e  $\dot{q}$ , e omettendo il termine  $V(\bar{q})$  che, essendo costante, non

ha alcun effetto sulle equazioni di moto. Otteniamo

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \left( g_{jk}(\bar{q}) \dot{q}_j \dot{q}_k - \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} (q_j - \bar{q}_j)(q_k - \bar{q}_k) \right) .$$

Introducendo ancora gli scostamenti dall'equilibrio  $\boldsymbol{\eta}$  e le matrici definite nella (8.13) otteniamo la Lagrangiana linearizzata<sup>7</sup>

$$(8.15) \quad L = \frac{1}{2} \mathbf{G} \dot{\boldsymbol{\eta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \mathbf{H} \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta} .$$

Le equazioni di Lagrange corrispondenti sono ancora le (8.14).

Veniamo dunque alla discussione dell'equazione (8.14) e della Lagrangiana corrispondente (8.15). La Lagrangiana è caratterizzata da due forme bilineari  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$ , una delle quali, la metrica  $\mathbf{G}$ , è definita positiva, e pertanto definisce un prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$ . Riscriviamo ora il sistema (8.14), ponendolo in forma normale, come

$$(8.16) \quad \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\eta} = 0 .$$

Procedendo in analogia a quanto fatto per le equazioni lineari del primo ordine, osserviamo che sarebbe molto comodo poter dare al sistema la forma  $\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \Lambda \boldsymbol{\xi} = 0$ , con  $\Lambda$  matrice diagonale. In tal caso infatti le equazioni per le coordinate  $\xi_j$  si disaccoppiano. Ci domandiamo dunque se esista una trasformazione lineare che ponga il sistema in questa forma. In altre parole, ci domandiamo se l'operatore  $\mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}$  che compare nell'equazione (8.16) sia diagonalizzabile.

Lo strumento teorico che ci serve qui è il *teorema spettrale reale*, che enunciamo: *Dato un operatore lineare  $\mathbf{A}$  simmetrico in uno spazio vettoriale reale dotato di prodotto interno, esiste una base ortonormale rispetto alla quale l'operatore  $\mathbf{A}$  è rappresentato da una matrice diagonale.* Nel nostro caso lo spazio delle configurazioni del problema linearizzato è lo spazio vettoriale reale delle  $n$ -uple di numeri reali  $\mathbb{R}^n$  e il problema si riconduce a controllare se l'operatore  $\mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}$  sia simmetrico rispetto a qualche prodotto interno in tale spazio.<sup>8</sup> Ciò non è vero se si considera il prodotto scalare euclideo,<sup>9</sup> ma dobbiamo ricordare che abbiamo a disposizione una metrica in qualche senso più naturale, dataci dalla forma bilineare  $\mathbf{G}$ , ossia la metrica dell'energia cinetica. In effetti, si verifica facilmente che l'operatore  $\mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}$  è *simmetrico rispetto al prodotto interno definito dalla metrica dell'energia cinetica*,  $\mathbf{G}$ . Infatti, ricordando che il prodotto interno dato dalla metrica  $\mathbf{G}$  è definito come  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{G} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{G} \mathbf{w}$ ,

<sup>7</sup> Qui abbiamo usato la notazione del prodotto scalare euclideo. Usando le notazioni di trasposizione di vettori e matrici comuni in geometria potremmo anche pensare  $\boldsymbol{\eta}$  come vettore colonna, e scrivere la Lagrangiana nella forma  $L = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^\top \mathbf{G} \dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{H} \boldsymbol{\eta}$ .

<sup>8</sup> Ricordiamo che un operatore  $\mathbf{A}$  è simmetrico rispetto al prodotto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  se vale  $\langle \mathbf{A} \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \mathbf{w} \rangle$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ .

<sup>9</sup> Le matrici  $\mathbf{G}^{-1}$  e  $\mathbf{H}$  sono ambedue simmetriche, ma non è detto che lo sia il loro prodotto. Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sono due matrici simmetriche il loro prodotto  $\mathbf{AB}$  è simmetrico se e solo se le matrici commutano, ossia se  $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = 0$ .



dove il punto denota il consueto prodotto scalare euclideo, abbiamo

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v} \cdot \mathbf{G} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{H} \mathbf{w} .$$

D'altra parte con un calcolo analogo abbiamo

$$\langle \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{G} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{H} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} ,$$

e quest'ultima espressione coincide con  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{H} \mathbf{w}$  in virtù della simmetria di  $\mathbf{H}$ . Applicando il teorema spettrale concludiamo che è vera la seguente

**Proposizione 8.3:** *Per il sistema di equazioni lineari (8.16) esiste una trasformazione lineare invertibile  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{U} \boldsymbol{\xi}$  tale che*

$$(8.17) \quad \mathbf{U}^{-1} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{U} = \Lambda$$

è una matrice diagonale. Sotto tale trasformazione il sistema assume la forma

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \Lambda \boldsymbol{\xi} = 0 .$$

Detti rispettivamente  $n_+$ ,  $n_0$ ,  $n_-$  il numero di autovalori positivi, nulli e negativi di  $\Lambda$  il sistema si separa nel prodotto di  $n_+$  oscillatori armonici,  $n_0$  punti liberi e  $n_-$  repulsori armonici.

Il procedimento per il calcolo della matrice  $\Lambda$  e della matrice diagonalizzante  $\mathbf{U}$  è quello già discusso nel paragrafo 3.2, con qualche adattamento dovuto alla scelta del prodotto interno. Occorre risolvere il problema agli autovalori  $\mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$ . La simmetria dell'operatore  $\mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}$  garantisce l'esistenza di  $n$  autovalori reali  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  e di altrettanti autovettori  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ . I vettori così determinati sono certamente ortogonali, e moltiplicandoli per un opportuno fattore di normalizzazione potranno sempre scegliersi ortonormali rispetto al prodotto interno  $\mathbf{G}$ . Varrà dunque  $\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k \rangle = \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{G} \mathbf{u}_k = \delta_{jk}$ , ovvero, in termini di matrici,  $\mathbf{U}^\top \mathbf{G} \mathbf{U} = \mathbf{I}$ , dove  $\mathbf{I}$  è la matrice identità,  $\mathbf{I} = \text{diag}(1, \dots, 1)$ . La matrice  $\mathbf{U}$  si costruisce incolonnando gli autovettori  $\mathbf{u}_j$ . Precisamente, pensando agli  $\mathbf{u}_j$  come a vettori colonna, si scrive  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$ . L'inversione dell'operatore  $\mathbf{U}$  richiesta dalla (8.17) può ricondursi a un prodotto tra matrici, che è più semplice. In effetti, riscrivendo l'equazione agli autovalori come  $\mathbf{H} \mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{G} \mathbf{u}_j$ , e moltiplicando scalarmente ambo i membri per  $\mathbf{u}_k$  si calcola

$$\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{H} \mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{G} \mathbf{u}_j = \lambda_j \delta_{kj} ,$$

ovvero  $\mathbf{U}^\top \mathbf{H} \mathbf{U} = \Lambda$ . Essendo poi  $\mathbf{U}^\top = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{G}^{-1}$  (perché  $\mathbf{U}^\top \mathbf{G} \mathbf{U} = \mathbf{I}$ ) è anche  $\mathbf{U}^{-1} (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}) \mathbf{U} = \Lambda$ , cioè  $\mathbf{U}$  rende la matrice  $\mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}$  simile alla matrice diagonale  $\Lambda$ , come asserito.

Gli autovettori  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  vengono detti *modi normali*, e gli autovalori risultano essere i quadrati delle *frequenze normali* del sistema linearizzato. Analogamente, le nuove coordinate  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\eta}$  prendono il nome di *coordinate normali*.

Nei testi classici il problema di ridurre il sistema di equazioni lineari a una forma semplice viene affrontato in modo formalmente diverso da quello qui seguito, ma nella sostanza a esso equivalente. Per esporlo facciamo riferimento non tanto all'equazione lineare (8.16), quanto alla Lagrangiana quadratica (8.15), e osserviamo che essa è

somma di due forme bilineari, e precisamente l'energia cinetica, che è definita positiva, e l'energia potenziale che è simmetrica, ma non necessariamente di segno definito.<sup>10</sup> Il problema che si pone è quello della *diagonalizzazione contemporanea di due forme quadratiche*.

**Proposizione 8.4:** *Siano date le due forme bilineari  $G$  e  $H$ , di cui una almeno, diciamo  $G$ , sia definita positiva. Allora esiste una trasformazione lineare invertibile  $U$  che trasforma  $G$  nell'identità e  $H$  in forma diagonale, ossia*

$$U^T G U = I, \quad U^T H U = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Notiamo che non essendo il prodotto interno quello euclideo standard di  $\mathbb{R}^n$  la trasposta di  $U$  non coincide con la sua inversa. Se però si confrontano le eguaglianze  $U^{-1}G^{-1}HU = \Lambda$  e  $U^T H U = \Lambda$  si conclude che vale  $U^{-1}G^{-1} = U^T$ , ovvero  $U^{-1} = U^T G$ , come del resto abbiamo già visto.

Veniamo al calcolo esplicito delle soluzioni. Concretamente si procede come segue. L'equazione agli autovalori per  $G^{-1}H$  si scrive  $\det(G^{-1}H - \lambda I) = 0$ , o, equivalentemente

$$(8.18) \quad \det(H - \lambda G) = 0,$$

grazie all'invertibilità di  $G$  e al teorema di Binet.<sup>11</sup> Le soluzioni di quest'ultima equazione vengono dette talvolta *autovalori di  $H$  rispetto a  $G$* , e la (8.18) viene detta *equazione generalizzata agli autovalori*. Poiché l'Hessiano  $H$  non è necessariamente definito in segno, in generale potremo avere autovalori  $\lambda_j$  positivi, nulli o negativi. Ricordiamo che nei tre casi le soluzioni per le coordinate  $\xi_j$  corrispondenti avranno la forma seguente:

(i) per  $\lambda_j > 0$ , posto  $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$ , avremo

$$\xi_j(t) = \xi_j(0) \cos \omega_j t + \frac{\dot{\xi}_j(0)}{\omega_j} \sin \omega_j t,$$

ovvero il caso dell'oscillatore armonico;

(ii) per  $\lambda_j = 0$  avremo

$$\xi_j(t) = \xi_j(0) + \dot{\xi}_j(0)t,$$

ovvero il caso del punto libero;

<sup>10</sup> Da un punto di vista geometrico risulta del tutto naturale che l'oggetto da prendere in considerazione sia  $G^{-1}H$  e non  $H$  stesso, in quanto  $G^{-1}H$  è un operatore, mentre  $H$  è una forma bilineare. Ciò risulta del tutto evidente nel contesto del calcolo tensoriale, che viene affrontato nei corsi specialistici di geometria: una forma bilineare in uno spazio a prodotto interno ha un operatore lineare corrispondente costruito in modo naturale moltiplicando a sinistra per l'inverso della metrica, e questo operatore è quello che viene diagonalizzato. Nel linguaggio del calcolo tensoriale si dice che "si abbassa un indice".

<sup>11</sup> Il teorema di Binet afferma che il determinante del prodotto di due matrici è il prodotto dei determinanti. In formula, denotando con  $A, B$  le matrici, vale  $\det(AB) = \det A \det B$ .

(iii) per  $\lambda_j < 0$ , posto  $\omega_j = \sqrt{-\lambda_j}$ , avremo

$$\xi_j(t) = \xi_j(0) \operatorname{Ch} \omega_j t + \frac{\dot{\xi}_j(0)}{\omega_j} \operatorname{Sh} \omega_j t ,$$

ovvero il caso del repulsore armonico.

Le considerazioni qui svolte mostrano che il sistema si decompone in generale nel prodotto di sottosistemi che rappresentano oscillatori armonici, punti liberi e repulsori armonici, come affermato nella proposizione 8.3.

Accenniamo brevemente al problema della stabilità. Se consideriamo il sistema lineare, va da sé che se vi è anche un solo autovalore non positivo il sistema lineare è stabile. Se invece consideriamo il caso non lineare possiamo distinguere tre casi:

- (i) se anche uno solo degli autovalori  $\lambda_j$  è negativo, allora il sistema è instabile;
- (ii) se non vi sono autovalori negativi, ma vi è anche un solo autovalore  $\lambda_j$  nullo allora non si possono trarre conclusioni sulla stabilità del sistema, e occorre studiare in maggior dettaglio il contributo della parte non lineare;
- (iii) se tutti gli autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sono positivi allora il sistema non lineare è stabile.

Il caso (iii) è proprio quello in cui le ipotesi che abbiamo fatto inizialmente sul sistema ci permettono di stabilire un risultato di stabilità semplice e notevole.<sup>12</sup>

Consideriamo ora in maggior dettaglio il caso stabile, ossia quello in cui si hanno tutti autovalori positivi. Osserviamo che questo equivale ad avere la matrice Hessiana dell'energia potenziale positiva definita nel punto di equilibrio considerato, che pertanto risulta essere un minimo locale stretto. Dunque, in virtù del teorema di Lagrange–Dirichlet, la stabilità lineare in questo caso comporta la stabilità anche per il sistema non lineare.

Restringiamoci a quest'ultimo caso, che è il più interessante dal punto di vista delle applicazioni. Il moto di scostamento dall'equilibrio si descrive come combinazione di moti armonici semplici, e può scriversi in forma vettoriale come

$$(8.19) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\eta}(t) &= \mathbf{U} \boldsymbol{\xi}(t) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k \left( \xi_k(0) \cos \omega_k t + \frac{\dot{\xi}_k(0)}{\omega_k} \sin \omega_k t \right) . \end{aligned}$$

In questa espressione occorre inserire i dati iniziali  $\xi_k(0)$ ,  $\dot{\xi}_k(0)$  da calcolarsi in termini dei dati iniziali noti, ossia quelli delle coordinate di scostamento  $\boldsymbol{\eta}$ . Applicando l'inversa della trasformazione  $\mathbf{U}$  si ha

$$\boldsymbol{\xi}(0) = \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\eta}(0) , \quad \dot{\boldsymbol{\xi}}(0) = \mathbf{U}^{-1} \dot{\boldsymbol{\eta}}(0) .$$

---

<sup>12</sup> Può essere il caso di sottolineare che questo risultato molto forte di stabilità vale nel caso lagrangiano e conservativo. In generale un sistema non lineare la cui rappresentazione lineare sia un sistema di oscillatori armonici è stabile linearmente, ma ciò non comporta la stabilità del sistema non lineare. Un esempio classico è quello dei punti di equilibrio lagrangiani del problema dei tre corpi ristretto, che abbiamo discusso nel paragrafo 7.3

Il calcolo dell'inversa della matrice  $\mathbf{U}$  si rivela spesso disagiata, ed è utile trovare un metodo più efficace. A tal fine notiamo che dall'espressione esplicita della soluzione (8.19) abbiamo

$$\boldsymbol{\eta}(0) = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k \xi_k(0) , \quad \dot{\boldsymbol{\eta}}(0) = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k \dot{\xi}_k(0) .$$

Calcoliamone ora il prodotto interno (quello indotto dalla metrica naturale) con un vettore generico  $\mathbf{u}_j$  della base normale, ed otteniamo

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\eta}(0), \mathbf{u}_j \rangle &= \sum_{k=1}^n \xi_k(0) \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_j \rangle = \sum_{k=1}^n \xi_k(0) \delta_{kj} = \xi_j(0) , \\ \langle \dot{\boldsymbol{\eta}}(0), \mathbf{u}_j \rangle &= \sum_{k=1}^n \dot{\xi}_k(0) \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_j \rangle = \sum_{k=1}^n \dot{\xi}_k(0) \delta_{kj} = \dot{\xi}_j(0) , \end{aligned}$$

grazie al fatto che i vettori  $\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_j$  sono ortonormali. Possiamo dunque scrivere la soluzione esplicita del problema come

$$(8.20) \quad \boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{k=1}^n \left( \langle \boldsymbol{\eta}(0), \mathbf{u}_k \rangle \cos \omega_k t + \frac{\langle \dot{\boldsymbol{\eta}}(0), \mathbf{u}_k \rangle}{\omega_k} \sin \omega_k t \right) .$$

Questa soluzione fornisce il flusso dell'equazione linearizzata.

Quanto abbiamo detto resta vero nei limiti di validità dell'approssimazione lineare. Lo studio del sistema non lineare è problema alquanto complesso, e sotto molti aspetti ancora aperto. In effetti il comportamento di un sistema non lineare nell'intorno di un equilibrio, fatta esclusione per il solo caso di un grado di libertà, è in generale alquanto complicato. Abbiamo visto un esempio di dimensione 2 nel paragrafo 1.3.3.

#### 8.2.4 Le piccole oscillazioni del pendolo doppio

Riprendiamo il modello del pendolo doppio, e riscriviamo la Lagrangiana che abbiamo ricavato nell'esempio 6.18:

$$\begin{aligned} L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \cos(\vartheta - \varphi) \\ + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \vartheta + m_2 g l_2 \cos \varphi . \end{aligned}$$

I punti di equilibrio si ottengono azzerando le derivate dell'energia potenziale. Il calcolo, elementare, conferma l'intuizione che essi debbano essere i quattro punti  $(0, 0)$ ,  $(0, \pi)$ ,  $(\pi, 0)$  e  $(\pi, \pi)$ . La matrice Hessiana del potenziale è

$$\mathbf{H}(\vartheta_1, \vartheta_2) = \begin{pmatrix} m_1 l_1 g \cos \vartheta_1 + m_2 l_1 g \cos \vartheta_2 & 0 \\ 0 & m_2 l_2 g \cos \vartheta_2 \end{pmatrix} .$$

Calcolata nei punti di equilibrio la matrice risulta positiva definita in  $(0, 0)$ , che è un minimo locale per l'energia potenziale, negativa definita in  $(\pi, \pi)$ , che è un massimo locale, e indefinita ma priva di autovalori nulli nei punti  $(0, \pi)$  e  $(\pi, 0)$ . Concludiamo dunque che l'unico equilibrio stabile è  $(0, 0)$ . Procediamo dunque al calcolo delle piccole

oscillazioni, supponendo per semplicità che le masse e le lunghezze dei pendoli siano eguali, ossia ponendo  $l_1 = l_2 = l$  e  $m_1 = m_2 = m$ . La matrice Hessiana in  $(0, 0)$  diventa

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix}.$$

L'approssimazione quadratica dell'energia cinetica nel punto  $(0, 0)$  è

$$T = ml^2\dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}_2^2 + ml^2\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2,$$

e dunque la matrice metrica associata è

$$\mathbf{G} = ml^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si noti che la metrica non è diagonale.

L'equazione generalizzata agli autovalori si scrive  $(\mathbf{H} - \lambda\mathbf{G})\mathbf{u} = 0$ , e gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione

$$\det(\mathbf{H} - \lambda\mathbf{G}) = 0$$

che si ricavano facilmente:

$$\lambda_{\pm} = (2 \pm \sqrt{2})\frac{g}{l} \equiv \omega_{\pm}^2.$$

Gli autovettori corrispondenti sono  $\mathbf{u} = (u_1^{\pm}, u_2^{\pm})$  con  $u_2^{\pm} = \pm\sqrt{2}u_1^{\pm}$ . Ponendo  $u_1^{\pm} = 1$  otteniamo i due autovettori

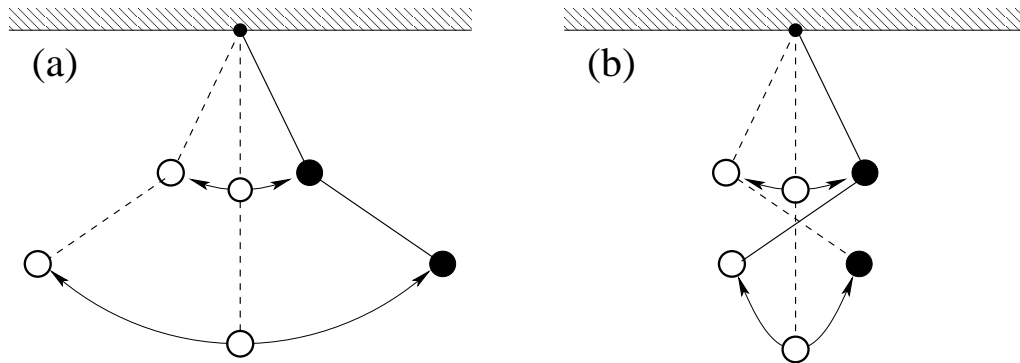
$$\mathbf{u}^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^- = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La teoria generale ci assicura che questi due autovettori sono ortogonali rispetto alla metrica  $\mathbf{G}$ , ma non necessariamente ortonormali. È conveniente procedere alla ortonormalizzazione dividendo i vettori per la loro norma calcolata secondo la metrica  $\mathbf{G}$ , ossia dividendo per  $\sqrt{\langle \mathbf{u}^{\pm}, \mathbf{u}^{\pm} \rangle} = \sqrt{\mathbf{u}^{\pm} \cdot \mathbf{G}\mathbf{u}^{\pm}}$ . Abbiamo così gli autovettori normalizzati

$$\mathbf{u}^+ = \frac{1}{\sqrt{m^2l^2(4 - 2\sqrt{2})}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^- = \frac{1}{\sqrt{m^2l^2(4 + 2\sqrt{2})}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Siamo ora in grado di scrivere la soluzione del problema linearizzato, ricorrendo alla (8.20):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\vartheta}(t) = & \mathbf{u}^+ \left( \langle \mathbf{u}^+, \boldsymbol{\vartheta}(0) \rangle \cos \omega_+ t + \langle \mathbf{u}^+, \dot{\boldsymbol{\vartheta}}(0) \rangle \frac{\cos \omega_+ t}{\omega_+} \right) + \\ & \mathbf{u}^- \left( \langle \mathbf{u}^-, \boldsymbol{\vartheta}(0) \rangle \cos \omega_- t + \langle \mathbf{u}^-, \dot{\boldsymbol{\vartheta}}(0) \rangle \frac{\cos \omega_- t}{\omega_-} \right). \end{aligned}$$



**Figura 8.4.** I modi normali del pendolo doppio nell'approssimazione delle piccole oscillazioni. Nel caso (a) i due pendoli oscillano in concordanza di fase, nel caso (b) in opposizione di fase.

Veniamo ora alla discussione del movimento nell'approssimazione lineare. Se le condizioni iniziali  $\boldsymbol{\vartheta}(0)$ ,  $\dot{\boldsymbol{\vartheta}}(0)$  sono tali da selezionare un solo modo normale, ad esempio se  $\langle \mathbf{u}^+, \boldsymbol{\vartheta}(0) \rangle = \langle \mathbf{u}^-, \dot{\boldsymbol{\vartheta}}(0) \rangle = 0$ , allora il moto del sistema è armonico semplice con pulsazione, in questo caso,  $\omega_-$ . Il moto dei singoli modi normali si identifica facilmente, ed è rappresentato in figura 8.4.

Nel modo normale  $\mathbf{u}^-$ , il caso (a) della figura 8.4, le coordinate  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  hanno lo stesso segno, e i due pendoli si muovono in concordanza di fase: si allontanano entrambi nella stessa direzione dalla configurazione di equilibrio stabile, si arrestano e vengono richiamati verso l'equilibrio. L'ampiezza del pendolo descritto da  $\vartheta_2$  è pari a  $\sqrt{2}$  volte quella del pendolo descritto da  $\vartheta_1$ .

Nel modo normale  $\mathbf{u}^+$ , il caso (b) della figura 8.4, i due pendoli si muovono in opposizione di fase, con lo stesso rapporto  $\sqrt{2}$  tra le ampiezze di oscillazione. Sottolineiamo ancora una volta che i modi normali sono oscillazioni collettive del sistema caratterizzate da un'unica frequenza.

Nel caso di condizioni iniziali generiche si ha una composizione di moti periodici: se si rappresenta il movimento nel piano  $\vartheta_1, \vartheta_2$  si vedono le figure di Lissajous, di cui abbiamo detto nel paragrafo 1.3.2. Il moto risultante in generale non è periodico: lo è se e solo se il rapporto tra le due frequenze  $\omega_+$  e  $\omega_-$  è un numero razionale. Nell'esempio qui trattato tale rapporto è

$$\frac{\omega_+}{\omega_-} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}},$$

che è irrazionale. Si osservi che i modi normali  $\mathbf{u}^\pm$  non sono paralleli ai vettori della base standard. Ciò implica che non sia possibile mettere in oscillazione uno solo dei due pendoli.

Naturalmente la dinamica qui descritta vale solo in prima approssimazione. La caratteristica principale del sistema lineare è l'*isocronismo delle oscillazioni*: il rapporto tra le frequenze di oscillazione è indipendente dalle ampiezze. La non linearità ha come primo effetto quello di rendere le frequenze di oscillazione dipendenti dall'ampiezza,

come del resto abbiamo visto accadere per il pendolo semplice (paragrafo 4.3.6). Ci si deve dunque attendere che il moto passi con continuità da periodico a non periodico al variare delle ampiezze. In realtà la dinamica è in generale ben più complessa, e si può manifestare anche un comportamento caotico del tipo illustrato nel paragrafo 1.3.3. Ci si può chiedere quale sia la sorte delle soluzioni strettamente periodiche rappresentate dalle oscillazioni secondo uno dei modi normali. Un notevole teorema di Lyapounov assicura che tali moti continuano a persistere purchè sia soddisfatta una condizione di non risonanza sulle frequenze. Precisamente, il moto periodico con frequenza  $\omega_-$  persiste (pur con frequenza effettiva dipendente dall'ampiezza) a condizione che  $\omega_+$  non sia multiplo intero di  $\omega_-$ . Vale anche il viceversa.

**Esercizio 8.2:** Si ponga  $l_1 = 1$ ,  $m_1 = 1$ , e si studi la dipendenza delle frequenze dei modi normali da  $l = l_2$  e da  $m = m_2$ .

### 8.3 Integrali primi e simmetrie

Nel capitolo 3 abbiamo visto che la conoscenza di integrali primi (o costanti del moto) è uno strumento prezioso per lo studio della dinamica di un sistema. Richiamiamo la definizione, adattandola all'ambito lagrangiano in cui ci siamo posti. Supponiamo dunque assegnata una Lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t)$  sullo spazio degli stati, o fibrato tangente  $TM$  a una varietà  $M$ , descritto da coordinate lagrangiane  $q_1, \dots, q_n$  con le corrispondenti velocità  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ . Una variabile dinamica è una funzione  $f : TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ovvero una funzione  $f(q, \dot{q}, t)$  a valori reali. Un integrale primo è una variabile dinamica il cui valore si mantiene costante durante il movimento retto dalle equazioni di Lagrange, ossia soddisfacente

$$(8.21) \quad f(q(t), \dot{q}(t), t) = f(q_0, \dot{q}_0, t_0) \quad \forall t ,$$

dove  $q_0, \dot{q}_0$  sono i dati iniziali per  $t = t_0$ .

La conoscenza di un integrale primo permette in generale di abbassare l'ordine del sistema delle equazioni di Lagrange.

#### 8.3.1 Coordinate cicliche

Supponiamo di studiare un sistema a  $n$  gradi di libertà con Lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t)$ , e supponiamo che nella carta che stiamo considerando la Lagrangiana risulti indipendente da una delle coordinate  $q_j$ , per un qualche  $j$ . Si dice allora che  $q_j$  è una *coordinata ciclica* o talvolta *coordinata ignorabile*. L'esistenza di una tale coordinata è utile in quanto consente immediatamente di concludere che *il sistema ammette un integrale primo, e precisamente la quantità*

$$(8.22) \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}, t) ,$$

che viene detta *momento coniugato* a  $q_j$ . In effetti, ciò segue immediatamente dalla forma delle equazioni di Lagrange, perché si ha  $\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$ .

**Esempio 8.3:** *Il moto centrale.* Nel caso di un punto soggetto ad un campo di forze centrali, che abbiamo discusso nel paragrafo 7.1, abbiamo visto che la Lagrangiana in coordinate polari  $r, \vartheta$  si scrive  $L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) - V(r)$ . La coordinata  $\vartheta$  è dunque ciclica, e di conseguenza risulta costante il momento  $p_{\vartheta} = mr^2\dot{\vartheta}$ . Come abbiamo visto, questa informazione ha un ruolo cruciale nel procedimento che conduce alla soluzione completa del problema: è infatti sostituendola nell'equazione per  $r$  che ci si riconduce all'equazione radiale  $m\ddot{r} - \frac{dV^*}{dr}$ , avendo introdotto il potenziale efficace  $V^*$ . Una volta risolta questa seconda equazione, e avendo quindi determinato il movimento radiale  $r(t)$ , lo si sostituisce nell'equazione per  $p_{\vartheta}$  scritta sopra, e la si riscrive nella forma  $\dot{\vartheta} = \frac{p_{\vartheta}}{mr^2(t)}$ . Dal momento che il secondo membro è una funzione nota del tempo, la soluzione di questa equazione differenziale si riduce al calcolo della primitiva di una funzione nota. Si osservi bene che l'uso delle coordinate polari è essenziale al fine di mettere in evidenza l'esistenza di una coordinata ciclica. Se ad esempio scrivessimo la Lagrangiana in coordinate cartesiane (sempre limitandoci al piano  $x, y$ ) troveremmo  $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r)$  con  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , e non si avrebbero coordinate cicliche.

**Esempio 8.4:** *Il problema dei due corpi.* Come abbiamo discusso nel paragrafo 7.2 la Lagrangiana in coordinate cartesiane  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  si scrive  $L = \frac{1}{2}(m_1\dot{\mathbf{x}}_1^2 + m_2\dot{\mathbf{x}}_2^2) - V(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|)$ , dove  $m_1, m_2$  sono le masse dei due corpi. Da qui non si vede l'esistenza di coordinate cicliche. Se però si passa alle coordinate baricentriche  $M\mathbf{X} = m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ , con  $M = m_1 + m_2$  la massa totale, allora la Lagrangiana diventa  $L = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{X}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r})$ , dove  $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$  è la massa ridotta. Dunque la Lagrangiana è ciclica nelle coordinate  $\mathbf{X}$ , il che comporta l'esistenza di tre integrali primi  $\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{X}}$ . Questi sono i ben noti integrali primi della quantità di moto. L'uso di questi integrali primi per l'integrazione del sistema è elementare: dall'equazione  $\dot{\mathbf{P}} = 0$  si ricava immediatamente il moto del baricentro  $\mathbf{X}(t) = \frac{1}{M}\mathbf{P}_0t + \mathbf{X}_0$ , con i dati iniziali  $\mathbf{X}_0, \mathbf{P}_0$ . Le equazioni per le altre variabili coincidono con quelle ricavate dalla Lagrangiana ridotta  $L = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r})$ .

Nel processo di integrazione gli integrali primi corrispondenti alle coordinate cicliche vengono usati ricalcando il procedimento seguito per il caso del moto centrale. Si inverte<sup>13</sup> rispetto a  $\dot{q}_j$  la relazione (8.22), ricavandone

$$(8.23) \quad \dot{q}_j = \psi(q_1, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{j-1}, \dot{q}_{j+1}, \dots, \dot{q}_n, t),$$

dove abbiamo messo in evidenza che la funzione  $\psi$  è indipendente da  $q_j$  (perché è coordinata ciclica) e da  $\dot{q}_j$  (perché abbiamo fatto un'inversione). Poi si sostituisce questa espressione al posto di  $\dot{q}_j$  nelle restanti equazioni,<sup>14</sup> e se ne ricava un sistema di  $n - 1$

<sup>13</sup> Tale inversione è possibile, almeno localmente, grazie alla condizione di non degenerazione dell'Hessiano della Lagrangiana rispetto alle velocità generalizzate  $\dot{q}$ , espressa dalla condizione (6.49).

<sup>14</sup> Sottolineiamo il fatto che la sostituzione riguarda le equazioni, e non la Lagrangiana. Il procedimento di sostituire l'integrale primo nella Lagrangiana e poi ricavare le equazioni si rivela errato: il lettore potrà rendersene conto facilmente provando ad applicarlo al caso del moto centrale.



equazioni del secondo ordine per  $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_{j-1}, \ddot{q}_{j+1}, \dots, \ddot{q}_n$ . In tal modo l'ordine del sistema di equazioni differenziali risulta ridotto di 2. Supponiamo ora di essere abbastanza abili o abbastanza fortunati da saper risolvere il sistema ridotto. Ne ricaveremo le funzioni del tempo

$$q_1(t), \dots, q_{j-1}(t), q_{j+1}(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_{j-1}(t), \dot{q}_{j+1}(t), \dots, \dot{q}_n(t)$$

tramite le quali la funzione  $\psi$  che compare nella (8.23) diventerà una funzione nota del tempo. Avremo dunque trasformato l'equazione (8.23) in un'equazione a variabili separate  $\dot{q}_j = \psi(t)$ , che ricondurremo immediatamente alle quadrature: basta calcolare la primitiva del secondo membro.

### 8.3.2 L'integrale di Jacobi e l'energia

Abbiamo già fatto uso più volte dell'integrale primo dell'energia: si pensi in particolare al caso di un sistema a un grado di libertà, ove la conoscenza dell'integrale dell'energia permette di ricondurre il sistema alle quadrature (paragrafo 4.3), e si ricordi che per completare l'integrazione del problema del moto centrale abbiamo proprio sfruttato l'esistenza di un integrale dell'energia per l'equazione radiale.

L'esistenza di un integrale primo analogo a quello dell'energia è un fatto generale, soggetto alla sola condizione che la Lagrangiana sia indipendente dal tempo.

**Proposizione 8.5:** Per un sistema lagrangiano generale ad  $n$  gradi di libertà con Lagrangiana  $L(q, \dot{q})$  indipendente dal tempo la funzione

$$(8.24) \quad \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L(q, \dot{q})$$

è un integrale primo.

A questa funzione si dà il nome di *integrale di Jacobi*.

**Dimostrazione.** Ricordando che la Lagrangiana è indipendente dal tempo, si calcola

$$\frac{d}{dt} L = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j .$$

Nella seconda somma si fa uso dell'identità

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j ,$$

e si riscrive l'espressione sopra, raccogliendo opportunamente i termini, come

$$\frac{d}{dt} L = \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \sum_{j=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j .$$

La seconda somma si annulla in virtù delle equazioni di Lagrange, e si ha

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right) = 0 .$$

Q.E.D.

**Corollario 8.6:** Sia  $L(q, \dot{q})$  la Lagrangiana di un sistema meccanico soggetto a vincoli olonomi, bilateri, perfetti ed indipendenti dal tempo e a forze attive che ammettono un'energia potenziale generalizzata

$$\tilde{V}(q, \dot{q}) = V(q) + \sum_{j=1}^n A_j(q) \dot{q}_j .$$

Allora il sistema ammette l'integrale primo dell'energia totale

$$E = T + V(q) .$$

**Dimostrazione.** Nelle ipotesi ammesse l'energia totale coincide con l'integrale di Jacobi per un sistema lagrangiano generale. Infatti per un sistema a vincoli fissi l'energia cinetica si scrive  $T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n g_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k$  (come abbiamo visto nel paragrafo 6.3.3). D'altra parte la Lagrangiana è

$$L = T(q, \dot{q}) - \tilde{V}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n g_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k - \sum_{j=1}^n A_j(q) \dot{q}_j - V(q) .$$

Si calcola allora  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n g_{jk}(q) \dot{q}_k - A_j(q)$ , e l'integrale di Jacobi si riscrive

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L(q, \dot{q}) &= 2T(q, \dot{q}) - \sum_{j=1}^n A_j(q) \dot{q}_j - T(q, \dot{q}) + V(q) + \sum_{j=1}^n A_j(q) \dot{q}_j \\ &= T(q, \dot{q}) + V(q) . \end{aligned}$$

Si applica dunque la proposizione 8.5.

Q.E.D.

Il lettore osserverà che l'enunciato della proposizione 8.5 non esclude il caso di vincoli mobili: nella dimostrazione si fa uso solo del fatto che la Lagrangiana non dipenda dal tempo. L'esistenza di vincoli mobili comporta in generale la perdita dell'integrale primo dell'energia. Si vede però come nel caso in cui la mobilità dei vincoli non si traduca in una dipendenza dal tempo della Lagrangiana allora l'integrale dell'energia viene sostituito dall'integrale di Jacobi. Per ben comprendere questo fatto il lettore potrà rivedere in questa luce l'esempio 6.20, considerando in particolare il caso del pendolo centrifugo.

È spontaneo a questo punto domandarsi se l'integrale dell'energia non sia associato a una qualche coordinata ciclica, ossia se non sia possibile costruire una carta nelle cui coordinate appaia una coordinata ciclica. La risposta a questa domanda è negativa: restando nell'ambito del formalismo lagrangiano non sapremo costruire una coordinata che abbia l'energia come momento coniugato, e che sia ciclica. Nel paragrafo 8.3.4, poco più avanti, vedremo come l'integrale di Jacobi sia associato proprio all'indipendenza della Lagrangiana dal tempo, sicché risulterà spontaneo pensare al tempo come variabile ciclica.

### 8.3.3 Gruppi a un parametro di trasformazioni e proprietà di invarianza della Lagrangiana

La relazione tra coordinate cicliche e integrali primi trova una sua generalizzazione elegante nel teorema di Noether. Per ben comprendere questo argomento però occorre familiarizzarsi col concetto di gruppo a un parametro di trasformazioni. Dobbiamo quindi a questo punto inserire una digressione per discutere brevemente questo argomento.

Osserviamo anzitutto che l'indipendenza della Lagrangiana da una variabile ciclica può enunciarsi, in modo più complicato ma suscettibile di ulteriori generalizzazioni, nel modo seguente: se eseguiamo una trasformazione di coordinate in cui incrementiamo la sola variabile ciclica  $q_j$  di una quantità arbitraria allora la Lagrangiana non cambia. Formalmente: consideriamo la famiglia di trasformazioni dalle coordinate  $q_1, \dots, q_n$  alle nuove coordinate  $Q_1, \dots, Q_n$  definita al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  come

$$Q_j = q_j + \alpha, \quad Q_k = q_k \text{ per } k \neq j,$$

e la trasformazione corrispondente sulle velocità  $\dot{Q}_k = \dot{q}_k, \forall k$ ; allora vale

$$L(Q, \dot{Q}) = L(q, \dot{q}).$$

Si esprime questo fatto dicendo che la Lagrangiana è *invariante* per la famiglia di trasformazioni che abbiamo considerato.

Più in generale, consideriamo una famiglia di trasformazioni  $Q = \varphi_s(q)$  dello spazio delle configurazioni  $M$  in se stesso, dipendente dal parametro reale  $s$ . a essa corrisponde una trasformazione sulle velocità che scriveremo come  $\dot{Q} = d\varphi_s(q)\dot{q}$ , dove abbiamo denotato con  $d\varphi_s(q)$  la matrice jacobiana della trasformazione, ossia

$$d\varphi_s = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{s,1}}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{s,1}}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{s,n}}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{s,n}}{\partial q_n} \end{pmatrix},$$

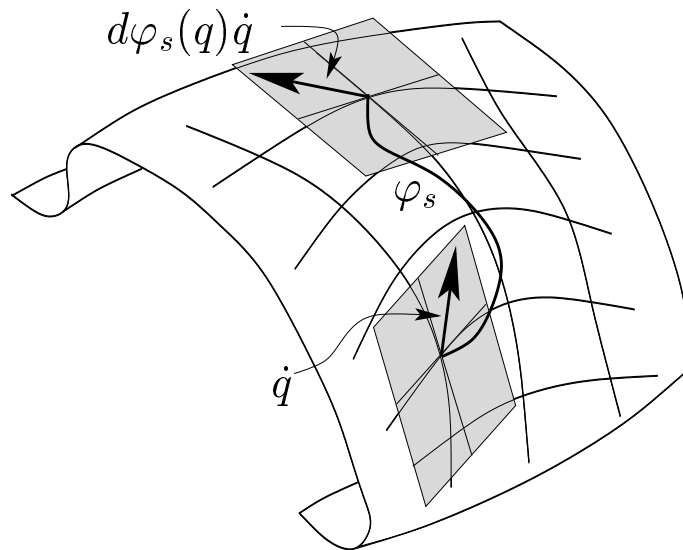
dove tutte le derivate devono essere valutate nel punto  $q$ . In termini geometrici, possiamo pensare a  $\varphi_s(q)$  come a una funzione che manda il punto  $q \in M$  nel punto trasformato  $\varphi_s(q) \in M$ . Corrispondentemente,  $d\varphi_s(q)$  è l'applicazione che manda un elemento  $\dot{q} \in T_q M$  dello spazio tangente ad  $M$  in  $q$  nell'elemento  $d\varphi_s(q)\dot{q} \in T_{\varphi_s(q)} M$ . Se la trasformazione  $\varphi_s$  è ben definita, ossia è differenziabile con inversa differenziabile (un diffeomorfismo) allora l'applicazione  $d\varphi_s(q)$  è un isomorfismo tra gli spazi tangenti. Si dice talvolta che la coppia  $(\varphi_s(q), d\varphi_s(q))$  è un *sollevamento* di  $\varphi_s$  sul fibrato tangente.

Diremo che la Lagrangiana  $L(q, \dot{q})$  è *invariante rispetto alla famiglia di diffeomorfismi*  $d\varphi_s$  se vale

$$(8.25) \quad L(\varphi_s(q), d\varphi_s(q)) = L(q, \dot{q}), \quad (q, \dot{q}) \in TM.$$

Diremo anche che  $\varphi_s(q)$  è un *gruppo di simmetria* per la Lagrangiana  $L(q, \dot{q})$ .

Ai nostri fini è particolarmente interessante il caso in cui  $\varphi_s$  sia un *gruppo a un parametro di diffeomorfismi*. Ricordiamo la



**Figura 8.5.** Il gruppo a un parametro di trasformazioni  $\varphi_s$  trasporta un punto  $q$  sulla superficie fino al punto  $\varphi_s(q)$ . Allo stesso tempo il vettore  $\dot{q} \in T_q M$  viene trasformato nel vettore  $d\varphi_s(q)\dot{q}$ .

**Definizione 8.7:** Un gruppo a un parametro di diffeomorfismi sulla superficie  $M$  è una famiglia  $\varphi_s$  che soddisfi le seguenti proprietà:

- (i)  $\varphi_s : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ ,  $(q, s) \mapsto \varphi_s(q)$ ;
- (ii)  $\varphi_0 : M \rightarrow M$  sia l'identità;
- (iii)  $\varphi_s : M \rightarrow M$  è un diffeomorfismo per ogni  $s$  fissato;
- (iv)  $\varphi_{s_1} \circ \varphi_{s_2} = \varphi_{s_1+s_2} \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ .

La legge di composizione considerata nella proprietà (iv) è l'applicazione successiva:  $(\varphi_{s_1} \circ \varphi_{s_2})(q) = \varphi_{s_2}(\varphi_{s_1}(q))$ .

**Esempio 8.5: Le traslazioni.** Un primo esempio è proprio quello che abbiamo considerato sopra:

$$(q_1, \dots, q_n) \mapsto \varphi_s(q) = (q_1, \dots, q_j + s, \dots, q_n),$$

ossia la trasformazione trasla la coordinata  $q_j$  di  $s$  lasciando invariate tutte le altre. Il lettore potrà verificare senza difficoltà che si tratta di un gruppo a un parametro di diffeomorfismi.

**Esempio 8.6: Le rotazioni.** Consideriamo le rotazioni dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$  con coordinate  $x, y, z$  attorno a un asse fissato, che potremo prendere come asse  $z$ . Detto  $\vartheta$  l'angolo di rotazione, la trasformazione si scrive

$$(x, y, z) \mapsto \varphi_\vartheta(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Anche qui la verifica che si tratti di un diffeomorfismo è elementare.

**Esempio 8.7:** *Il flusso generato da un campo vettoriale.* Questo esempio è più complesso, ma più interessante. Consideriamo un *campo vettoriale*  $X$  su  $\mathbb{R}^n$ , ossia una funzione  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  regolare (ad esempio di classe  $C^\infty$ ), e consideriamo l'equazione differenziale in  $\mathbb{R}^n$

$$(8.26) \quad \frac{dq}{ds} = X(q) .$$

Supponiamo che siano soddisfatte le condizioni perché il flusso corrispondente sia prolungabile per ogni  $s \in \mathbb{R}$ . Il teorema di esistenza ed unicità *globale* assicura che a ogni dato iniziale  $\bar{q}$  corrisponde una ed una sola soluzione  $q(s)$  tale che  $q(0) = \bar{q}$ . Possiamo ben indicare tale corrispondenza scrivendo  $(\bar{q}, s) \mapsto \varphi_s(\bar{q})$ , intendendo con  $\varphi_s(\bar{q})$  la soluzione al tempo  $s$  dell'equazione differenziale (8.26) corrispondente al dato iniziale  $\bar{q}$ . Il teorema di regolarità rispetto ai dati iniziali assicura che  $\varphi_s$  è un diffeomorfismo per ogni  $s$ , ed è chiaro che  $\varphi_0$ , essendo il flusso al tempo 0, è l'identità. Quindi le proprietà (i)–(iii) sono verificate. La proprietà (iv) è anch'essa conseguenza del teorema di esistenza ed unicità della soluzione, unita al fatto che il campo vettoriale è autonomo. L'esempio si estende (con un po' di pazienza) al caso di equazioni differenziali su una superficie.

Quest'ultimo esempio è del tutto generale, perché ogni gruppo ad un parametro di diffeomorfismi può vedersi come generato dal flusso di un campo vettoriale. Basta infatti definire il campo vettoriale come

$$X(q) = \left. \frac{d}{ds} \varphi_s(q) \right|_{s=0} ,$$

perché il flusso<sup>15</sup> dell'equazione  $\frac{dq}{ds} = X(q)$  sia proprio  $\varphi_s(q)$ . Il campo vettoriale  $X(q)$  viene detto *generatore infinitesimale del gruppo*  $\varphi_s$ .

Ad esempio, nel caso della traslazione della coordinata  $q_j$  il generatore infinitesimale è il campo

$$X(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

che ha tutte le componenti nulle a eccezione della  $j$ -esima, che vale 1.

Nel caso della rotazione attorno a un asse, per fissare le idee attorno all'asse  $z$ , il generatore infinitesimale è dato da

$$X(q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 \\ -q_1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

---

<sup>15</sup> È proprio la definizione di soluzione di un'equazione differenziale.

Infatti l'integrazione dell'equazione differenziale vettoriale

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

col dato iniziale  $q_k(0) = q_{k,0}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) fornisce proprio la soluzione

$$\begin{pmatrix} q_1(s) \\ q_2(s) \\ q_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{1,0} \\ q_{2,0} \\ q_{3,0} \end{pmatrix}.$$

### 8.3.4 Simmetrie e teorema di Noether

Possiamo ora tornare al tema centrale di questo paragrafo: la connessione tra l'esistenza di integrali primi e le simmetrie di un sistema Lagrangiano: l'invarianza rispetto a un gruppo a un parametro di trasformazioni.

Consideriamo dunque un gruppo a un parametro di diffeomorfismi  $\varphi_s$  su una superficie  $M$  dotata di coordinate generalizzate  $q_1, \dots, q_n$ , e consideriamo il suo sollevamento  $(\varphi_s(q), d\varphi_s(q))$  sul fibrato tangente  $TM$ .

**Proposizione 8.8:** (*Teorema di Emmy Noether*). *Sia  $\varphi_s(q)$  un gruppo di simmetria per la Lagrangiana  $L(q, \dot{q})$  sulla superficie  $M$ . Allora le equazioni di Lagrange per  $L$  ammettono un integrale primo della forma*

$$F(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j},$$

dove  $X(q)$  è il generatore infinitesimale del gruppo  $\varphi_s(q)$ .

**Dimostrazione.** L'invarianza della Lagrangiana rispetto al gruppo  $\varphi_s$ , espressa dalla (8.25), significa che  $\frac{dL}{ds} = 0$ , dove dobbiamo pensare a  $L(\varphi_s(q), d\varphi_s(q)\dot{q})$  come funzione di  $s$ . D'altra parte eseguendo esplicitamente la derivata rispetto a  $s$  si calcola

$$0 = \frac{dL}{ds} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{d\varphi_{s,j}}{ds}(q) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \sum_{k=1}^n \frac{d}{ds} \frac{\partial \varphi_{s,j}}{\partial q_k} \dot{q}_k \right).$$

Usiamo ora l'identità<sup>16</sup>  $\frac{d}{ds} \frac{\partial \varphi_{s,j}}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{d\varphi_s}{ds}$ , e ricordando la definizione di generatore infinitesimale del gruppo  $\varphi_s$  otteniamo

$$0 = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} X_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \sum_{k=1}^n \frac{\partial X_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \right).$$

<sup>16</sup> È la stessa identità che abbiamo usato per la dimostrazione del lemma 6.5 e della proposizione 6.12. Si riconduce ad affermare semplicemente che è lecito scambiare le derivate  $\frac{d}{ds}$  e  $\frac{\partial}{\partial q_j}$ . Si noti che se si pensa all'azione del gruppo  $\varphi_s$  come a un flusso, allora  $s$  svolge il ruolo del tempo.

Ora, osserviamo che vale  $\sum_{k=1}^n \frac{\partial X_j}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{dX_j}{dt}$ , e se teniamo conto delle equazioni di Lagrange abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} X_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{dX_j}{dt} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) X_j + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} X_j \right) \right] = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} . \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

**Esempio 8.8:** *Le coordinate cicliche.* Se la coordinata  $q_j$  è ciclica, allora la Lagrangiana è palesemente invariante sotto l'azione del gruppo a un parametro  $\varphi_s(q_1, \dots, q_n) = (q_1, \dots, q_j + s, \dots, q_n)$  che trasla di  $s$  la sola coordinata  $j$ -esima. Il generatore del flusso è un vettore  $X$  le cui componenti sono  $X_k = \delta_{jk}$ . Allora l'integrale primo dato dal teorema di Noether è

$$f(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^n X_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}) ,$$

ossia il momento coniugato a  $q_j$ , che già conoscevamo.

**Esempio 8.9:** *Invarianza per traslazione.* Consideriamo il caso di un punto di massa  $m$  nel piano  $\mathbb{R}^2$  soggetto a un campo di forze costanti:  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}$ . Allora la Lagrangiana si scrive

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m \mathbf{x}^2 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + n_x x + n_y y .$$

Il gruppo a un parametro  $\varphi_s(\mathbf{x})$  definito come

$$x \mapsto \varphi_{s,x}(\mathbf{x}) = x + s n_y , \quad y \mapsto \varphi_{s,y}(\mathbf{x}) = y - s n_x ,$$

ossia la traslazione in una direzione ortogonale a  $\mathbf{n}$ , è un gruppo di simmetria per la Lagrangiana:

$$L(\varphi_s(\mathbf{x}), d\varphi_s(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + n_x x + n_y y + s(n_x n_y - n_y n_x) = L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) .$$

Il generatore infinitesimale del gruppo è il campo uniforme  $X = (n_y, -n_x)$ , e a esso è associato l'integrale primo

$$f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = n_y \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - n_x \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m(n_y \dot{x} - n_x \dot{y}) ,$$

che è la componente della quantità di moto nella direzione del generatore  $X$ .

**Esempio 8.10:** *L'invarianza per rotazioni.* Consideriamo nello spazio  $\mathbb{R}^3$  un gruppo a un parametro  $\varphi_s(\mathbf{x})$  che sia una rotazione attorno a un asse  $\mathbf{n}$  fissato. Il generatore infinitesimale di tale rotazione è<sup>17</sup>  $X(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \wedge \mathbf{x}$ . Consideriamo poi un punto la cui

---

<sup>17</sup> Il lettore potrà verificare facilmente questa affermazione provando anzitutto a considerare una rotazione attorno all'asse  $z$ , che si scrive in modo elementare, e poi considerando un asse  $\mathbf{n}$  generico.

dinamica è descritta da una Lagrangiana  $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + V(\mathbf{x})$ , e supponiamo che  $\varphi_s(\mathbf{x})$  sia un gruppo di simmetria per questa Lagrangiana. Ciò accade, ad esempio, se  $V(\mathbf{x}) = V(\|\mathbf{x}\|)$ , ossia se l'energia potenziale dipende solo dalla distanza dall'origine. Allora la Lagrangiana  $L$  ammette l'integrale primo<sup>18</sup>

$$f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = m\dot{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{x}) = m(\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n} .$$

Si tratta di una quantità che ci è ben nota: la componente del momento della quantità di moto lungo l'asse  $\mathbf{n}$ .

**Osservazione.** In generale non è possibile estendere il teorema di Noether al caso di gruppi di simmetria a più parametri<sup>19</sup>. Anche se la Lagrangiana è invariante rispetto a tale gruppo in generale non si può dedurre l'esistenza di più di una quantità conservata. L'estensione è possibile qualora il gruppo di simmetria sia commutativo. Per tali estensioni si veda, ad esempio, [3].

### 8.3.5 Il teorema di Noether e l'invarianza temporale

Abbiamo visto che nel caso di una Lagrangiana indipendente dal tempo il sistema ammette l'integrale primo di Jacobi. È spontaneo domandarsi se il teorema di Noether possa essere generalizzato fino ad includere anche il legame fra questa simmetria per traslazione temporale e l'esistenza della corrispondente quantità conservata. La risposta è affermativa, ma occorre considerare gruppi a un parametro agenti sullo spazio delle configurazioni esteso  $M \times \mathbb{R}$ , dove l'aggiunta dell'asse reale alloggia il fluire del parametro temporale.

L'estensione dello spazio delle configurazioni si effettua introducendo una coordinata aggiuntiva, che denoteremo con  $q_0$  con una corrispondente velocità generalizzata  $\dot{q}_0$ . Dato un sistema descritto da una Lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t)$  dipendente dal tempo, si considera la Lagrangiana estesa

$$(8.27) \quad \tilde{L}(q, \dot{q}, q_0, \dot{q}_0) = L\left(q, \frac{\dot{q}}{\dot{q}_0}, q_0\right) \dot{q}_0 .$$

Allora valgono le identità

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_j} &= \dot{q}_0 \frac{\partial L}{\partial q_j} , & \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_j} &= \dot{q}_0 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} , & j &= 1, \dots, n , \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_0} &= \dot{q}_0 \frac{\partial L}{\partial t} , & \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_0} &= L - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j . \end{aligned}$$

Da queste identità segue che se  $q(t)$  è un movimento che risolve le equazioni di Lagrange relative a  $L$  allora la coppia  $(q(t), t)$  risolve le equazioni di Lagrange relative a  $\tilde{L}$ , ove si ponga semplicemente  $q_0 = t$ , e quindi  $\dot{q}_0(t) = 1$ . Infatti per le equazioni relative alle

<sup>18</sup> Si usa la ciclicità del triplo prodotto misto tra vettori:  $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \wedge \mathbf{x}) = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})$ .

<sup>19</sup> Ad esempio, il gruppo delle rotazioni in  $\mathbb{R}^3$  è un gruppo a 3 parametri.



$n$  coordinate  $q_1, \dots, q_n$  si ha subito

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 .$$

Per la coordinata  $q_0$  si calcola (sempre ricordando che  $\dot{q}_0 = 1$ )

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_0} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_0} &= \frac{d}{dt} \left( L - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_0} \\ &= \frac{dL}{dt} - \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j = 0 . \end{aligned}$$

Ne concludiamo che i sistemi con le Lagrangiane  $L(q, \dot{q}, t)$  e  $\tilde{L}(q, \dot{q}, q_0, \dot{q}_0)$  sono del tutto equivalenti sotto la sola condizione che sia  $q_0 = t$ .

Introduciamo ora sullo spazio delle configurazioni esteso  $M \times \mathbb{R}$  un gruppo a un parametro  $\varphi_s : \mathbb{R} \times (M \times \mathbb{R}) \rightarrow M \times \mathbb{R}$ , e diciamo che esso è una simmetria della Lagrangiana se vale

$$\tilde{L}(q, \dot{q}, q_0, \dot{q}_0) = \tilde{L}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{q}_0, \dot{\tilde{q}}_0)$$

dove abbiamo denotato  $(\tilde{q}, \tilde{q}_0) = \varphi_s(q, q_0)$  e  $(\dot{\tilde{q}}, \dot{\tilde{q}}_0) = d\varphi_s(q, q_0)(\dot{q}, \dot{q}_0)$ . Sotto queste ipotesi possiamo applicare il teorema di Noether, e si conclude che esiste una quantità conservata che si scrive (si noti che l'indice di somma parte da 0)

$$I = \sum_{j=0}^n \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_j} X_j ,$$

dove  $X_j$  è il generatore infinitesimale della simmetria  $\varphi_s$ . In termini espliciti abbiamo (si noti che l'indice di somma parte da 1)

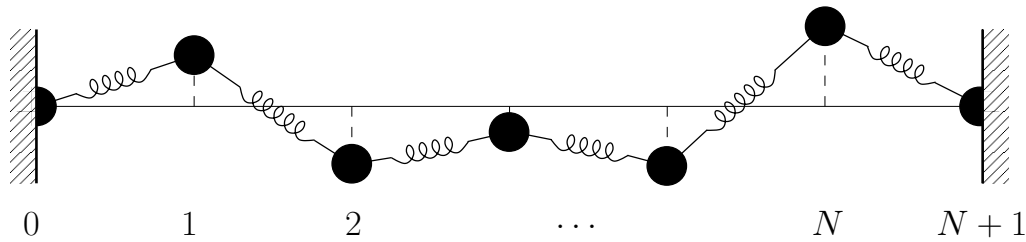
$$I = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} X_j + \left( L - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) X_0 .$$

Questa è la forma generale della quantità conservata.

Se ora consideriamo il gruppo a un parametro che corrisponde alla simmetria di traslazione temporale, ovvero  $\varphi_s(q, t) = (q, t + s)$ , si ha che il generatore infinitesimale è  $X_j(q, t) = \delta_{0,j}$ , ossia il campo vettoriale con componenti tutte nulle salvo  $X_0 = 1$ . Dunque si ha

$$I = L - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j .$$

Questo è proprio l'integrale di Jacobi, sia pure col segno cambiato.



**Figura 8.6.** Il modello della catena lineare, costituito da  $N + 2$  masse eguali che possono muoversi solo trasversalmente rispetto alla linea di equilibrio, e sono collegate tra loro da  $N + 1$  molle identiche. Gli estremi della catena sono fissati.

## 8.4 La catena lineare

Il modello è illustrato in figura 8.6. Il sistema meccanico è costituito da  $N + 2$  masse identiche su una retta, ciascuna delle quali interagisce con le due più vicine con una forza che in prima approssimazione assumiamo perfettamente elastica. Rappresentiamo le interazioni mediante  $N + 1$  molle identiche. Assumiamo inoltre, per semplicità, che le masse possano muoversi solo ortogonalmente alla retta di equilibrio.

Lo studio di questo sistema è il punto di partenza per la comprensione della dinamica di sistemi più complessi. Costituisce infatti il modello più elementare di reticolo cristallino, in questo caso a una dimensione. Inoltre possiamo pensare al modello come alla discretizzazione di un sistema continuo quale la corda vibrante.

### 8.4.1 La Lagrangiana e le equazioni di moto

Denoteremo con  $x_j$ , ( $j = 0, \dots, N + 1$ ), lo scostamento della particella  $j$ -esima dalla retta di equilibrio. La condizione che gli estremi della catena siano fissi si esprime imponendo  $x_0 = x_{N+1} = 0$ . Denoteremo poi con  $m$  la massa delle particelle e con  $\kappa$  la costante elastica delle molle.

L'energia cinetica è la somma delle energie cinetiche di tutte le particelle in movimento, e si scrive  $T = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^N \dot{x}_j^2$ . L'energia potenziale è dovuta alle forze elastiche rappresentate dalle molle. La molla che congiunge le particelle  $j$ -esima e  $(j + 1)$ -esima ha lunghezza  $\sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + d^2}$ , dove  $d$  è la distanza tra le particelle in posizione di equilibrio. Dunque questa molla dà un contributo  $\kappa [(x_{j+1} - x_j)^2 + d^2]/2$  all'energia potenziale, ma il termine  $d^2$  si può eliminare, essendo costante. L'energia potenziale totale è<sup>20</sup>

$$(8.28) \quad V = \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^N (x_{j+1} - x_j)^2 .$$

<sup>20</sup> Si faccia attenzione agli indici di somma: qui occorre far variare  $j$  tra 0 e  $N$  per tener conto dei contributi delle  $N + 1$  molle. I termini  $j = 0$  e  $j = N$  della somma tengono conto del contributo delle due molle agli estremi; qui entrano in gioco le condizioni al contorno  $x_0 = x_{N+1} = 0$ .

Dunque la Lagrangiana si scrive

$$(8.29) \quad L = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^N \dot{x}_j^2 - \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^N (x_{j+1} - x_j)^2 .$$

Le equazioni di moto, ottenute mediante le equazioni di Lagrange, sono

$$(8.30) \quad m\ddot{x}_j = -\frac{\partial V}{\partial x_j} , \quad j = 1, \dots, N .$$

e richiedono il calcolo delle derivate dell'energia potenziale. Svolgiamo in dettaglio questo calcolo, che richiede qualche attenzione.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x_j} &= -\kappa \sum_{l=0}^N (x_{l+1} - x_l)(\delta_{l+1,j} - \delta_{l,j}) \\ &= \kappa(x_{j+1} - x_j) - \kappa(x_j - x_{j-1}) , \end{aligned}$$

ove abbiamo usato il simbolo  $\delta$  di Kronecker. Abbiamo dunque il sistema di equazioni

$$(8.31) \quad m\ddot{x}_j = \kappa(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) , \quad j = 1, \dots, N ,$$

a cui occorre aggiungere la condizione di estremi fissi  $x_0 = x_{N+1} = 0$ .

#### 8.4.2 Soluzione per separazione delle variabili

La soluzione generale del sistema lineare è descritta nella seguente

**Proposizione 8.9:** *Il sistema lineare (8.31) con le condizioni di estremi fissi  $x_0 = x_{N+1} = 0$  ammette  $N$  soluzioni linearmente indipendenti della forma*

$$(8.32) \quad x_j(t) = \sin \frac{jn\pi}{N+1} q_n(t) , \quad j = 1, \dots, N ,$$

dove

$$(8.33) \quad \begin{aligned} q_n(t) &= a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t \\ \omega_n &= 2\sqrt{\frac{\kappa}{m}} \sin \frac{n\pi}{2(N+1)} , \quad n = 1, \dots, N , \end{aligned}$$

e  $a_n, b_n$  sono costanti arbitrarie.

Le particolari soluzioni indipendenti di cui si afferma l'esistenza vengono dette *modi normali* della catena. All'insieme delle frequenze  $\omega_n$  si dà il nome di *spettro*.<sup>21</sup> Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti sappiamo che la soluzione generale si scrive come combinazione lineare arbitraria delle  $N$  soluzioni indipendenti (8.32), ma su questo torneremo più avanti.

---

<sup>21</sup> Vale la pena di osservare che la forma dello spettro si ricorda facilmente se si fa riferimento alla figura 8.7: l'intervallo  $(0, \pi/2)$  viene diviso in  $N + 1$  intervalli eguali, e le frequenze sono i seni dei punti di suddivisione degli intervalli.

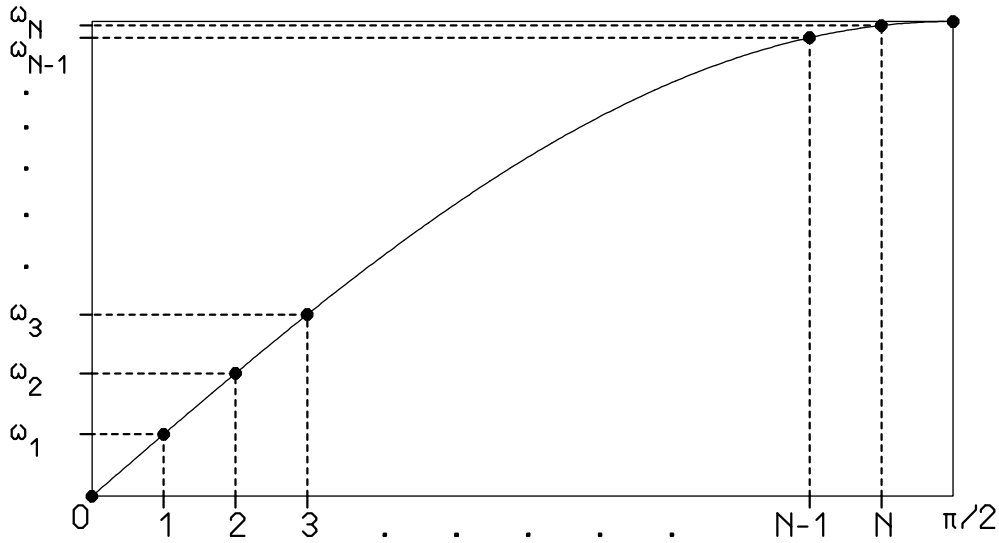


Figura 8.7. Lo spettro della catena lineare.

**Dimostrazione.** Procediamo col metodo di separazione delle variabili, ossia cerchiamo soluzioni della forma

$$x_j(t) = X_j q(t) ,$$

con costanti reali  $X_1, \dots, X_N$ . Per sostituzione si ricava immediatamente

$$X_j \ddot{q}(t) = \frac{\kappa}{m} (X_{j+1} - 2X_j + X_{j-1}) q(t) .$$

Separando le variabili si ottiene il sistema di equazioni

$$(8.34) \quad \begin{aligned} \frac{\kappa}{m} (X_{j+1} - 2X_j + X_{j-1}) &= -\omega^2 X_j , \quad j = 1, \dots, N \\ \ddot{q} &= -\omega^2 q , \end{aligned}$$

con la condizione di estremi fissi  $X_0 = X_{N+1} = 0$ , dove  $-\omega^2$  è una costante arbitraria.<sup>22</sup>

La prima equazione altro non è che l'equazione agli autovalori per la matrice simmetrica<sup>23</sup>

$$(8.35) \quad \begin{pmatrix} -2\frac{\kappa}{m} & \frac{\kappa}{m} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{m} & -2\frac{\kappa}{m} & \frac{\kappa}{m} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa}{m} & -2\frac{\kappa}{m} & \frac{\kappa}{m} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\kappa}{m} & -2\frac{\kappa}{m} \end{pmatrix} .$$

<sup>22</sup> Di fatto si sta assumendo che la costante arbitraria sia necessariamente negativa. Alla luce della discussione generale svolta alla fine del paragrafo 8.2.3 ciò è evidente, perché l'energia potenziale ha un minimo per  $\mathbf{x} = 0$ .

<sup>23</sup> Il problema agli autovalori è lo stesso che incontreremmo seguendo il procedimento esposto nel paragrafo 8.2.3.

La seconda delle (8.34) altro non è che la ben nota equazione di un oscillatore armonico, la cui soluzione generale si scrive  $q(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ , ove  $a$  e  $b$  sono costanti arbitrarie da determinarsi mediante le condizioni iniziali, e  $\omega$  può assumersi positivo. Fin qui, il valore della costante di separazione  $-\omega^2$  resta arbitrario.

Veniamo alla soluzione dell'equazione agli autovalori. Il procedimento classico consiste nel cercare autovettori della forma  $X_j = \sin j\gamma$ , con un parametro  $\gamma$  che viene lasciato arbitrario. Per sostituzione si ricava immediatamente

$$\frac{\kappa}{m} (\sin(j+1)\gamma - 2 \sin j\gamma + \sin(j-1)\gamma) = -\omega^2 \sin j\gamma .$$

Applicando al membro di sinistra le formule trigonometriche di somma e di bisezione lo si trasforma in

$$\frac{2\kappa}{m} (\cos \gamma - 1) \sin j\gamma = -\frac{4\kappa}{m} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin j\gamma ,$$

sicché l'equazione diventa

$$\left( \frac{4\kappa}{m} \sin^2 \frac{\gamma}{2} - \omega^2 \right) \sin j\gamma = 0 .$$

Poiché l'eguaglianza deve valere per  $j = 0, \dots, N+1$  si ottiene una soluzione significativa solo annullando il termine tra parentesi, ossia ponendo

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \sin \frac{\gamma}{2} ,$$

e questa è una relazione tra i due parametri  $\gamma$  e  $\omega$ , fin qui arbitrari. A questa relazione si devono aggiungere le condizioni di estremi fissi. La prima,  $X_0 = 0$ , è banalmente verificata senza ulteriori condizioni su  $\gamma$ ; la seconda diventa

$$(8.36) \quad X_{N+1} = \sin(N+1)\gamma = 0 ,$$

che seleziona un insieme discreto di valori  $\gamma_n, \omega_n$ , e precisamente

$$(8.37) \quad \gamma_n = \frac{n\pi}{N+1} , \quad \omega_n = 2 \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \sin \frac{n\pi}{2(N+1)} ,$$

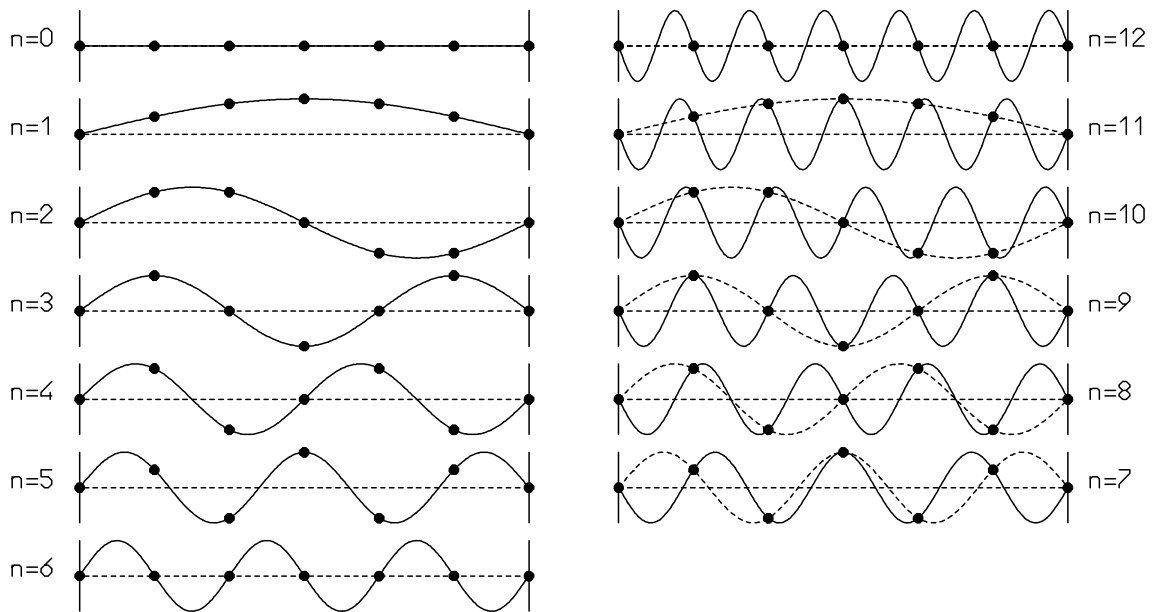
dove  $n$  è un intero arbitrario. Questa formula fornisce apparentemente un'infinità numerabile di valori possibili per  $\gamma$ . Si deve però osservare che i valori distinti e non nulli di  $-\omega^2$  che si trovano con questo procedimento sono esattamente  $N$ , selezionati prendendo, ad esempio,  $n = 1, \dots, N$ . Si può dunque concludere che il sistema (8.34) ammette  $N$  soluzioni reali e distinte della forma

$$(8.38) \quad X_j = \sin \frac{jn\pi}{N+1} , \quad j = 1, \dots, N ,$$

$$q_n(t) = a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t$$

con le frequenze  $\omega_n$  date dalla (8.37), come asserito.

*Q.E.D.*



**Figura 8.8.** Rappresentazione dei modi normali per una catena di  $N = 5$  particelle, oltre agli estremi fissi. La figura illustra anche come una stessa disposizione possa essere attribuita a un modo fittizio con un numero elevato di nodi. Per una descrizione dettagliata si veda il testo.

### 8.4.3 La dinamica dei modi normali

Abbiamo già detto che per modo normale si intende una soluzione particolare del tipo (8.32). Fissato  $n$  con  $1 \leq n \leq N$ , poniamo anzitutto  $a_n = 1$  ed  $b_n = 0$ . Dunque la posizione della particella  $j$ -esima all'istante  $t$  è  $x_j(t) = \sin \frac{jn\pi}{N+1} \cos \omega_n t$ , con  $\omega_n$  dato dalla (8.33). Al tempo  $t = 0$  le particelle si dispongono lungo una senoide che si annulla in corrispondenza degli estremi della catena. La situazione è illustrata in fig. 8.8. In questo caso rappresentiamo una catena di  $N = 5$  particelle, oltre ai due estremi fissi. I casi  $n = 1, \dots, 5$  nella parte sinistra della figura danno la disposizione delle particelle secondo i modi normali di frequenza  $\omega_1, \dots, \omega_5$ . Si vede che al modo  $n$  corrisponde una senoide che presenta  $n - 1$  zeri, detti anche *odi*, all'interno dell'intervallo.

Se ora pensiamo di lasciar scorrere il tempo osservando una sola particella si vede che essa eseguirà un'oscillazione armonica con frequenza  $\omega_n$ . A ogni istante la configurazione della catena è descritta da una senoide la cui ampiezza oscilla in modo armonico. In particolare, le particelle che si trovano in corrispondenza dei nodi restano costantemente ferme. È questo, ad esempio, il caso della particella al centro della catena nei casi  $k = 2, 4$ .

La figura 8.8 serve anche ad illustrare cosa accade se si considerano valori di  $n$  esterni all'intervallo  $1, \dots, N$ . Il caso  $n = 0$  risulta non significativo, perché le particelle sono tutte ferme nella posizione di equilibrio, e lo stesso accade per i valori di  $n$  che siano multipli di  $N + 1$ , perché le posizioni delle particelle coincidono con i nodi della senoide, sicché le particelle non possono muoversi. Più interessante è considerare, ad

esempio, i valori  $n = N + 2, N + 3, \dots$  che nella discussione del paragrafo precedente abbiamo scartati. Questi sono rappresentati nella parte destra della figura. Si vede bene che i modi  $N + 2, N + 3, \dots, 2N - 1$  (in questo caso  $7, 8, \dots, 11$ ) riproducono nell'ordine le configurazioni della catena corrispondenti ai modi  $N, N - 1, \dots, 1$  (in questo caso  $5, 4, \dots, 1$ ), a meno di un cambiamento di segno del tutto irrilevante, che abbiamo introdotto al solo fine di semplificare la discussione. Un attimo di riflessione basta a rendersi conto della validità di una semplice regola: *se  $n = n' \bmod (2N + 2)$  allora i modi  $n$  e  $n'$  descrivono la stessa configurazione delle particelle; lo stesso accade se  $n' = N + 1 - n$ , a parte un cambiamento di segno*. Resta però univocamente fissata, sempre a meno del segno, la *frequenza*  $\omega_n$  di oscillazione.<sup>24</sup> Questo mostra come la semplice configurazione delle particelle non basti, per sé, a selezionare un modo normale (nel senso di un particolare valore di  $n$ ), perché si possono trovare infiniti modi equivalenti ai fini della descrizione del movimento. La scelta  $n = 1, \dots, N$  è una convenzione comoda, ma potremmo scegliere  $N$  indici arbitrari, purché non vi siano coppie di indici che rappresentano lo stesso movimento.

Il moto della catena per condizioni iniziali generiche può rivelarsi in apparenza molto complesso. Si tratta in effetti della sovrapposizione di moti a  $N$  frequenze, che l'occhio umano non è abituato a risolvere nelle sue componenti elementari.

#### 8.4.4 Il problema di Cauchy per la catena lineare

Vediamo ora come i modi normali che abbiamo trovato ci consentano di risolvere il problema di Cauchy per la catena lineare. Supponiamo dunque assegnate le condizioni iniziali

$$(8.39) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0$$

che specificano lo scostamento iniziale dall'equilibrio e la velocità iniziale di tutte le particelle. Ci proponiamo di scrivere le soluzioni soddisfacenti queste condizioni.

Dal momento che il sistema di equazioni è lineare possiamo ricavare una soluzione combinando linearmente le soluzioni date dalla proposizione 8.9, ossia

$$(8.40) \quad x_j(t) = \sum_{n=1}^N q_n(t) \sin \frac{jn\pi}{N+1}.$$

---

<sup>24</sup> Questo fenomeno – diversi modi che riproducono la stessa configurazione – è ben noto a chi ha avuto occasione di analizzare dei segnali discreti mediante la tecnica della trasformata di Fourier. Si tratta tipicamente di esaminare un segnale che viene campionato ad intervalli di tempo regolari, per un certo periodo; il problema è riconoscere eventuali periodicità del segnale. Il campionamento introduce una discretizzazione temporale che trova il suo analogo nella discretizzazione spaziale della catena: le frequenze il cui periodo è inferiore all'intervallo di campionamento non vengono riconosciute, così come non sono visibili le oscillazioni di una sinusoide su un intervallo più corto della distanza tra due particelle. La trasformata discreta di Fourier ricostruisce il segnale introducendo delle frequenze fittizie con un meccanismo di riflessione simile a quello illustrato in figura 8.8: si tratta del cosiddetto *aliasing*.

Qui non è necessario introdurre delle costanti arbitrarie, perché queste sono già presenti nelle funzioni  $q_n(t) = a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t$ . Il nostro compito è determinare le  $2N$  costanti  $a_n, b_n$  in modo che siano soddisfatte le condizioni iniziali.

È conveniente riscrivere la soluzione (8.40) in forma più compatta, mettendo in evidenza che si tratta semplicemente di scrivere la soluzione sulla base degli autovettori della matrice (8.35). Dal calcolo che abbiamo svolto sappiamo che gli autovettori sono

$$\tilde{\mathbf{s}}_n = \left( \sin \frac{n\pi}{N+1}, \sin \frac{2n\pi}{N+1}, \dots, \sin \frac{Nn\pi}{N+1} \right).$$

Inoltre sappiamo che essi formano una base di  $\mathbb{R}^n$ , perché gli autovalori sono distinti, e sono mutuamente ortogonali, perché la matrice (8.35) è simmetrica. Per trasformarli in una base ortonormale occorre normalizzarli. A tal fine si calcola

$$\|\tilde{\mathbf{s}}_n\|^2 = \frac{N+1}{2}.$$

Il calcolo non è difficile. Si osserva che

$$\|\tilde{\mathbf{s}}_n\|^2 = \sum_{k=1}^N \sin^2 \frac{kn\pi}{N+1},$$

e si aggiunge alla somma il termine corrispondente a  $k=0$ , che è comunque nullo. Grazie alla nota formula trigonometrica  $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$  abbiamo poi

$$\|\tilde{\mathbf{s}}_n\|^2 = \sum_{k=0}^N \sin^2 \frac{k \cdot n\pi}{N+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \left( 1 - \cos \frac{k \cdot 2n\pi}{N+1} \right) = \frac{N+1}{2} - \sum_{k=0}^N \cos \frac{k \cdot 2n\pi}{N+1}.$$

Basta ora verificare che la somma dei coseni è nulla. A tal fine si osserva che tale somma non è altro che la parte reale dell'espressione complessa  $\sum_{k=0}^N e^{ik \cdot 2n\pi/(N+1)}$ , e che i termini della somma corrispondono a punti distribuiti ad intervalli regolari sul cerchio unitario nel piano complesso, sicché la loro somma è nulla per simmetria.

**Proposizione 8.10:** *Il sistema di equazioni (8.31) con le condizioni di estremi fissi  $x_0(t) = x_{N+1}(t) = 0$  e le condizioni iniziali (8.39) ha soluzione*

$$(8.41) \quad \mathbf{x}(t) = \sum_{n=1}^N (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \mathbf{s}_n$$

dove

$$(8.42) \quad \mathbf{s}_n = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \left( \sin \frac{n\pi}{N+1}, \sin \frac{2n\pi}{N+1}, \dots, \sin \frac{Nn\pi}{N+1} \right)$$

e le costanti  $a_n, b_n$  sono calcolate come

$$(8.43) \quad a_n = \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{s}_n, \quad b_n = \frac{1}{\omega_n} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{s}_n.$$

**Dimostrazione.** La (8.41) insieme alla (8.42) non è altro che una riscrittura in forma compatta della (8.40), che sappiamo essere soluzione. Dobbiamo determinare le



costanti  $a_n, b_n$ . A tal fine occorre derivare rispetto al tempo, calcolando

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{n=1}^N \omega_n (-a_n \sin \omega_n t + b_n \cos \omega_n t) \mathbf{s}_n .$$

Ponendo poi  $t = 0$  si scrivono le condizioni iniziali come

$$\sum_{k=1}^N a_k \mathbf{s}_k = \mathbf{x}_0 , \quad \sum_{k=1}^N \omega_k b_k \mathbf{s}_k = \mathbf{v}_0 .$$

Moltiplicando scalarmente queste due equazioni per  $\mathbf{s}_n$  e ricordando che i vettori  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$  formano una base ortonormale si ottiene la (8.43). Q.E.D.

## 8.5 La corda come limite continuo della catena

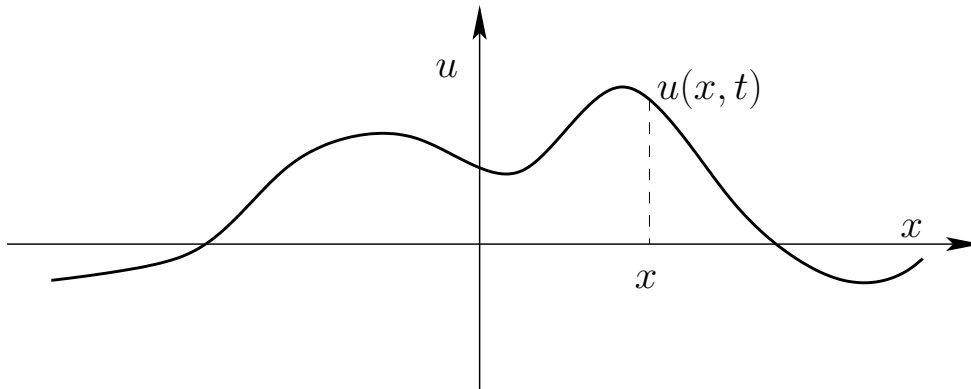
Vediamo ora come partendo dalle equazioni (8.31) della catena lineare si possano dedurre le equazioni per una corda tesa, rappresentata idealmente come un continuo di dimensione uno. Ricaveremo poi anche la forma delle soluzioni. Qui vediamo un modo per mettere in atto un *passaggio al continuo*, ossia per passare dalle equazioni di un sistema composto da un numero finito, sia pur molto grande, di punti materiali a un sistema pensato come un continuo di punti.

Il problema del moto di una corda presenta connessioni molto strette con quello della propagazione del suono, o più genericamente di un'onda di pressione. Quest'ultimo problema era già stato affrontato da Newton,<sup>25</sup> che ne aveva anche suggerito una soluzione costruita con ragionamenti euristici, ma considerata poco rigorosa se non contraddittoria da Eulero e Lagrange. L'equazione (8.46), solitamente detta *equazione di D'Alembert*, è stata dedotta indipendentemente da Eulero e D'Alembert.<sup>[13][14]</sup> A questi autori dobbiamo anche i primi tentativi di scriverne la soluzione trattando il problema in termini analitici, e in particolare fu D'Alembert a descrivere la propagazione di onde lungo la corda e a discuterne in dettaglio l'applicazione al caso di una corda tesa tra due punti fissi. Di questa soluzione discuteremo nel paragrafo 8.5.2, seguendo però uno schema diverso da quello originale di D'Alembert, e decisamente più sintetico.<sup>26</sup>

Il procedimento deduttivo che seguiremo nel prossimo paragrafo è stato ideato da Lagrange, che lo pubblicò in due corpose memorie<sup>[39][40]</sup> stampate nel 1759 e nel 1760.

<sup>25</sup> *Principia, Liber II, Sectio II*

<sup>26</sup> Si deve osservare a questo proposito che nella seconda metà del secolo XVIII, quando i tre autori citati sviluppavano le loro ricerche, non erano ancora stati completamente formalizzati concetti quali il problema ai dati iniziali (o di Cauchy), la rappresentazione in serie di Fourier di funzioni periodiche, la convergenza delle serie. Seguire in dettaglio gli argomenti di Eulero, D'Alembert e Lagrange è materia alquanto interessante e rappresentativa di come concetti che per noi oggi sono così familiari da sembrare quasi ovvii abbiano invece richiesto un lungo periodo di maturazione. Ma non è possibile, in queste note, dedicare all'argomento tutto lo spazio che meriterebbe.



**Figura 8.9.** La corda continua descritta come funzione  $u(x, t)$ .

È in queste memorie che compare per la prima volta la scomposizione in modi normali per la catena lineare che abbiamo dedotto nel paragrafo precedente e lo stesso tipo di scomposizione per il caso di una corda omogenea con estremi fissi che ben rappresenta, sia pure nell'approssimazione delle equazioni lineari, la corda di uno strumento musicale quale un clavicembalo, un pianoforte o una chitarra.<sup>27</sup> Alla soluzione di Lagrange per la corda con estremi fissi dedicheremo il paragrafo 8.5.5.

#### 8.5.1 L'equazione della corda

Riprendiamo dunque in considerazione il modello discreto descritto dalle equazioni (8.31), che riscriviamo per comodità come

$$(8.44) \quad m\ddot{u}_j = \kappa(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) \quad , \quad j = 1, \dots, N \quad ,$$

avendo sostituito lo spostamento  $x$  dall'equilibrio con  $u$ , il che risulterà utile tra poco.

Supponiamo che il punti materiali che costituiscono la catena si addensino pur mantenendo costante la massa totale compresa in un piccolo tratto della catena stessa, sicché il numero  $N$  di punti tende all'infinito e i punti stessi tendono a formare un continuo.

Osserviamo anzitutto che diventa di fatto impossibile, o almeno alquanto disagiata, numerare i punti della corda con un indice discreto, sicché risulterà più conveniente introdurre un indice continuo. Precisamente, consideriamo una retta e immaginiamo la corda distesa su quella retta, senza preoccuparci del fatto che ciò equivale a considerare una corda di lunghezza infinita, e descriviamo ciascun punto della corda con la sua coordinata  $x$  sulla retta.

Supponiamo ora che la corda possa muoversi, ma con la condizione che ciascun punto possa spostarsi solo in direzione verticale, sicché la configurazione della

---

<sup>27</sup> In effetti in queste memorie Lagrange scrive la soluzione per il caso di estremi fissi sotto forma di uno sviluppo di Fourier. È curioso osservare che già Taylor aveva ideato una forma simile appoggiandosi alla forma della cicloide, mentre Jean Bernoulli aveva scritto le soluzioni particolari che noi oggi chiamiamo modi normali, ma senza darne alcuna giustificazione rigorosa.

corda potrà rappresentarsi, a un tempo fissato, mediante una funzione  $u(x, t)$  che dà lo scostamento del punto  $x$  della corda rispetto all'asse  $x$ , come rappresentato in figura 8.9. Supporremo che la funzione  $u(x, t)$  sia differenziabile almeno due volte. Ciò corrisponde proprio a sostituire l'indice discreto  $j$  dell'equazione (8.44) con un indice continuo  $x$ .

Ci proponiamo di scrivere un'equazione per la funzione  $u(x, t)$ . Supponiamo di far tendere all'infinito il numero  $N$  di particelle in modo che siano soddisfatte le ipotesi seguenti.<sup>28</sup>

- (i) il rapporto  $\varrho = m/d$  resta costante; questo definisce la *densità*  $\varrho$  della corda, ossia la massa per unità di lunghezza che risulta essere indipendente da  $x$ .
- (ii) il prodotto  $\tau = \kappa d$  resta costante; questo definisce la *tensione* della corda, che risulta anch'essa indipendente da  $x$ .

Riscriviamo ora l'equazione (8.44) dividendo per  $d$  in primo membro e moltiplicando

<sup>28</sup> Qui introduciamo i concetti di *densità* e *tensione*, che sostituiscono i parametri di massa e costante elastica delle molle. La definizione della *densità* come  $\varrho = m/d$  si impone in modo naturale come rapporto tra la massa di un piccolo tratto di corda e la sua lunghezza quando si supponga che la distribuzione di materia nella corda sia continua. Verrebbe spontaneo definire la densità come il limite di tale rapporto quando la lunghezza del tratto di corda tende a zero, e quindi in buona sostanza come una derivata. Ma con un attimo di riflessione si comprende immediatamente che tale procedimento è in aperta contraddizione con la struttura atomica della materia ormai definitivamente ammessa. In effetti se, in modo ancora ingenuo, pensassimo alla massa dell'atomo come concentrata in un nucleo praticamente puntiforme, un tal processo di limite condurrebbe a una funzione che si annulla quasi dappertutto, divenendo infinita solo nei punti in cui è localizzato il nucleo atomico. Se invece cercassimo di interpretare il procedimento alla luce della teoria quantistica, che in pratica nega la possibilità di conoscere esattamente la posizione di un nucleo, allora il processo di limite diventerebbe di fatto impossibile. È quindi inevitabile considerare la densità di una corda reale come rapporto tra massa e lunghezza considerando un tratto di corda tanto piccolo che la distribuzione di materia al suo interno possa praticamente considerarsi come costante, ma non così piccolo da essere paragonabile con le dimensioni atomiche. Su tale approssimazione si fonda tutta la teoria dei continui, che in pratica si riconduce ad *assumere* che si possa definire una densità che è l'analogo della massa per i corpi puntiformi. Venendo alla tensione, possiamo interpretarne il significato immaginando di tagliare la corda in un punto qualsiasi. Una tal operazione permetterebbe ai due tratti di corda destro e sinistro di muoversi indipendentemente l'uno dall'altro — ciò che osserviamo comunemente tutte le volte che tagliamo davvero una corda. Ora, il fatto che i due estremi debbano coincidere può interpretarsi come un vincolo, e quindi, nello spirito che abbiamo fin qui mantenuto, può attribuirsi all'esistenza di una forza che ciascun estremo esercita sull'altro. Se poi vogliamo mantenere lo schema delle forze di tipo classico allora sembra spontaneo ammettere che le due forze che agiscono sui due estremi siano eguali e contrarie, e inoltre agiscono in direzione tangente alla corda stessa. In realtà mentre l'applicazione del principio di azione e reazione è coerente, la seconda affermazione costituisce un'ipotesi non banale, che qui assumeremo: nella teoria dei mezzi continui si introducono anche forze trasversali e momenti di torsione che nel nostro modello non consideriamo. Assumendo dunque

il secondo per  $d/d^2$ , e riordinando il secondo membro nella forma

$$(8.45) \quad \frac{m}{d} \ddot{u}_j = \frac{\tau}{d} \left( \frac{u_{j-1} - u_j}{d} - \frac{u_j - u_{j+1}}{d} \right) .$$

Ora, identificando la  $j$ -esima particella con il punto  $x = jd$  della corda possiamo dire

$$\frac{u_{j-1} - u_j}{d} = \frac{u(x-d) - u(x)}{d} \simeq - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x-\frac{d}{2}} ,$$

il che equivale ad approssimare la derivata nel punto intermedio con il rapporto incrementale a  $t$  costante. In modo analogo ricaviamo

$$\frac{u_j - u_{j+1}}{d} = \frac{u(x) - u(x+d)}{d} \simeq - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\frac{d}{2}} ,$$

e sostituendo nel secondo membro dell'equazione (8.45) abbiamo

$$\frac{\tau}{d} \left( \frac{u_{j-1} - u_j}{d} - \frac{u_j - u_{j+1}}{d} \right) \simeq - \frac{\tau}{d} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x-\frac{d}{2}} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\frac{d}{2}} \right) \simeq \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_x$$

Riscriviamo ora il primo membro osservando che la derivata temporale della funzione  $u(x, t)$  deve calcolarsi pensando al punto  $x$  della corda come fissato, e quindi diventa una derivata parziale. Sostituiamo poi  $m/d$  con la densità  $\rho$ , e otteniamo l'equazione della corda, più spesso chiamata equazione di D'Alembert

$$(8.46) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 , \quad c^2 = \frac{\tau}{\rho} .$$

### 8.5.2 La soluzione di D'Alembert

Veniamo ora alla ricerca delle soluzioni dell'equazione (8.46). Osserviamo anzitutto che si tratta di un'equazione lineare, ovvero che se  $u_1(x, t)$  e  $u_2(x, t)$  sono due soluzioni, allora anche  $u(x, t) = au_1(x, t) + bu_2(x, t)$  sono soluzioni. Ciò si verifica con un semplice calcolo. Infatti si ha

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(au_1 + bu_2) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(au_1 + bu_2) = a \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) + b \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) = 0$$

perché il contenuto di ciascuna delle due parentesi è nullo, essendo  $u_1$  ed  $u_2$  soluzioni.

**Proposizione 8.11:** *La soluzione generale dell'equazione di D'Alembert (8.46) ha la forma*

$$(8.47) \quad u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) ,$$

dove  $f$  e  $g$  sono funzioni arbitrarie dei loro argomenti.

che la tensione agisca in direzione tangente alla corda possiamo ricondurne l'intensità al prodotto  $\kappa d$ . Ciò diventa naturale se si pensa alla costante  $\kappa$  di elasticità di una molla come forza per unità di lunghezza, e quindi si stabilisce la relazione  $\kappa = \tau/d$  tra costante di elasticità e tensione, pensando in qualche senso a un procedimento di limite simile a quello svolto per la densità — e con tutti gli stessi difetti.

Discuteremo più avanti del problema delle regolarità delle funzioni  $f$  e  $g$ .

**Dimostrazione.** Introduciamo il cambiamento di variabili

$$(8.48) \quad \xi = x - ct, \quad \eta = x + ct.$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial \xi} + c \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Con un calcolo analogo otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (8.47) trasformiamo l'equazione in

$$(8.49) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

La soluzione generale di questa equazione è

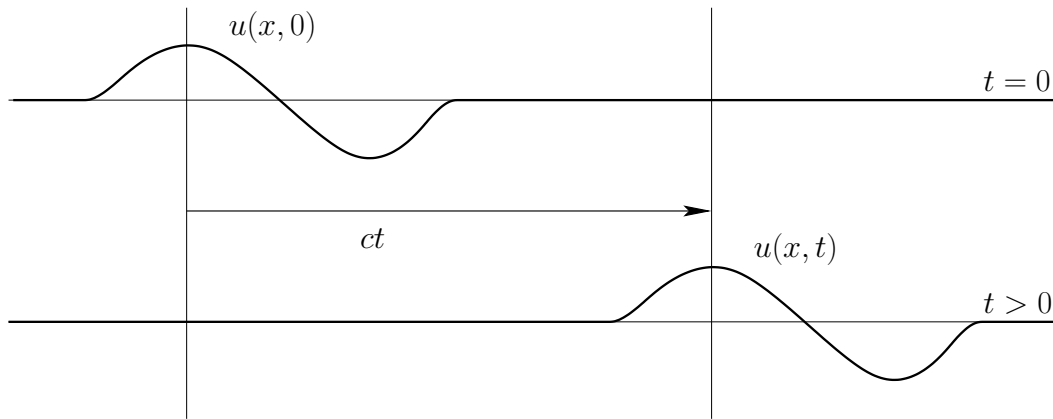
$$(8.50) \quad u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

con  $f$  e  $g$  funzioni arbitrarie. Infatti riscrivendo l'equazione come  $\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0$  si conclude subito che  $\frac{\partial u}{\partial \eta}$  deve essere funzione della sola variabile  $\eta$ , e del resto arbitraria. Quindi qualunque funzione (differenziabile)  $g(\eta)$  è soluzione. Analogamente  $\frac{\partial u}{\partial \xi}$  deve essere funzione della sola variabile  $\xi$ , e da qui si ricava che qualunque funzione (differenziabile)  $f(\xi)$  è soluzione. Per linearità, si conclude che qualunque funzione della forma (8.50) è certamente soluzione. D'altra parte si vede subito che una funzione  $u(\xi, \eta)$  non scomponibile nella forma (8.50) viola almeno una delle proprietà che  $\frac{\partial u}{\partial \eta}$  sia indipendente da  $x$  e che  $\frac{\partial u}{\partial \xi}$  sia indipendente da  $\eta$ , sicché la (8.50) è la soluzione generale della (8.49). Tornando alle variabili  $x, t$  mediante la trasformazione (8.48) si ottiene la soluzione generale dell'enunciato. Q.E.D.

### 8.5.3 Propagazione di onde lungo la corda e fenomeni di riflessione

Soffermiamoci un momento sul significato della soluzione generale di D'Alembert.

Consideriamo in un primo tempo una corda di estensione infinita, e supponiamo che il suo movimento sia descritto da una funzione  $u(x, t) = f(x - ct)$ , ossia che si abbia  $g(x + ct) = 0$ . Vogliamo mostrare che questa soluzione descrive *la propagazione lungo la corda di una deformazione che avanza in direzione positiva con velocità  $c$ , mantenendo inalterata la sua forma.*



**Figura 8.10.** La propagazione di un'onda sulla corda.

Un primo modo per convincersi richiede di prestare un momento di attenzione alle due formule

$$u(x, 0) = f(x) , \quad u(x, t) = f(x - ct) .$$

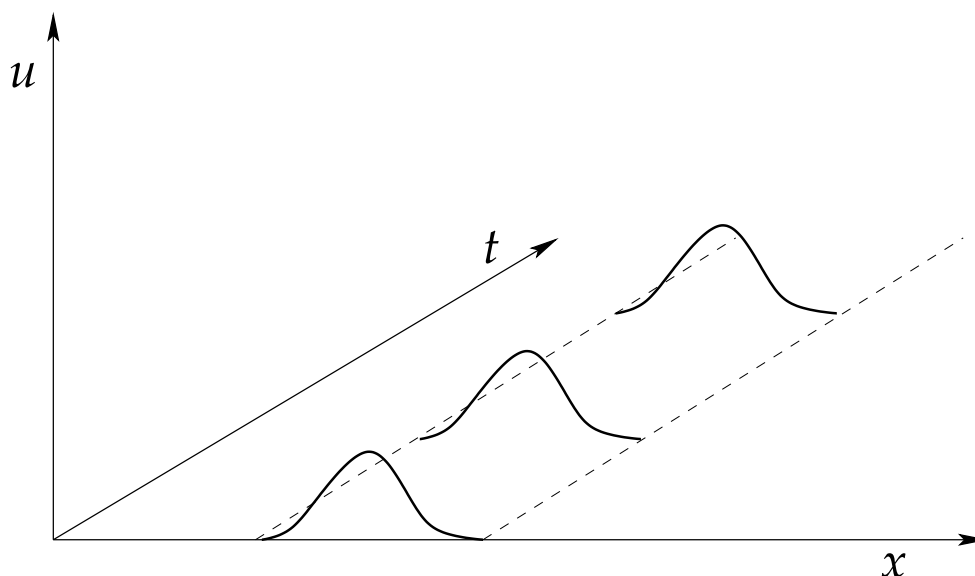
L'argomento è illustrato in figura 8.10. La prima formula ha significato ovvio: al tempo  $t = 0$  la della corda è descritta dalla funzione  $f(x)$ . La seconda va letta nel senso che al tempo  $t$  la quota della corda nel punto  $x$  si ottiene trasportando in  $x$  la quota che la corda aveva al tempo  $t = 0$  nel punto  $x - ct$ , e ciò per ciascun punto  $x$ . Dunque, la forma della corda viene tralata rigidamente di un tratto  $ct$ . Questo è quanto affermato.

Un secondo modo consiste nel considerare  $u(x, t)$  come funzione di due variabili definita sul piano  $t, x$ , sicché la configurazione della corda al tempo  $t$  si ottiene considerando i valori della funzione sulla retta orizzontale corrispondente a  $t$  fissato. Si osserva allora che la quota della corda è la stessa in tutti i punti della retta  $x = ct + a$ , qualunque sia  $a$ , il che corrisponde proprio ad una traslazione rigida della forma della corda, come illustrato in figura 8.11.

Con un attimo di riflessione si comprende poi che la soluzione  $u(x, t) = g(x + ct)$  rappresenta una deformazione che avanza in direzione negativa, o equivalentemente con velocità  $-c$ , sempre mantenendo inalterata la sua forma. Le linee (in questo caso rette)  $x \pm ct$  lungo le quali si propaga la deformazione (o l'onda, o il segnale) vengono dette *caratteristiche*.

La soluzione completa si presenta dunque come la sovrapposizione di due movimenti distinti: una forma arbitraria che avanza in direzione positiva e una seconda forma che avanza in direzione negativa. È particolarmente istruttivo considerare la situazione illustrata in figura 8.12, in cui si hanno due deformazioni localizzate che avanzano in direzioni opposte, mentre il resto della corda è a riposo. Le due deformazioni si attraversano senza interagire, sicché dopo l'attraversamento ciascuna delle due continua a propagarsi mantenendo la sua forma iniziale, come se nulla fosse accaduto.

Veniamo ora al fenomeno della riflessione. Supponiamo che un estremo della corda sia fissato, ad esempio l'estremo destro, e che la corda sia infinita a sinistra. Ciò induce



**Figura 8.11.** La propagazione di un'onda lungo le caratteristiche dell'equazione di D'Alembert.

a considerare solo  $x \leq 0$ , e ad imporre la *condizione al contorno*

$$(8.51) \quad u(0, t) = 0 \quad \forall t .$$

Imponendo questa condizione nella soluzione generale di D'Alembert abbiamo  $u(0, t) = f(-ct) + g(ct) = 0$ , e dunque deve essere  $g(s) = -f(-s)$  per ogni  $s$ . Ricaviamo così

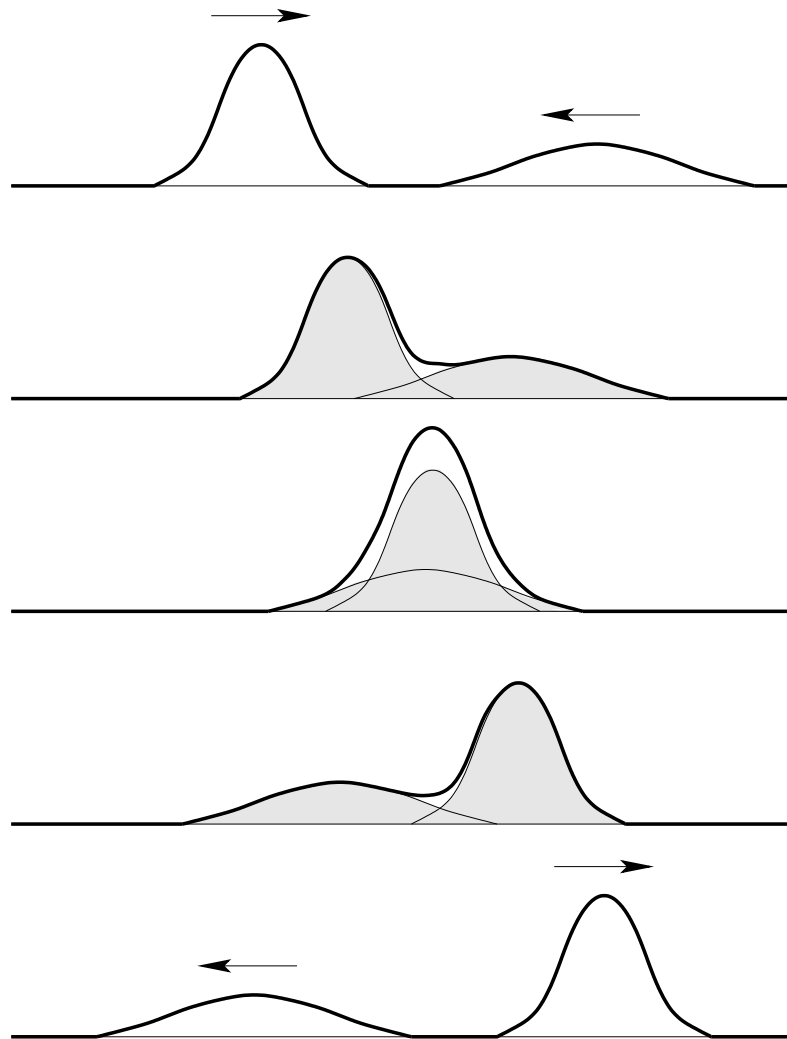
$$u(x, t) = f(x - ct) - f(-x - ct) ,$$

che è la soluzione generale dell'equazione della corda con la condizione al contorno (8.51). Possiamo interpretare questa soluzione nel modo seguente, aiutandoci con la figura 8.13. Supponiamo che sulla corda vi sia un'onda in forma di deformazione localizzata che avanza in direzione positiva. Immaginiamo di prolungare indefinitamente la corda anche a destra, e associamo alla prima onda una seconda, puramente virtuale, che è localizzata sulla parte destra della corda e avanza in direzione negativa. L'onda a destra è ottenuta da quella sinistra per rotazione di un angolo piatto rispetto all'origine. Nel momento in cui le due deformazioni raggiungono l'estremo fisso  $x = 0$  esse si sovrappongono, e i loro ruoli si scambiano, sicché dopo un breve intervallo di tempo si ha un'onda rovesciata che si propaga verso sinistra. Questa è l'onda riflessa.

La descrizione che abbiamo dato può generalizzarsi al caso di una corda che abbia due estremi fissi. In tale situazione si potrà verificare il fenomeno di un'onda localizzata che si riflette successivamente tra i due estremi, con un movimento periodico di va e vieni.

**Esercizio 8.3:** Descrivere il movimento della corda con estremi fissi estendendo virtualmente la corda all'infinito come abbiamo fatto nel caso della riflessione.

Suggerimento: Si dovranno introdurre funzioni periodiche.



**Figura 8.12.** Attraversamento senza interazione tra due deformazioni localizzate che si propagano in direzioni opposte.

#### 8.5.4 Il problema di Cauchy per la corda infinita

Veniamo ora alle condizioni iniziali, affrontando il problema di Cauchy per la corda. Il problema si pone in modo del tutto analogo al caso di un sistema di punti. Supponiamo che all'istante  $t = 0$  sia assegnata la configurazione della corda, che rappresentiamo con una funzione  $u_0(x)$ , e la velocità di tutti i suoi punti, che rappresentiamo come una funzione  $v_0(x)$ . Ci si chiede quale sia il movimento della corda.

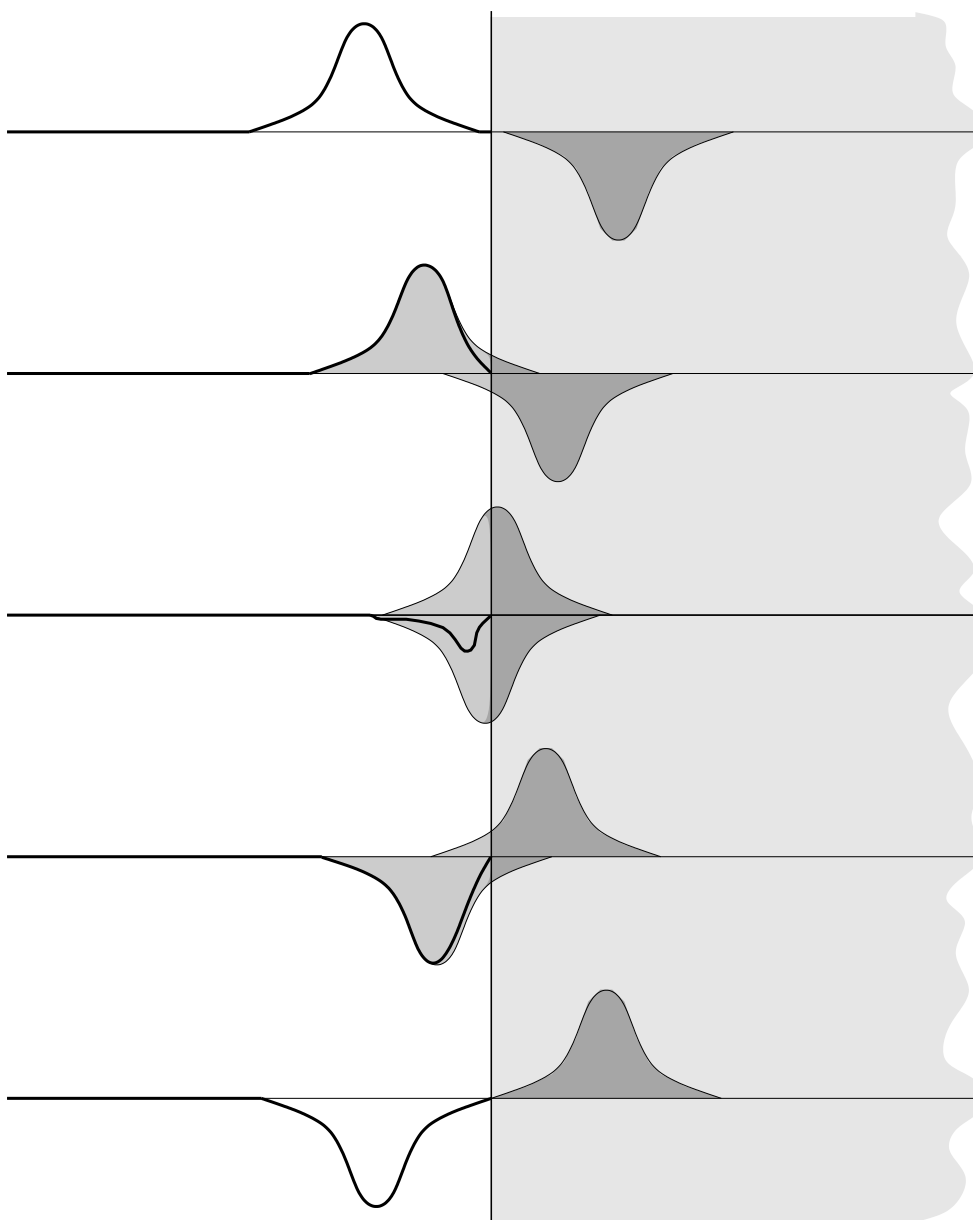
**Proposizione 8.12:** *Il problema di Cauchy per l'equazione di D'Alembert*

$$(8.52) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$$

ammette la soluzione unica

$$(8.53) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x - ct) + u_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds .$$





**Figura 8.13.** Riflessione di un'onda a un estremo fisso della corda.

**Dimostrazione.** Si devono determinare le funzioni  $f$  e  $g$  che compaiono nella forma generale della proposizione 8.11. A tal fine riscriviamo le condizioni iniziali della (8.52) come

$$f(x) + g(x) = u_0(x) , \quad c[-f'(x) + g'(x)] = v_0(x) ,$$

avendo denotato con  $f'$  e  $g'$  le derivate delle funzioni  $f$  e  $g$  rispetto al loro argomento. Integrando la seconda equazione si ricava immediatamente il sistema

$$f(x) + g(x) = u_0(x) , \quad -f(x) + g(x) = \frac{1}{c} \int_a^x v_0(s) ds ,$$

dove  $a$  è un punto arbitrario. Sommando e sottraendo si calcola poi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_a^x v_0(s) ds \\ g(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_a^x v_0(s) ds \end{aligned}$$

Questo determina la forma delle funzioni  $f$  e  $g$ , e possiamo sostituirle nella soluzione generale sostituendo l'argomento  $x \pm ct$  nel modo appropriato. Osservando che vale

$$-\int_a^{x-ct} v_0(s) ds + \int_a^{x+ct} v_0(s) ds = \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds$$

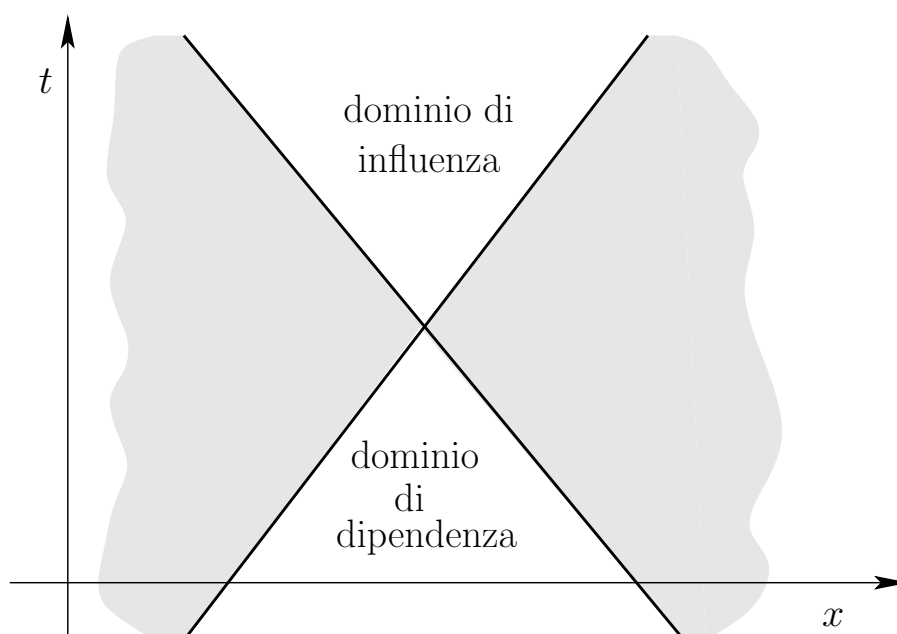
si ricava la soluzione (8.53).

*Q.E.D.*

Soffermiamoci ancora un momento a riflettere sulla forma generale della soluzione ricorrendo alla rappresentazione sul piano  $x, t$ . Consideriamo per un momento il solo contributo di  $u_0(x)$ , il che equivale a supporre che inizialmente la velocità sia nulla. Scriveremo allora  $u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x - ct) + u_0(x + ct)]$ . Questa formula dice che la quota della corda nel punto  $x$  al tempo  $t = 0$  si propaga, equamente divisa, lungo le rette  $x \pm ct$ , che sono le *caratteristiche* dell'equazione di D'Alembert. Con un attimo di riflessione si vede che questo può affermarsi per ogni punto  $x$  e per ogni tempo  $t$  (la scelta dell'istante iniziale è del tutto arbitraria). Se invece supponiamo  $u_0(x) = 0$  e consideriamo la sola velocità  $v_0(x)$  allora, scrivendo  $u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds$ , vediamo che il valore della funzione nel punto  $(x, t)$  viene influenzato dai valori di  $v_0(x)$  al tempo  $t = 0$  nell'intervallo  $[x - ct, x + ct]$ . Anche qui, la scelta di  $t = 0$  come istante iniziale è del tutto arbitraria.

La soluzione generale è la sovrapposizione dei due termini dipendenti dalla configurazione e dalla velocità iniziale. Ciò conduce in modo naturale alla rappresentazione illustrata in figura 8.14. Il valore della funzione  $u(x, t)$  in un punto  $(x, t)$  arbitrario viene determinato da quello assunto dalla funzione  $u$  in tutti i punti delle caratteristiche ai tempi precedenti, e dal valore della derivata temporale  $\frac{\partial u}{\partial t}$  in tutti i punti interni al settore determinato dalle caratteristiche, sempre ai tempi precedenti. Se invece consideriamo i tempi successivi a  $t$ , allora  $u(x, t)$  determina quello di  $u(x, t')$  sulle caratteristiche, e la sua velocità  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$  determina il valore di  $u(x, t')$  in tutti i punti interni al settore delimitato dalle caratteristiche. Si comprende così il nome di *dominio di influenza* e *dominio di dipendenza* dato a due settori determinati dalle caratteristiche passanti per  $x, t$ , come rappresentato in figura. Tutti i punti esterni a tali settori, in grigio nella figura, non hanno influenza su  $u(x, t)$ , e non ne vengono influenzati.

Aggiungiamo una nota finale sulla regolarità delle funzioni. La scrittura dell'equazione di D'Alembert impone in modo naturale che si considerino funzioni di classe  $C^2$ . Tale restrizione dovrebbe imporsi anche ai dati iniziali, chiedendo che  $u_0(x)$  sia di classe  $C^2$  mentre  $v_0(x)$  dovrebbe essere di classe  $C^1$ . D'altra parte la soluzione scritta nella forma (8.53) non perde significato anche se si impongono restrizioni molto più deboli, ad esempio che  $u_0(x)$  sia continua, mentre per  $v_0(x)$  non è strettamente necessario



**Figura 8.14.** Il dominio di dipendenza e il dominio di influenza per l'equazione di D'Alembert.

imporre neppure la continuità. Tali condizioni diventano significative, ad esempio, se si considera la corda di una chitarra o di un clavicembalo, che viene pizzicata. In tal caso diventa spontaneo approssimare i dati iniziali con una configurazione “a triangolo” della corda, e velocità nulla. Analogamente, se si pensa alla corda di un pianoforte percossa dal martelletto si possono approssimare i dati iniziali dicendo che  $u_0(x)$  si annulla e attribuendo una velocità finita al solo punto colpito dal martelletto, con velocità nulla su tutto il resto della corda. In certe situazioni diventa utile anche considerare configurazioni iniziali discontinue. Questo argomento conduce in modo naturale a considerare *soluzioni in senso generalizzato* quelle ottenute da dati iniziali non regolari, per le quali la formula (8.53) mantiene significato anche se cadono i requisiti di differenziabilità.

### 8.5.5 La corda con estremi fissi e la soluzione di Lagrange

Consideriamo ora il caso particolarmente interessante di una corda che abbia due estremi fissi. Abbiamo già osservato che la soluzione di D'Alembert si applica anche a questo caso, ma è ancor più interessante considerare la forma delle soluzioni scoperta da Lagrange. La condizione che gli estremi siano fissi si concretizza nell'imporre che le soluzioni soddisfino  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ , dove  $L$  è la lunghezza della corda.

Procediamo anzitutto in modo euristico, seguendo Lagrange. Riprendiamo le soluzioni (8.32) che abbiamo trovato per il modello discreto, che riscriviamo per comodità in forma di poco modificata denotando con  $u$  la quota della corda e separando la dipendenza temporale in una funzione  $q_k(t)$  ove compaiono in modo esplicito i

termini in seno e coseno, ossia

$$(8.54) \quad u_j(t) = q_n(t) \sin \frac{jn\pi}{N+1}, \quad q_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t), \quad j = 1, \dots, N,$$

e ricordiamo che

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{\kappa}{m}} \sin \frac{n\pi}{2(N+1)}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Supponiamo ora di passare al limite di infinite particelle mantenendo lo schema che ci ha permesso di dedurre l'equazione. Avendo fissato la lunghezza  $L$  della corda, avremo che le particelle si trovano a distanza  $d = L/(N+1)$  e che la particella  $j$ -esima occupa la posizione  $x = jd$ . Ricordiamo inoltre che abbiamo introdotto la densità della corda ponendo  $m = \rho d$  e la tensione ponendo  $k = \tau/d$ . Sostituendo nell'espressione di  $\omega_n$  abbiamo

$$(8.55) \quad \omega_n = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \sin \frac{n\pi d}{2L} \xrightarrow{d \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \frac{n\pi}{L}, \quad n \geq 1.$$

D'altra parte abbiamo anche

$$\sin \frac{jn\pi}{N+1} = \sin \frac{jdn\pi}{L} = \sin \frac{n\pi x}{L},$$

sicché è spontaneo congetturare che l'equazione per la corda continua ammetta la famiglia di soluzioni

$$(8.56) \quad u_n(x, t) = q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

con  $q_n(t)$  dato dalla (8.54) e  $\omega_n$  dato dalla (8.55). Sostituendo anche la velocità di propagazione della corda  $c = \sqrt{\tau/\rho}$  si ha allora la

**Proposizione 8.13:** *L'equazione di D'Alembert per una corda di lunghezza  $L$  con estremi fissi*

$$(8.57) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(0, t) = u(L, t) = 0$$

*ammette la famiglia numerabile di soluzioni linearmente indipendenti*

$$(8.58) \quad u_n(x, t) = s_n(x) q_n(t)$$

dove

$$(8.59) \quad s_n(x) = \sin k_n x, \quad q_n(t) = a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t,$$

con

$$(8.60) \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \omega_n = k_n c,$$

e  $a_n, b_n$  sono costanti arbitrarie.

**Dimostrazione.** Basta verificare direttamente per sostituzione nell'equazione. Si ha

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = -\omega_n^2 q_n(t), \quad \frac{d^2 s_n}{dx^2} = -k_n^2 s_n(x),$$

e sostituendo nell'equazione si calcola

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = s_n(x) \frac{d^2 q_n}{dt^2} - c^2 \frac{d^2 s_n}{dx^2} q_n(t) = (-\omega_n^2 + k_n^2 c^2) s_n(x) q_n(t) = 0$$

in virtù della relazione (8.60) tra  $k_n$  e  $\omega_n$ .

Q.E.D.

**Esercizio 8.4:** Mostrare che le soluzioni trovate possono scriversi nella forma  $u_n(x, t) = f_n(x - ct) + g_n(x + ct)$  pur di definire opportunamente le funzioni  $f$  e  $g$ .

Avendo costruito una famiglia di soluzioni linearmente indipendenti se ne possono costruire altre sommando quelle note, ed eventualmente costruendo la somma infinita, o *serie di Fourier*,

$$(8.61) \quad u(x, t) = \sum_{n>0} u_n(x, t) .$$

Nel caso di somma infinita dovremo però stabilire se l'espressione scritta abbia significato e sia effettivamente soluzione studiando la convergenza della serie e la correttezza della derivazione sotto il segno di somma.

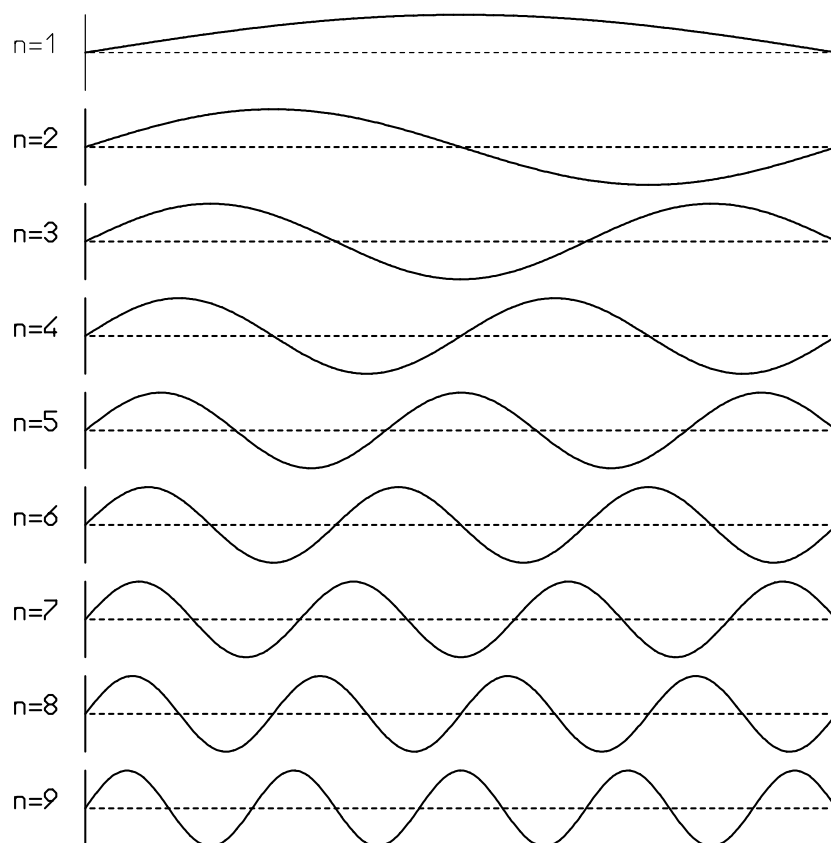
Le soluzioni  $u_n(x, t)$  vengono detti *modi normali* o talvolta *modi di Fourier*. Il significato è del tutto analogo a quello dei modi normali della corda, con alcuni aspetti significativi.

Il primo aspetto che si nota immediatamente è che i modi normali sono diventati un'infinità numerabile. Durante il moto secondo uno di questi modi la corda assume sempre una forma sinusoidale, come rappresentato in figura 8.15. Il modo  $n$ -esimo di vibrazione presenta  $n - 1$  punti che restano fissi, detti *nodi*, mentre i tratti di corda tra due nodi si muovono in modo sincrono formando dei *ventri* che oscillano secondo le leggi del moto armonico.

Il secondo aspetto riguarda lo *spettro* delle frequenze: la corda ha una *frequenza fondamentale*  $\omega_1 = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \frac{\pi}{L}$ , e tutte le altre frequenze sono multiple di questa. Si tratta di una proprietà rilevante, che costituisce il punto di partenza dell'armonia musicale e della spiegazione del timbro dei vari strumenti proprio in conseguenza della presenza o della particolare intensità di determinate armoniche (modi superiori al primo). È proprio la combinazione di modi infatti che rende distinguibile, ad esempio, il suono di un violino da quello di un flauto o di un clarinetto.<sup>29</sup>

---

<sup>29</sup> Gran parte dell'armonia musicale tende a sottolineare solo le combinazioni di armoniche che formano i diversi timbri, assumendo in modo tacito che il peso relativo di ciascuna armonica resti costante per tutta la durata del suono. La realtà è ben diversa: il modello di corda lineare che discutiamo qui è ammirevole per la sua eleganza, ma non possiamo ignorare che si tratta solo di una prima approssimazione, analoga a quella che si introduce descrivendo il moto di un sistema oscillante reale con l'approssimazione armonica. I sistemi veri sono anzitutto non lineari, e nel caso degli strumenti musicali non si può dimenticare l'attrito. Ad esempio, il suono emesso dalla corda di un pianoforte o di un clavicembalo si smorza più o meno rapidamente. Nel caso di strumenti ad arco poi non sarebbe neppure possibile estrarre un suono prolungato senza l'attrito dell'archetto



**Figura 8.15.** I primi 9 modi della corda con estremi fissi.

### 8.5.6 Il problema di Cauchy per la corda con estremi fissi

Vediamo ora come si possa risolvere il *problema di Cauchy*. A tal fine imponiamo, accanto alla condizione di estremi fissi, anche le condizioni iniziali  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$ , analogamente a quanto abbiamo fatto per la corda infinita, con la sola differenza che qui dobbiamo restringerci all'intervallo  $x \in [0, L]$ .

Procediamo anche qui partendo dalle soluzioni del sistema discreto che abbiamo discusso nel paragrafo 8.4.4 e passando al continuo. Ricordiamo che in quel caso si fa uso della proprietà di ortonormalità della base degli autovettori  $\mathbf{s}_n$  definiti dalla (8.42). Nel continuo si fa uso della stessa proprietà, ma questo richiede di definire in qualche modo un prodotto scalare sulle funzioni continue. Ciò richiede l'introduzione di alcuni elementi di analisi funzionale.

Se abbiamo due vettori  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  nello spazio  $\mathbb{R}^N$  sappiamo calcolare il prodotto scalare  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \sum_{j=1}^N f_j g_j$ , e diciamo che i due vettori sono ortogonali se  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = 0$ . Nel caso continuo abbiamo sostituito l'indice discreto  $j$  con una variabile continua  $x$ , sicché ai vettori  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  dobbiamo sostituire due funzioni reali  $f(x)$ ,  $g(x)$  che pensiamo

---

sulla corda. Inoltre la non linearità provoca un continuo scambio di energia tra i vari modi, che con il fluire del tempo acquistano o perdono peso inducendo una variazione del timbro magari poco percettibile all'orecchio, ma decisamente determinante per la nostra percezione di un suono come ricco e bello oppure come povero e banale.

definite su tutto l'asse reale o, come nel caso che qui ci interessa, su un intervallo chiuso  $[0, L]$ . Osserviamo che anche per le funzioni valgono le proprietà che conosciamo per gli spazi vettoriali: la moltiplicazione di un vettore  $\mathbf{f}$  per un numero reale  $\alpha$  si estende alle funzioni definendo<sup>30</sup>  $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ ; possiamo sommare le funzioni  $f$  e  $g$  definendo  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ; possiamo combinare linearmente le funzioni  $f, g$  definendo  $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ ; tutte queste operazioni soddisfano le proprietà soddisfatte dalle analoghe operazioni sullo spazio  $\mathbb{R}^N$ . L'estensione del prodotto scalare si ottiene trasformando la somma discreta in continua, ossia definendo, con la notazione consueta  $(\cdot, \cdot)$  per il prodotto scalare sugli spazi funzionali,<sup>31</sup>

$$(8.62) \quad (f, g) = \int_0^L f(x)g(x) dx .$$

Si verifica che questa operazione ha effettivamente le stesse proprietà del prodotto scalare, ossia è bilineare, simmetrica e definita positiva. È quindi lecito parlare di ortogonalità tra funzioni, esattamente come si parla di ortogonalità tra vettori di  $\mathbb{R}^N$ .

Tornando al problema della corda, nel caso discreto abbiamo introdotto la base  $\mathbf{s}_n$  dei modi normali. Nel caso continuo l'estensione naturale di questa base dovrebbe essere costituita dalle funzioni  $s_n(x)$  definite nella proposizione 8.13, ma dobbiamo verificare le proprietà di ortogonalità, ed eventualmente introdurre una normalizzazione.

**Lemma 8.14:** *Le funzioni  $\tilde{s}_n(x) = \sin(n\pi x/L)$  sono ortogonali rispetto al prodotto scalare (8.62), e si ha*

$$(8.63) \quad (\tilde{s}_n, \tilde{s}_m) = \delta_{n,m} \frac{L}{2} ,$$

dove  $\delta_{n,m}$  è il simbolo di Kronecker.

**Dimostrazione.** Per  $n \neq m$  si fa uso della formula di prostaferesi

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] ,$$

<sup>30</sup> La formula deve leggersi così: la nuova funzione denotata con  $\alpha f$  (a sinistra nell'egualianza) viene definita assegnandole in ciascun punto  $x$  il valore della funzione  $f(x)$  moltiplicato per  $\alpha$ , come specificato nel membro di destra. Poiché sappiamo eseguire questa seconda operazione, il membro di sinistra risulta ben definito. In modo analogo si interpretano le formule successive.

<sup>31</sup> Può essere utile soffermarsi un momento su questa espressione. La somma discreta  $\sum_{j=1}^N$  diventa una somma continua  $\int_0^L dx$  con l'indice di somma  $x$  che varia sull'intervallo  $[0, L]$ . Il prodotto  $f_j g_j$  tra le componenti viene sostituito dal prodotto puntuale  $f(x)g(x)$ . Nella definizione abbiamo supposto che le funzioni siano definite sull'intervallo chiuso  $[0, L]$ , ma si può ben considerare la stessa espressione sull'intera retta reale a patto di prendersi carico dei problemi relativi alla convergenza dell'integrale. Per questi problemi rimandiamo ai testi di analisi funzionale.

e si calcola

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} \int_0^L \cos \frac{(n-m)\pi x}{L} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \cos \frac{(n+m)\pi x}{L} dx \\ &= \frac{L}{2(n-m)\pi} \sin \frac{(n-m)\pi x}{L} \Big|_0^L - \frac{L}{2(n+m)\pi} \sin \frac{(n+m)\pi x}{L} \Big|_0^L = 0 . \end{aligned}$$

Questo giustifica il fattore  $\delta_{n,m}$  nella (8.63).

Per  $n = m$  si trova, con un calcolo analogo,

$$\int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_0^L dx + \frac{1}{2} \int_0^L \cos \frac{2\pi x}{L} dx = \frac{L}{2} ,$$

perché il secondo integrale si annulla. Questo dà il fattore  $L/2$  nella (8.63). *Q.E.D.*

Cerchiamo ora di costruire una soluzione generale per l'equazione della corda con estremi fissi sotto forma di una serie

$$(8.64) \quad u(x, t) = \sum_{n>0} s_n(x) (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) ,$$

dove

$$(8.65) \quad s_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} .$$

Un'espressione di questo tipo viene detta *serie di Fourier*. Si vede qui l'analogia completa con il caso discreto: stiamo cercando di scrivere la soluzione generale facendo uso della base ortonormale delle funzioni  $s_n(x)$ . Questa operazione però ci obbliga a prendere in considerazione due problemi.

- (i) Il fatto di considerare una somma infinita ci obbliga a precisare che significato le si debba assegnare. Qui si pone il problema di studiare la convergenza di una serie di funzioni.
- (ii) Il fatto di conoscere una famiglia numerabile di funzioni ortonormali non garantisce che essa sia effettivamente una base per lo spazio delle funzioni sull'intervallo  $[0, L]$ : occorre dimostrare che *qualunque funzione appartenente a una classe opportuna (ad esempio la classe delle funzioni continue, o differenziabili, &c) possa rappresentarsi sulla base che stiamo considerando*. Qui si pone il problema della *completezza* di una base.

Il primo dei problemi che abbiamo messo in evidenza viene solitamente affrontato nei testi di Analisi. Il secondo rientra tipicamente nei trattati di Analisi Funzionale o, per il caso che ci interessa, nei testi sulla serie di Fourier. Qui non ci addentreremo oltre in questa materia, limitandoci a dire che la serie di Fourier (8.65) è in grado di rappresentare una classe molto ampia di funzioni, che include non solo quelle continue o differenziabili, ma anche le funzioni che presentano un numero finito di discontinuità.

**Proposizione 8.15:** *L'equazione di D'Alembert per una corda di lunghezza  $L$  con estremi fissi*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 , \quad u(0, t) = u(L, t) = 0$$



e con condizioni iniziali

$$u(x, 0) = u_0(x) , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$$

ammette la soluzione

$$(8.66) \quad u(x, t) = \sum_{n>0} s_n(x)(a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

dove

$$(8.67) \quad s_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} ,$$

e le costanti  $a_n, b_n$  sono determinate calcolando

$$(8.68) \quad a_n = (s_n, u_0) , \quad b_n = \frac{1}{\omega_n} (s_n, v_0) ,$$

ovvero

$$(8.69) \quad a_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx ,$$

$$b_n = \frac{1}{\omega_n} \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L v_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx .$$

**Dimostrazione.** Si procede come nel caso discreto, ma riportiamo il calcolo per completezza. Derivando rispetto al tempo la (8.66) si ottiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \sum_{n>0} \omega_n s_n(x)(a_n \sin \omega_n t - b_n \cos \omega_n t) .$$

Ponendo  $t = 0$  si riscrivono le condizioni iniziali come

$$\sum_{j>0} a_j s_j(x) = u_0(x) , \quad \sum_{j>0} \omega_j b_j s_j(x) = v_0(x) .$$

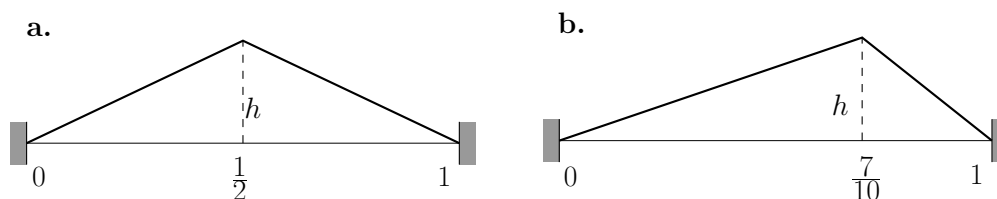
Moltiplicando scalarmente ambo i membri di queste equazioni per  $s_n(x)$  e tenendo conto dell'ortogonalità delle funzioni della base si ottiene infine

$$a_n = (s_n, u_0) , \quad \omega_n b_n = (s_n, v_0) ,$$

come asserito.

*Q.E.D.*

Come già abbiamo osservato per il caso della corda infinita, la forma delle soluzioni ha significato anche se le funzioni  $u_0(x), v_0(x)$  non sono differenziabili due volte, come sarebbe richiesto dall'equazione: ai fini delle applicazioni fisiche ci si può accontentare della continuità per  $u(x)$ , il che corrisponde a chiedere che la corda non sia spezzata,



**Figura 8.16.** Le configurazioni iniziali della corda nell'esercizio 8.5.

mentre per  $v_0(x)$  non è indispensabile neppure la continuità. Si parla anche qui di *soluzioni generalizzate*.

**Esercizio 8.5:** Determinare le soluzioni dell'equazione della corda con estremi fissi per i dati iniziali (si veda la figura 8.16, e si pensi alla corda di una chitarra pizzicata in punti diversi.)

$$\begin{aligned}
 \text{a. } u_0(x) &= \begin{cases} \frac{2h}{L}x & \text{per } 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ \frac{2h}{L}(L-x) & \text{per } \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}, \quad v_0(x) = 0; \\
 \text{b. } u_0(x) &= \begin{cases} \frac{10h}{7L}x & \text{per } 0 \leq x < \frac{7L}{10} \\ \frac{10h}{3L}(L-x) & \text{per } \frac{7L}{10} \leq x \leq L \end{cases}, \quad v_0(x) = 0.
 \end{aligned}$$