

INDICE

1	Le ellissi di Keplero	1
1.1	<i>Le leggi di Keplero</i>	2
	La prima legge (3) — La seconda legge (4) — La terza legge (6)	
1.2	<i>Sulla soluzione dell'equazione di Keplero</i>	7
	Considerazioni qualitative (8) — Il metodo di bisezione (9) — Il metodo del punto fisso (10) — Il metodo di Newton (13) — Su una formula di Lagrange per l'inversione di funzioni mediante serie (16) — Sviluppo in serie dell'eccentricità (22) — Sviluppo in serie di Fourier nell'anomalia media (23)	
1.3	<i>Gli elementi orbitali</i>	24
	Determinazione della posizione del pianeta sull'orbita (25) — Determinazione della giacitura dell'ellisse (26) — Trasformazione di coordinate (27) — Riferimenti rispetto al piano equatoriale e rispetto all'eclittica (28) — Note sul calcolo della posizione rispetto all'osservatore (30)	
2	La gravitazione di Newton	33
2.1	<i>La legge di gravitazione newtoniana</i>	33
	Dipendenza dell'accelerazione dalla distanza (34) — La terza legge di Keplero e la legge di gravitazione universale (35)	
2.2	<i>La mela e la luna</i>	37
2.3	<i>Il problema dei due corpi</i>	38
2.4	<i>Il problema del moto centrale: risultati generali</i>	39
	Conservazione del momento angolare, o legge delle aree (39) — Equazione dell'orbita (40) — Il caso di forze a simmetria radiale (42)	
2.5	<i>Il moto centrale: studio qualitativo</i>	43
	Stati legati (44) — Stati d'urto (45) — Caduta sul centro (46) — Orbite asintotiche a orbite circolari (48)	
2.6	<i>Il moto centrale: calcolo dell'orbita in casi particolarmente semplici ed interessanti</i>	49
	Il potenziale armonico (49) — Il potenziale inversamente pro-	

	porzionale al quadrato della distanza (51) — Il caso Kepleriano (54)	
2.7	<i>Potenziali con orbite chiuse</i>	58
2.8	<i>Il problema a molti corpi</i>	62
	Equazioni e leggi di conservazione (62) — Le coordinate eliocentriche e l'approssimazione Kepleriana (64)	
3	Richiami sul formalismo Hamiltoniano	67
3.1	<i>Lo spazio delle fasi e le equazioni di Hamilton</i>	67
	Parentesi di Poisson (68) — Variabili dinamiche ed integrali primi (69)	
3.2	<i>Trasformazioni canoniche</i>	75
	Trasformazioni che mantengono la forma Hamiltoniana delle equazioni. (76) — Conservazione delle parentesi di Poisson (77) — Funzioni generatrici (78) — Trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo (80)	
3.3	<i>L'equazione di Hamilton-Jacobi</i>	82
4	Sistemi integrabili	85
4.1	<i>Sistemi in involuzione</i>	86
	L'equazione alle variazioni (86) — Sistemi in involuzione e trasformazioni canoniche (88)	
4.2	<i>Il teorema di Liouville</i>	91
	Dimostrazione del teorema di Liouville (91)	
4.3	<i>Le variabili d'angolo-azione</i>	94
	Sistemi ad un grado di libertà (94) — Sistemi a più gradi di libertà (95) — Costruzione esplicita delle variabili d'angolo-azione (97)	
4.4	<i>Il teorema di Arnold-Jost ed i sistemi integrabili</i>	97
4.5	<i>Moti periodici e quasi periodici sul toro</i>	98
	Dinamica su un toro bidimensionale (98) — Il caso di dimensione superiore a 2 (101) — Sistemi anisocroni non degeneri (102) — Sistemi isocroni (103)	
4.6	<i>Le variabili di Delaunay per il moto Kepleriano</i>	104
	Costruzione dei cicli (104) — Costruzione delle variabili d'azione (107) — Le variabili angolari (112) — Relazioni tra le variabili canoniche di Delaunay e gli elementi orbitali (113) — Le variabili di Delaunay modificate (114)	

5	Il problema planetario e la funzione perturbatrice	115
5.1	<i>Hamiltoniana ed integrali primi</i>	115
	Una particolarità delle trasformazioni lineari (116)	
5.2	<i>Le coordinate eliocentriche</i>	117
	La trasformazione di coordinate (117) — Trasformazione dell'Hamiltoniana (118) — Equazioni e leggi di conservazione (120)	
5.3	<i>Le coordinate di Jacobi</i>	120
	Trasformazione dell'energia cinetica (123) — Lo sviluppo dell'energia potenziale (125) — L'Hamiltoniana in coordinate di Jacobi (127)	
5.4	<i>L'approssimazione kepleriana e la funzione perturbatrice</i>	128
	Il moto imperturbato (129) — Cenni allo sviluppo della funzione perturbatrice (131) — Le caratteristiche di D'Alembert (132) — Integrali primi (136) — Le orbite osculatrici (136)	
6	I metodi perturbativi classici	141
6.1	<i>Risonanze, termini secolari e piccoli divisori</i>	142
	Considerazioni preliminari (142) — La soluzione per serie (143) — Proprietà formali delle serie (145) — I termini secolari (147) — I piccoli divisori ed il problema della convergenza (149)	
6.2	<i>Teoria generale per il sistema planetario</i>	150
	Le equazioni per le approssimazioni successive (151) — L'invarianza dei semiassi maggiori secondo Lagrange (154) — Proprietà formali delle soluzioni (155) — Il teorema di Poisson (158)	
6.3	<i>Il problema secolare</i>	161
	L'Hamiltoniana secolare (161) — Lo sviluppo dell'Hamiltoniana secolare (162) — La parte quadratica dell'Hamiltoniana secolare (163) — Lo studio dell'Hamiltoniana quadratica (165) — Integrali primi per il sistema secolare (166) — Integrali primi quadratici (167) — Integrali primi lineari (168) — Le precessioni di nodi e perielii (170) — Limiti sulle variazioni di eccentricità ed inclinazioni (171)	
6.4	<i>Nota storica sul problema della stabilità delle orbite</i>	172
7	Il problema dei tre corpi	177
7.1	<i>Il problema ristretto dei tre corpi</i>	177
	Scelta delle unità di misura (178) — L'Hamiltoniana e le equa-	

	zioni canoniche nel caso circolare (178)	
7.2	<i>Gli equilibri lagrangiani</i>	181
	Calcolo degli equilibri relativi (181) — Equilibri collineari (182) — Equilibri triangolari (184)	
7.3	<i>Studio qualitativo del caso circolare ristretto</i>	185
	La costante di Jacobi come funzione di posizione e velocità (186) — Le superfici di Hill (187)	
7.4	<i>La dinamica nell'intorno dei punti lagrangiani</i>	190
	Lo sviluppo dell'Hamiltoniana nell'intorno dell'equilibrio (190) — L'approssimazione lineare nell'intorno dei punti di equilibrio lagrangiani (194) — Stabilità dei punti collineari (195) — Stabilità lineare per i punti triangolari (196) — Forma normale dell'Hamiltoniana nell'intorno dei punti triangolari (198) — Il problema non lineare per i punti triangolari (200)	
7.5	<i>Il problema ristretto ellittico</i>	201
	Il sistema rotante e pulsante (201) — Le soluzioni omografiche (205)	
7.6	<i>Studio perturbativo del problema ristretto</i>	208
	L'Hamiltoniana in variabili di Delaunay modificate (208)	
8	Integrali primi	213
8.1	<i>Il teorema di Poincaré sulla non esistenza di integrali primi</i>	215
	Equazioni per la costruzione di integrali primi (215) — Il teorema di Poincaré (218) — Discussione della condizione di genericità (219) — Discussione della condizione di non degenerazione (222)	
8.2	<i>Schema formale per l'intorno di un equilibrio ellittico</i>	224
	Il contesto algebrico formale (224) — Equazioni per gli integrali primi e problema di consistenza (225)	
8.3	<i>Costruzione diretta di integrali primi formali</i>	227
	Un caso formalmente integrabile: il sistema non risonante e reversibile (227) — Considerazioni algebriche generali (230) — Discussione euristica delle equazioni (233) — Una congettura sul superamento del problema della consistenza (239)	
8.4	<i>Costruzione indiretta degli integrali primi</i>	240
	Un operatore sullo spazio delle serie formali (241) — Esistenza e costruzione di integrali primi formali (243) — Una nota sul problema della consistenza della costruzione diretta (245)	

8.5	<i>Studio quantitativo degli integrali primi nell'intorno di un punto ellittico.</i>	247
	Il contesto analitico. (247) — Richiamo dello schema formale. (248) — Espressione del resto. (250) — Stime tecniche generali. (250) — Un caso particolarmente semplice (253) — Lo schema quantitativo per il caso generale (254)	
8.6	<i>Stabilità su tempi esponenzialmente lunghi</i>	255
	Stime analitiche dipendenti dall'ordine di troncamento (256) — Scelta dell'ordine di troncamento e stima esponenziale del resto (260) — Considerazioni qualitative fondate sugli integrali primi (263) — Stabilità dell'equilibrio e congelamento delle azioni armoniche (265)	
9	Serie e Trasformate di Lie	269
9.1	<i>Definizioni formali</i>	269
	La serie di Lie (269) — Composizione di serie di Lie (272) — Calcolo formale (273) — La trasformata di Lie (275) — Relazioni tra la trasformata di Lie e la composizione di serie di Lie (279)	
9.2	<i>Strumenti analitici</i>	280
	Diseguaglianze di Cauchy (280) — Estensione complessa dei domini (281) — Norme di Fourier con peso (282) — Diseguaglianze di Cauchy generalizzate (283)	
9.3	<i>Analiticità delle serie e delle trasformate di Lie</i>	287
	Convergenza della trasformata di Lie (287) — Convergenza della serie di Lie (290) — Analiticità della composizione di serie di Lie (290)	
10	Persistenza dei tori invarianti	293
10.1	<i>La forma normale di Kolmogorov</i>	294
	Lo schema formale generale (294) — Il problema della convergenza (295) — L'enunciato del teorema (296)	
10.2	<i>Algoritmo formale</i>	296
	L'algoritmo iterativo (297) — Giustificazione dell'algoritmo iterativo (298)	
10.3	<i>Stime quantitative</i>	300
	Strumenti analitici (300) — Lemma iterativo (301) — Lemma sui piccoli divisori (303) — Dimostrazione del lemma iterativo (304)	
10.4	<i>Iterazione delle stime e conclusione della dimostrazione.</i>	307

A	Forma normale di un'Hamiltoniana quadratica	311
A.1	<i>La forma normale per i sistemi di equazioni differenziali lineari</i>	311
	Trasformazioni lineari (312) — Autovalori, autovettori e diagonalizzazione (312) — Non unicità del procedimento di diagonalizzazione (313) — La scrittura delle soluzioni (314) — Forma normale reale nel caso di autovalori complessi (315)	
A.2	<i>Il caso dell'Hamiltoniana quadratica</i>	317
	Costruzione della trasformazione canonica (318) — Non unicità della trasformazione a forma normale (320) — Forma normale complessa dell'Hamiltoniana (321) — Integrali primi (321) — Forma normale reale nel caso di autovalori immaginari puri (322) — Algoritmo di costruzione della forma normale (323) — Il caso di autovalori complessi coniugati (324)	
B	Strumenti analitici	329
B.1	<i>I polinomi di Legendre</i>	329
	Lo sviluppo in polinomi di Legendre (329) — La formula di Rodrigues (331) — Formule ricorsive (331) — Alcune proprietà dei polinomi di Legendre (333)	
C	Diseguaglianze diofantee	337
C.1	<i>Sulla misura delle frequenze non risonanti</i>	337
	Stima della misura delle risonanze (338)	