

# 1

## LE ELLISSI DI KEPLERO

È ormai tradizione consolidata nelle nostre scuole considerare la pubblicazione del *De revolutionibus orbium cœlestium* ad opera di Copernico<sup>[24]</sup> come l'atto di nascita dell'astronomia moderna. Vi si vede infatti il passaggio da una visione geocentrica — che per inciso descrive perfettamente quello che accade sotto i nostri occhi — ad una più razionale visione eliocentrica. È anche ben noto quanto alla conoscenza del sistema copernicano abbia contribuito Galileo con la pubblicazione del suo *Dialogo*,<sup>[29]</sup> così come è nota la violenta polemica che culminò nella condanna di Galileo, sintetizzata in quel “Eppur si muove” che egli avrebbe sommessamente pronunciato subito dopo l'abiura, e possiamo immaginarlo nell'atto di sottolineare il commento scuotendo la testa con rassegnazione.

Più che di una scoperta del sistema eliocentrico sarebbe forse corretto parlare di una *riscoperta*. Ce ne dà testimonianza lo stesso Copernico nella lettera *Ad Sanctissimum Dominum Paulum III Pontificem Maximum* che costituisce gran parte della prefazione al suo libro, attribuendo agli astronomi greci l'elaborazione di un sistema del mondo che vede la terra girare intorno al sole. Ma rispetto alle conoscenze del tempo si tratta di un'autentica rivoluzione, di cui Copernico è ben cosciente. Al punto da rispondere in anticipo alle possibili critiche o derisioni cui potrebbe andar incontro la sua opera affermando:<sup>1</sup>

“ *Si fortasse erunt ματαιολόγοι, qui, cum omnium mathematicarum ignari*

---

<sup>1</sup> “Se per caso vi saranno dei ciarlatani che, pur essendo del tutto ignoranti in fatto di matematica, ciononostante si arrogano il diritto di giudicarne, e si permetteranno di biasimare e diffamare questo mio lavoro, magari invocando qualche passo della Scrittura malamente distorto a loro comodo, dirò che di loro non mi curo affatto, anzi disprezzo il loro giudizio come temerario. Tutti sanno infatti che Lattanzio, considerato un celebre scrittore, ma di fatto scadente matematico, si esprime in modo puerile sulla forma della terra, mettendosi a deridere quelli che osarono sostenere che la terra abbia la forma di un globo.”

(Il termine greco ματαιολόγοι, composto di μάταιος — vanesio, vuoto — e λόγος — parola, discorso — rende in modo alquanto sintetico quello che noi definiremmo un “parlare a vanvera”.)

*sint, tamen de illis iudicium sibi sumunt, et propter aliquem locum Scripturæ, male ad suum propositum detortum, ausi fuerint, meum hoc institutum reprehendere ac insectari, illos nihil moror, adeo ut etiam illorum iudicium tamquam temerarium contemnam. Non enim obscurum est, Lactantium, celebrem aliqui scriptorem, sed mathematicum parum, admodum pueriliter de forma Terræ loqui, cum deridet eos, qui Terram globi formam habere prodiderunt. ”*

E due righe dopo afferma senza esitazione: “*Mathemata mathematicis scribuntur*”; la Matematica si scrive per i matematici.

La formulazione delle leggi di Keplero<sup>[53][54]</sup> è un passaggio significativo almeno quanto la riscoperta del sistema eliocentrico, e da qui prenderanno le mosse queste note. In un certo senso, in quel momento l’astronomia si sbarazza del complesso armamentario di deferenti ed epicicli sul quale si fonda la rappresentazione tolemaica e copernicana dei moti planetari per sostituirlo con la rappresentazione geometrica semplice ed elegante delle ellissi. Ciò che la teoria kepleriana condivide con l’astronomia classica è l’obiettivo di costruire un modello geometrico del sistema planetario. Nei termini comunemente usati in meccanica, si occupa della *cinematica*, ovvero della descrizione in termini matematici del movimento indipendentemente dalle sue cause.

L’introduzione della dinamica, almeno nel senso che diamo oggi a questo termine, è opera di Newton, e questo argomento sarà oggetto del prossimo capitolo. Anche qui però si deve osservare che l’interpretazione dei moti planetari come risultato di un’azione gravitazionale esisteva già in qualche forma nell’astronomia greca. Purtroppo la maggior parte delle opere scientifiche prodotte dai matematici greci, ed in particolare quelle più tecniche e quindi per noi più significative, è andata perduta, sicché ci è impossibile ricostruire con precisione il loro pensiero.<sup>2</sup> Ciò che è storicamente avvenuto è che con le sue leggi Keplero ha gettato le fondamenta sulle quali Newton ha costruito la sua teoria della gravitazione. Quanto agli epicicli classici, si deve aggiungere che l’opera di Keplero non ne ha decretato la fine: rientreranno a pieno diritto nell’astronomia meno di un paio di secoli dopo ad opera di Lagrange e Laplace, sotto la forma più moderna ma sostanzialmente equivalente di sviluppi in serie di Fourier.

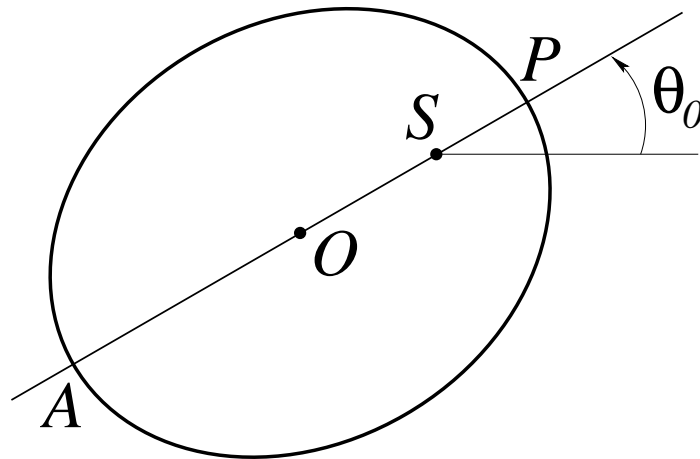
## 1.1 Le leggi di Keplero

Le tre leggi di Keplero vengono comunemente enunciate nella forma che segue.

- i. *Il pianeta si muove descrivendo un’ellisse, in un fuoco della quale è situato il sole.*
- ii. *Il raggio vettore che congiunge il pianeta col sole descrive aree uguali in tempi uguali.*
- iii. *I quadrati dei periodi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle ellissi.*

---

<sup>2</sup> Il lettore interessato all’argomento potrà consultare l’eccellente saggio di L. Russo [88].



**Figura 1.1.** L'orbita di un pianeta è un'ellisse di centro  $O$ ;  $S$  rappresenta il sole (in un fuoco dell'ellisse);  $P$  è il perielio,  $A$  è l'afelio,  $\vartheta_0$  è la direzione del perielio rispetto ad una direzione assegnata.

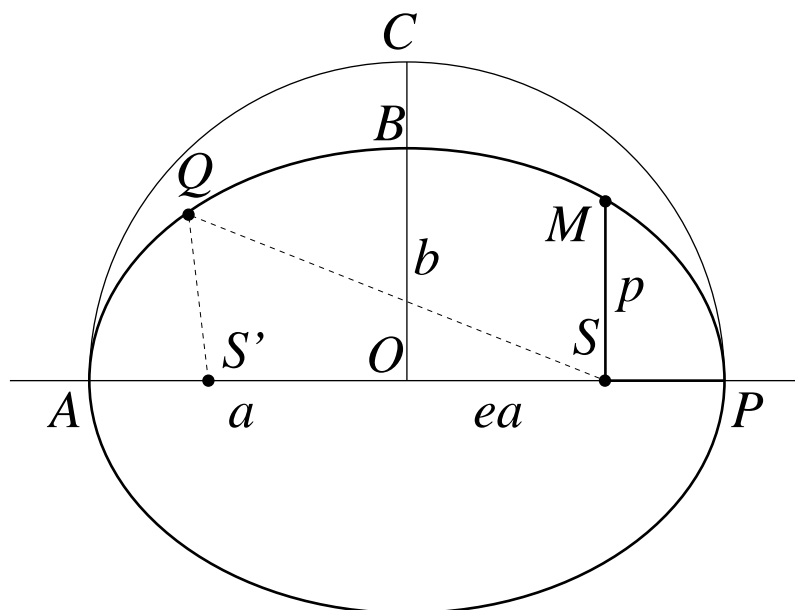
La formulazione di queste leggi è contenuta in due testi, apparsi a distanza di dieci anni l'uno dall'altro. Nel primo di questi libri,<sup>[53]</sup> pubblicato nel 1609, Keplero affronta il problema di ottenere una buona rappresentazione geometrica dell'orbita di Marte, fondandosi sulle osservazioni del suo maestro Tycho Brahe. La discussione percorre con dovizia di dettagli i lunghi e numerosi tentativi effettuati prima di pervenire alla scoperta della forma ellittica dell'orbita e della conservazione della velocità areolare. Queste due leggi portano a loro volta alla scrittura dell'equazione di Keplero (si veda più avanti il paragrafo 1.1.2). La terza legge compare invece nel secondo libro, pubblicato nel 1619. Può essere curioso osservare che il contenuto di questo libro è una lunghissima analisi delle orbite planetarie, messe in relazione da un lato con i solidi regolari e dall'altro con le scale musicali: in quest'ambito, la formulazione della terza legge quasi scompare. Naturalmente, la grande importanza del risultato non sfugge a Keplero, che anzi si sofferma con autentica passione sul racconto di come sia pervenuto a rispondere ad una domanda che già si era posto nel *Mysterium Cosmographicum*, scritto 22 anni prima, ed arriva al punto da precisare le date: avendo intuito la legge il giorno 8 marzo 1618 l'aveva poi rigettata in seguito ad un errore di calcolo, ma il 15 maggio quell'intuizione si ripresentò e “*novo capto impetu expugnavit mentis meæ tenebras*” (avendo acquistato nuova forza espugnò le tenebre della mia mente).<sup>3</sup>

### 1.1.1 La prima legge

La prima legge fornisce semplicemente la forma dell'orbita, ed implica in particolare che il moto avviene in un piano. Se si fa riferimento in questo piano ad un sistema di coordinate polari  $r, \vartheta$  con origine nel sole l'equazione dell'orbita si scrive

$$(1.1) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos(\vartheta - \vartheta_0)}, \quad 0 \leq e < 1,$$

<sup>3</sup> Si veda [54], Liber V, Caput III; pag. 279 del volume V delle opere complete.



**Figura 1.2.** Relazione tra gli elementi di un'ellisse.  $S, S'$  sono i fuochi; il semiasse maggiore è  $a = |OP|$ ; il semiasse minore è  $b = |OB|$ ; il parametro è  $p = |SM|$ . Altre relazioni interessanti:  $|SP| = p/(1+e)$ ;  $|SA| = p/(1-e)$ ;  $|OS| = ea$ ;  $|BS| = a$  (quest'ultima relazione segue dalla proprietà, spesso usata come definizione dell'ellisse, che per qualunque punto  $Q$  dell'ellisse vale  $|SQ| + |S'Q| = 2a$ ).

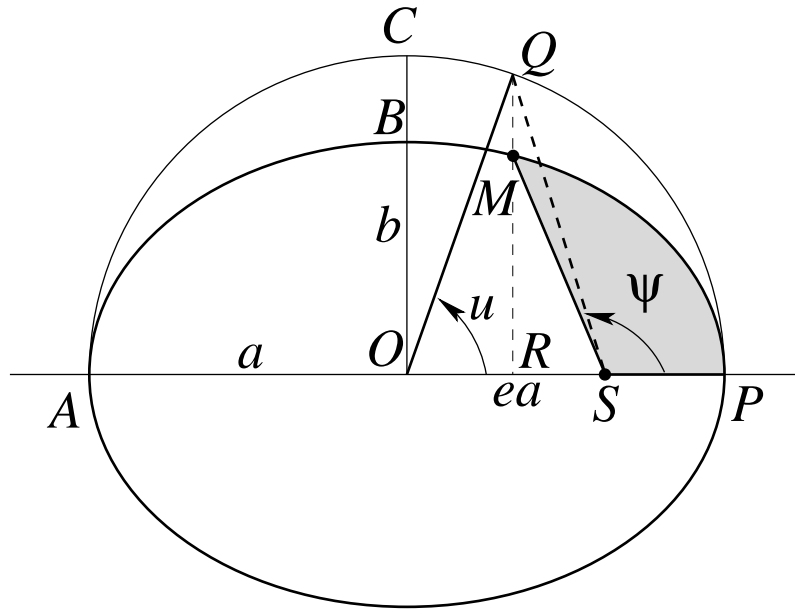
dove  $p$  è il *parametro* dell'ellisse,  $e$  l'*eccentricità* (che deve soddisfare la condizione  $0 \leq e < 1$  perché la (1.1) rappresenti un'ellisse), e  $\vartheta_0$  determina la direzione del *perielio* (si veda la figura 1.1, ricordando di porre l'origine delle coordinate in  $S$ ). Le tre costanti  $p, e, \vartheta_0$  determinano completamente l'ellisse descritta dal pianeta. In meccanica celeste è però pratica comune sostituire al parametro  $p$  il semiasse maggiore  $a$  (che ha un ruolo importante nella terza legge). Giova qui ricordare alcune relazioni tra  $p, e, a$  ed il *semiasse minore*  $b$ :

$$(1.2) \quad \begin{aligned} a &= \frac{p}{1-e^2}, & p &= \frac{b^2}{a}, \\ b &= a\sqrt{1-e^2}, & e &= \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}. \end{aligned}$$

Tutte queste relazioni si possono ricavare da semplici considerazioni geometriche illustrate dalla figura 1.2.

### 1.1.2 La seconda legge

La posizione del pianeta sull'orbita viene determinata mediante la seconda legge di Keplero. A tal fine si osservi che la posizione al tempo  $t$  del pianeta nel piano  $r, \vartheta$  può determinarsi quando si conosca  $\vartheta(t)$ , o, come si usa comunemente in meccanica celeste, l'*anomalia vera*  $\psi(t)$ , dove  $\psi = \vartheta - \vartheta_0$  è l'angolo misurato rispetto al perielio.



**Figura 1.3.** Deduzione delle equazioni di Keplero. La posizione  $M$  del pianeta viene identificata dall'anomalia vera  $\psi$ ; la perpendicolare ad  $\overline{OP}$  condotta da  $M$  determina il punto  $Q$  sulla circonferenza di raggio  $a = |OP|$ ; l'angolo  $u = \widehat{POQ}$  è l'anomalia eccentrica. Il calcolo dell'area del settore di ellisse  $PSM$  (descritto dal raggio vettore congiungente il sole con il pianeta) viene ricondotto a quello delle aree del settore circolare  $POQ$  e del triangolo  $SOQ$ .

La determinazione diretta di  $\psi(t)$  dalla seconda legge di Keplero non è però agevole. È più comodo introdurre un secondo angolo  $u$ , detto *anomalia eccentrica*, nel modo illustrato in figura 1.3. Si consideri la circonferenza di raggio  $a$  il cui centro coincide col centro dell'ellisse; detta  $M$  la posizione del pianeta, si conduca la perpendicolare da  $M$  all'asse maggiore dell'ellisse, e siano  $R$  il piede della perpendicolare e  $Q$  il punto di intersezione della perpendicolare con la circonferenza tale che  $M$  è interno al segmento  $\overline{RQ}$ . L'anomalia eccentrica  $u$  è definita come l'angolo  $u = \widehat{QOP}$ .

La relazione tra  $u$  e  $\psi$  si ricava dalla figura 1.3. Si ha infatti  $|MS|^2 = |MR|^2 + |RS|^2$ , e sostituendo  $|MS| = r$ ,  $|MR| = b \sin u$  e  $|RS| = ea - a \cos u$  si ottiene facilmente

$$(1.3) \quad r = a(1 - e \cos u) ,$$

che è ancora l'equazione dell'ellisse ove si considerino come coordinate  $r$  (distanza dal sole) e  $u$  (anomalia eccentrica). Sostituendo nella (1.1) si ottiene la relazione implicita

$$(1.4) \quad (1 - e \cos u)(1 + e \cos \psi) = 1 - e^2 .$$

In forma più esplicita si può scrivere

$$(1.5) \quad \tan \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\psi}{2} ,$$

oppure

$$(1.6) \quad \sin u = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \psi}{1 + e \cos \psi} .$$

La seconda legge di Keplero consente di ricavare la dipendenza di  $u$  dal tempo. A tal fine si osservi che (pur di fissare l'origine del tempo in modo che sia  $\psi(0) = 0$ ) l'area del settore di ellisse  $PSM$  è proporzionale al tempo, ossia si ha

$$\text{area}(PSM) = Ct ,$$

dove  $C$  può calcolarsi come<sup>4</sup>

$$(1.7) \quad C = \frac{\pi ab}{T} ,$$

essendo  $T$  il periodo di rivoluzione del pianeta. Si calcola allora

$$\begin{aligned} \text{area}(PSM) &= \frac{b}{a} \text{area}(PSQ) = \frac{b}{a} [\text{area}(POQ) - \text{area}(SOQ)] \\ &= \frac{b}{a} \left( \frac{a^2}{2} u - \frac{a^2 e}{2} \sin u \right) ; \end{aligned}$$

qui, la prima eguaglianza si ricava osservando che per ogni punto  $M$  dell'ellisse vale la relazione  $|MR|/|QR| = b/a$ ; la seconda è banale; la terza segue da  $|QR| = a |\sin u|$  e  $|OS| = ea$ . Si ottiene così l'*equazione di Keplero*

$$u - e \sin u = nt ,$$

dove

$$(1.8) \quad n = \frac{2C}{ab}$$

è detto *moto medio* (si verifica subito che  $n = 2\pi/T$ , la media della velocità angolare su un periodo). È utile anche introdurre il tempo  $\tau$  del *passaggio al perielio*, e definire l'*anomalia media*  $\ell$  come

$$(1.9) \quad \ell = n(t - \tau) ;$$

l'equazione di Keplero assume così la forma

$$(1.10) \quad u - e \sin u = \ell .$$

---

<sup>4</sup> Si ricordi che  $\pi ab$  è l'area dell'ellisse di semiassi  $a$  e  $b$ .

### 1.1.3 La terza legge

Veniamo infine alla terza legge. Questa asserisce che per ogni pianeta vale

$$(1.11) \quad \frac{a^3}{T^2} = k ,$$

dove  $k$  è una costante che non dipende dal pianeta, ma solo dal sole. Una formulazione equivalente in termini del moto medio anziché del periodo è

$$(1.12) \quad n^2 a^3 = 4\pi^2 k .$$

Da un punto di vista strettamente formale non c'è molto da aggiungere a questa formula dall'apparenza banale. Ma è forse opportuno ricordare che essa costituisce il risultato per noi più rilevante della lunga e puntigliosa indagine di Keplero alla ricerca dell'armonia del mondo; un'indagine iniziata con la scrittura del *Mysterium Cosmographicum* e conclusa dopo 22 anni con l'*Harmonices Mundi*.

## 1.2 Sulla soluzione dell'equazione di Keplero

L'equazione di Keplero (1.10) è un'equazione trascendente, e quindi non risolvibile con metodi matematici semplici.<sup>5</sup> Di questo si rese ben conto lo stesso Keplero, che così si esprimeva:<sup>6</sup>

---

<sup>5</sup> In [99], § 49 compare la nota: “A solution of the problem of calculating the True Anomaly from the Mean anomaly, based on a geometrical deduction, was found among the unpublished papers of Newton”. Manca però un riferimento più preciso.

<sup>6</sup> “Ma una volta assegnata l'anomalia media non vi è alcun metodo geometrico per determinare quella coeguagliata, ossia l'anomalia rispetto all'eccentrico. Infatti l'anomalia media è composta da due parti di area, un settore ed un triangolo: il primo di essi viene misurato dall'arco eccentrico; il secondo moltiplicando il seno di quell'arco per l'area del triangolo massimo, e sottraendo quest'ultimo al settore. Ma le proporzioni tra seni ed archi sono infinite in numero. Perciò, data la loro somma non si può stabilire quanto valga l'arco corrispondente a quella somma, e quanto il suo seno; questo a meno che non abbiamo esaminato in precedenza di quanto cresca quell'area: in altre parole, a meno che tu non abbia costruito le tavole, così da operare con quelle.

Questa è la mia opinione. E benché geometricamente non sembri particolarmente attraente, io, a maggior ragione, esorto i Geometri a darmi la soluzione di questo problema: Assegnata l'area di una parte del semicerchio ed un punto del diametro, trovare l'arco e l'angolo con un vertice in quel punto tali che l'arco e i lati dell'angolo comprendano l'area assegnata. Ovvero: dividere l'area del semicerchio in un rapporto assegnato a partire da un punto del diametro.

A me basta credere che la soluzione sia a priori impossibile, perché l'arco e il seno sono eterogenei. Io sto vagando senza meta, e se qualcuno saprà indicarmi la via, egli sarà ai miei occhi un grande Apollonio.”

(Si veda [53], cap. LX, § V. Il calcolo dell'anomalia media (ovvero l'area che evolve uniformemente) descritto da Keplero diventa limpido se si ricorda la deduzione dell'equazione svolta poco sopra, ed in particolare si fa riferimento alla figura 1.3. Il

“ *At data anomalia media, nulla Geometrica methodus est, perveniendi ad coæquatam, videlicet ad anomaliam eccentrici. Nam anomalia media est composita ex duabus areæ partibus, sectore & triangulo: quorum ille quidem numeratur ab arcu eccentrici; hoc, ab eius arcus sinu, in valorem trianguli maximi multiplicato resectis ultimis. At proportionones inter arcus & eorum sinus infinitæ sunt numero. Itaque summa utriusque proposita, dici non potest, quantus sit arcus, quantus eius sinus, respondens huic summæ; nisi prius exploremus, dato arcu, quanta evadat area: hoc est, nisi tabulas contruxeris, & ex iis postea operaris.*

*Hæc est mea sententia. Quæ quo minus habere videbitur Geometricæ pulchritudinis, hoc magis adhortor Geometras, uti mihi solvant hoc problema:*

*Data area partis semicirculi, datoque puncto diametri, invenire arcum, & angulum ad illud punctum, cuius anguli cruribus, & quo arcu, data area comprehenditur. Vel: Aream semicirculi ex quocunque puncto diametri in data ratione secare.*

*Mihi sufficit credere, solvi a priori non posse, propter arcus & sinus  $\epsilon\tau\epsilon\rho\gamma\acute{\epsilon}\nu\epsilon\iota\alpha\nu$ . Erranti mihi, quicumque viam monstraverit, is erit mihi magnus Apollonius. ”*

Naturalmente, la disponibilità del calcolatore rende oggi semplice la soluzione numerica del problema. Resta però interessante indagare alcuni aspetti, osservando anche che la soluzione dell’equazione di Keplero costituisce un buon esempio di applicazione di metodi numerici e analitici di validità generale.

### 1.2.1 Considerazioni qualitative

Un’analisi qualitativa delle soluzioni è già possibile se si utilizza un metodo grafico: benché tale metodo non possa certo fornire risultati di grande precisione, può però fornire utili indicazioni. Si scrive semplicemente l’equazione di Keplero nella forma  $(u - \ell)/e = \sin u$ ; la soluzione  $u_*$  è l’ascissa dell’intersezione della retta rappresentata dal primo membro con la sinusoidale del secondo membro (figura 1.4).

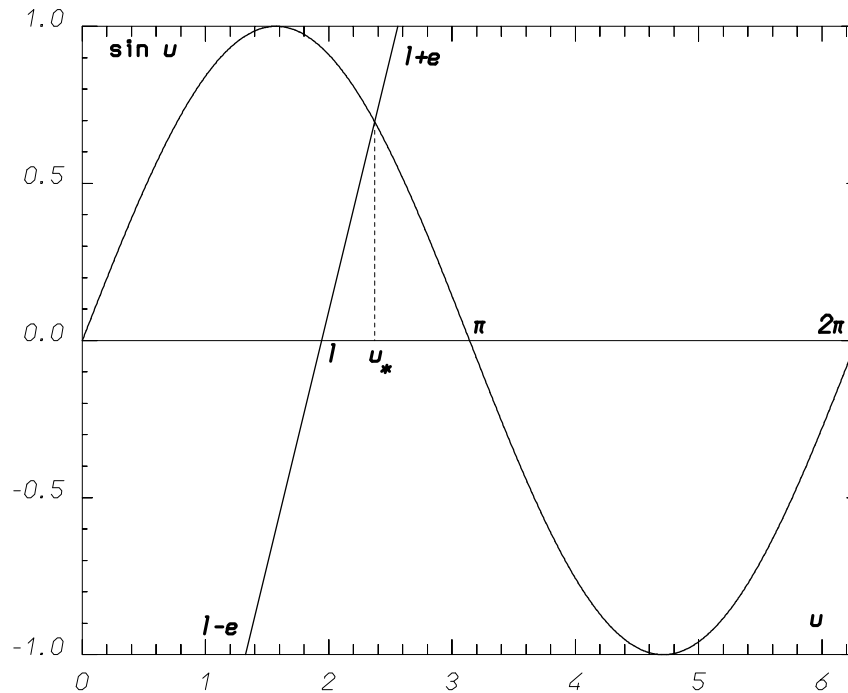
L’analisi della figura suggerisce immediatamente alcune considerazioni, che il lettore non avrà difficoltà a giustificare in modo rigoroso.

- (i) Per qualunque  $\ell$  e qualunque  $|e| < 1$  l’equazione di Keplero ammette una ed una sola soluzione.
- (ii) L’anomalia media  $\ell$  e l’anomalia eccentrica  $u$  coincidono per  $\ell = 0, \pi$  (o multipli di  $\pi$ : si ricordi che sia  $\ell$  che  $u$  sono angoli).
- (iii) Per  $0 < u < \pi$  si ha  $\ell < u_*$ ; per  $\pi < u < 2\pi$  si ha  $u_* < \ell$ .
- (iv) Se si definisce la distanza sul cerchio

$$\text{dist}(u, u') = \min(|u - u'|(\bmod 2\pi), 2\pi - |u - u'|(\bmod 2\pi))$$

---

riferimento alla fine della citazione è evidentemente ad Apollonio da Perga, geometra greco della fine del III secolo a.C., autore di un libro sulle coniche.)



**Figura 1.4.** Soluzione grafica dell'equazione di Keplero: noti  $e$  ed  $\ell$ , si determinano due dei tre punti  $(\ell - e, -1)$ ,  $(\ell, 0)$ ,  $(\ell + e, 1)$ , e si traccia la retta che li congiunge; l'ascissa dell'intersezione di questa retta con la sinusoidale è il punto  $u_*$  cercato.

si ha  $\text{dist}(u_*, \ell) \leq e$ ; il massimo è raggiunto per  $\ell = \pi/2, 3\pi/2$ , dove si ha  $\text{dist}(u_*, \ell) = e$ .

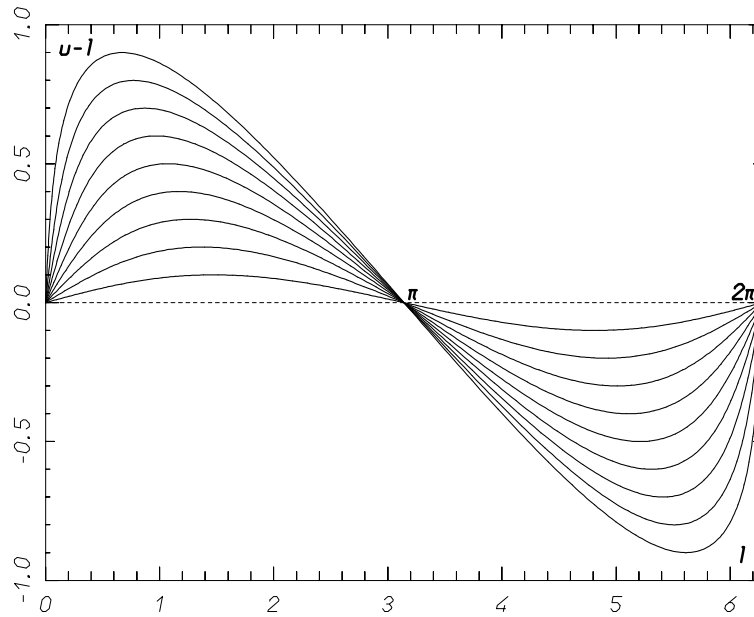
- (v) L'anomalia eccentrica  $u$  può esprimersi nella forma  $u = \ell + ef(\ell)$ , dove  $f(\ell)$  è periodica di periodo  $2\pi$ , si annulla per  $\ell = 0, \pi, 2\pi$ , soddisfa la proprietà  $f(2\pi - \ell) = -f(\ell)$ , ed ha una media nulla.<sup>7</sup>

La figura 1.5 riporta l'andamento di  $u - \ell$  per diversi valori di  $e$ ; si osservi il forte incremento della differenza tra le due anomalie in prossimità del perielio.

### 1.2.2 Il metodo di bisezione

Si tratta di un metodo numerico, del resto ben noto, per la ricerca della soluzione di un'equazione della forma  $f(u) = c$ , applicabile sotto l'ipotesi che la funzione  $f$  sia continua. Si determina anzitutto un intervallo  $[a_0, b_0]$  contenente  $u_*$ ; per questo basta che  $f - c$  abbia valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo. Si prosegue poi costruendo ricorsivamente una successione  $[a_r, b_r]$  di intervalli con il criterio seguente:

<sup>7</sup> Questa proprietà dice, tra l'altro, che l'anomalia media  $\ell$  è un angolo che svolge la sola funzione di rendere uniforme nel tempo la funzione  $\ell(t)$ , mediando in qualche modo la non uniformità dell'anomalia eccentrica e dell'anomalia vera. Questo è un problema generale che si presenta ogniqualvolta si possa descrivere il movimento con un angolo che varia nel tempo in modo monotono ma non uniforme. La soluzione di questo problema conduce in modo naturale alla introduzione delle variabili azione ed angolo.



**Figura 1.5.** Andamento della soluzione dell'equazione di Keplero per  $e = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ .

$[a_r, b_r]$  viene determinato a partire dall'intervallo precedente  $[a_{r-1}, b_{r-1}]$  sostituendo uno degli estremi con il punto medio  $(a_{r-1} + b_{r-1})/2$ ; la scelta dell'estremo da sostituire viene effettuata per confronto del valore di  $f$  nel punto medio con i valori agli estremi, richiedendo che sia ancora  $u_* \in [a_r, b_r]$ . Il procedimento ricorsivo termina quando si ha  $\text{dist}(a_r, b_r) \leq \delta$ , dove  $\delta$  è la tolleranza prescritta, e si può prendere come  $\bar{u}$  un qualunque punto dell'intervallo  $[a_r, b_r]$ . Il procedimento è illustrato graficamente in figura 1.6.

L'efficienza del metodo è stimata, come sempre, dalla rapidità di convergenza. La stima generale si ottiene osservando che ad ogni passo l'ampiezza dell'intervallo viene dimezzata, sicché si ha  $\text{dist}(a_r, b_r) = 2^{-r} \text{dist}(a_0, b_0)$ . La condizione  $\text{dist}(a_r, b_r) \leq \delta$ , è dunque verificata per  $r \geq [\ln \text{dist}(a_0, b_0) - \ln \delta] / \ln 2$ .

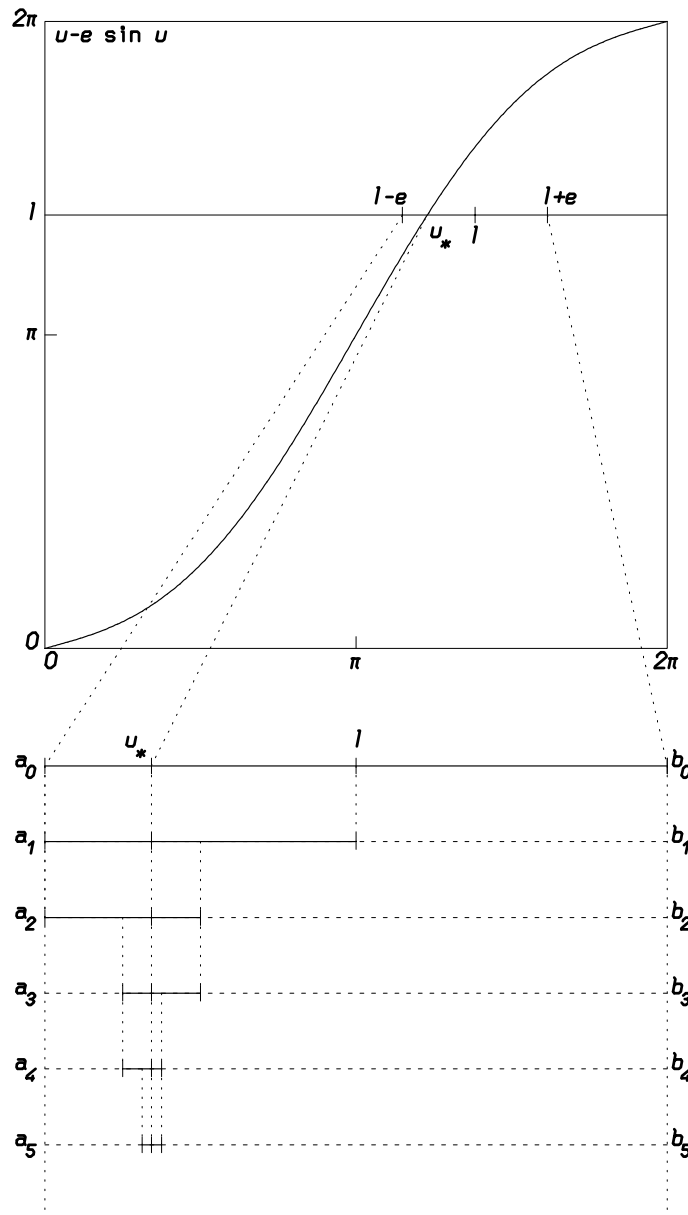
Nel caso dell'equazione di Keplero si dovrà porre  $f(u) = u - e \sin u$ , e dunque la condizione di continuità è soddisfatta. Tenuto conto della proprietà (iii) del paragrafo 1.2.1, si può sempre far partire l'iterazione da  $a_0 = \ell - e$ ,  $b_0 = \ell + e$ ; in tal caso la soluzione approssimata a meno di  $\delta$  richiederà tipicamente un numero  $r$  di iterazioni pari a

$$(1.13) \quad r = 1 + \frac{\ln e - \ln \delta}{\ln 2}.$$

Di fatto il metodo di ricerca farà sì che questo numero di iterazioni venga sempre raggiunto.

### 1.2.3 Il metodo del punto fisso

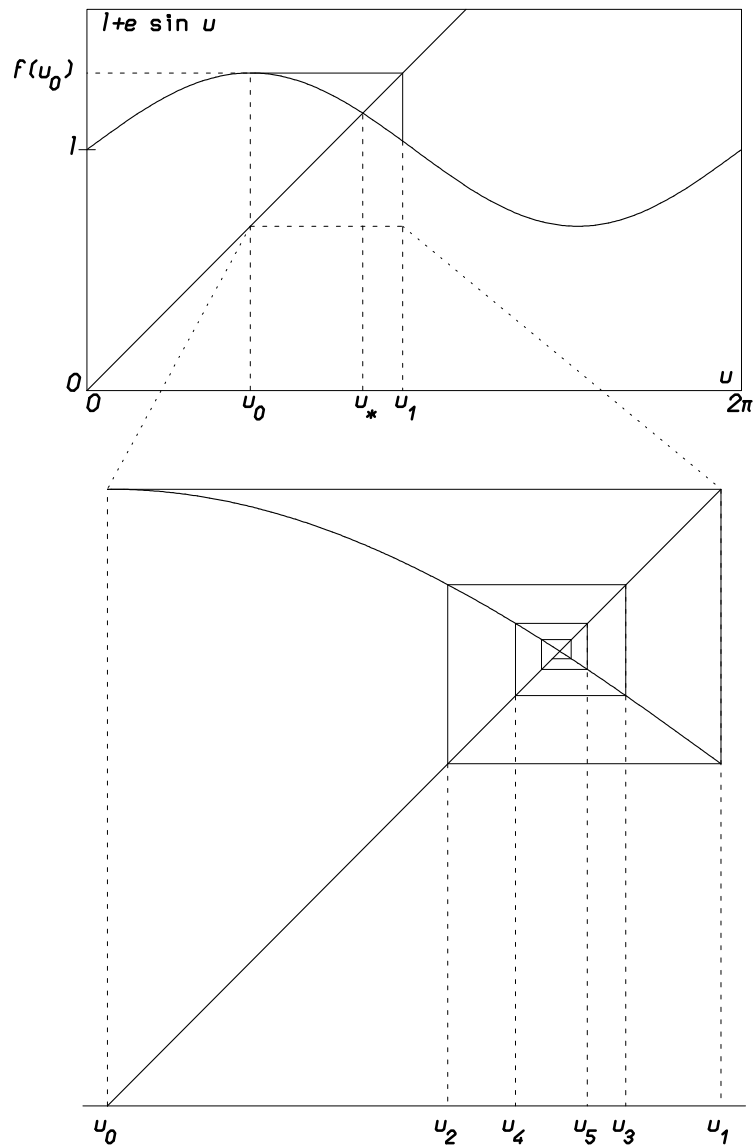
Si tratta di un metodo che talvolta si dimostra utile per risolvere un'equazione della forma  $u = g(u)$ . Per l'applicabilità di questo metodo occorre determinare un intervallo



**Figura 1.6.** Ad illustrazione della soluzione numerica dell'equazione di Keplero col metodo di bisezione. Scegliendo come intervallo iniziale  $[\ell - e, \ell + e]$ , che certamente contiene la soluzione  $u_*$ , si determina la successione  $[a_r, b_r]$  di intervalli sempre contenenti la soluzione, la cui lunghezza viene ogni volta dimezzata.

$I$  tale che  $g(I) \subseteq I$ , e che la mappa  $g(u)$  sia una contrazione, ossia esista un numero positivo  $\alpha < 1$  tale che si abbia  $\text{dist}(g(u), g(u')) \leq \alpha \text{dist}(u, u')$  per qualunque coppia  $u, u'$  di punti in  $I$ . In tal caso il teorema del punto fisso assicura che esiste in  $I$  un unico punto  $u_*$  soddisfacente  $u_* = g(u_*)$ , e che preso un qualunque  $u_0 \in I$  la successione  $u_r$  definita ricorsivamente come  $u_r = g(u_{r-1})$  converge a  $u_*$ .<sup>8</sup> Il procedimento è illustrato

<sup>8</sup> Si veda ad esempio Kantorovič–Akilov [51], cap. XVI, § 1.1.



**Figura 1.7.** Ad illustrazione della soluzione dell'equazione di Keplero mediante il metodo numerico del punto fisso. Scegliendo come punto iniziale  $u_0 = \ell$  si determina la successione  $u_r = \ell + e \sin u_{r-1}$ . Si osservi la costruzione grafica della successione: dal punto  $(u_{r-1}, f(u_{r-1}))$  si porta la retta orizzontale fino alla retta rappresentante l'identità, e poi quella verticale fino ad incontrare la curva  $f(u)$ ; questo determina  $(u_r, f(u_r))$ , e si può iterare il procedimento.

graficamente in figura 1.7.

La stima della rapidità di convergenza richiede qualche attenzione. Si osserva che ad ogni passo  $r \geq 2$  si ha  $\text{dist}(u_r, u_{r-1}) \leq \alpha \cdot \text{dist}(u_{r-1}, u_{r-2}) \leq \alpha^{r-1} \cdot \text{dist}(u_1, u_0)$ . Quindi la distanza di  $u_*$  da  $u_r$  non può superare la somma delle distanze tra tutte le

coppie contigue di iterati successivi a  $r$ , ossia

$$\text{dist}(u_*, u_r) \leq \sum_{j>r} e^{j-1} \text{dist}(u_0, u_1) = \frac{\alpha^r}{1-\alpha} \text{dist}(u_0, u_1).$$

Una formula analoga, utile per dare immediatamente una stima migliore dell'errore commesso troncando il procedimento ad un passo  $r$  arbitrario, è

$$\text{dist}(u_*, u_r) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \text{dist}(u_r, u_{r-1});$$

questa stima può essere utile per decidere quando sospendere il processo iterativo, avendo ottenuto l'approssimazione cercata.

Nel caso dell'equazione di Keplero si ha  $g(u) = \ell + e \sin u$ , e si verifica facilmente che vale  $\text{dist}(g(u), g(u')) \leq e \cdot \text{dist}(u, u')$ ; il metodo è dunque applicabile. Come prima approssimazione si può prendere  $u_0 = \ell$ , e si ricava subito  $\text{dist}(u_0, u_1) \leq \text{dist}(u_0, u_*) + \text{dist}(u_*, u_1) \leq 2e$  (si veda la proprietà (iv) del paragrafo 1.2.1). Dunque dalla stima generale data sopra si ha

$$\text{dist}(u_*, u_r) \leq \frac{2e^{r+1}}{1-e},$$

e la condizione  $\text{dist}(u_*, u_r) \leq \delta$  è certamente soddisfatta per

$$r \geq \ln[(1-e)\delta/2] / \ln e.$$

Pertanto la soluzione approssimata a meno di  $\delta$  richiederà al più un numero  $r$  di iterazioni pari a

$$(1.14) \quad r = \frac{\ln(1-e) + \ln \delta - \ln 2}{\ln e}$$

Si osservi bene che questa stima è certamente pessimistica: l'uso della stima locale (ossia al passo  $r$  generico) riportata sopra consentirà tipicamente di fermarsi prima di aver raggiunto questo numero di iterazioni; l'informazione data da questa stima serve come indicazione del comportamento asintotico del numero di iterazioni necessario quando il rapporto  $\delta/e$  tende a zero.

#### 1.2.4 Il metodo di Newton

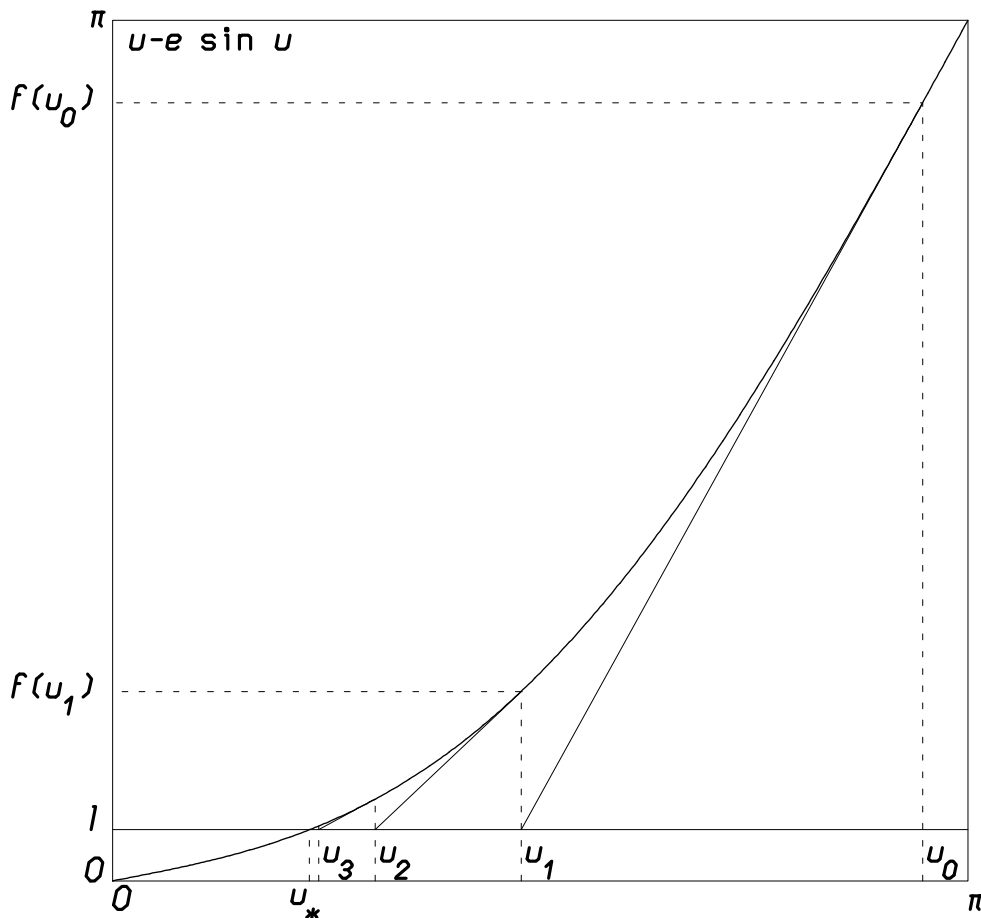
Una formulazione semplice del metodo, sufficiente per l'applicazione al caso dell'equazione di Keplero, è la seguente. Si considera un intervallo  $[a, b]$  ed una funzione  $f(u)$  due volte differenziabile in  $[a, b]$ , e soddisfacente

$$(1.15) \quad f'(u) \geq d > 0, \quad 0 \leq f''(u) \leq M \quad \text{per } u \in [a, b].$$

Si vuole trovare l'unica soluzione  $u_*$  dell'equazione  $f(u) = \ell$ , con  $f(a) \leq \ell \leq f(b)$ .

Si procede nel modo seguente. Si sceglie un punto  $u_0 \in [u_*, b]$ ; si costruisce l'equazione della retta tangente a  $f(u)$  nel punto di coordinate  $(u_0, f(u_0))$ , ossia

$$y - f(u_0) = f'(u_0) \cdot (u - u_0);$$



**Figura 1.8.** Ad illustrazione del metodo di Newton per la soluzione dell'equazione di Keplero. Partendo da un punto arbitrario  $u_0 \in [u_*, \pi]$  si traccia la retta tangente alla curva  $f(u)$  nel punto di coordinate  $(u_0, f(u_0))$ ; l'intersezione della tangente con la retta  $l$  dà il punto successivo  $u_1$ . Iterando il procedimento si ha una successione che converge a  $u_*$ . Per aver un'idea della rapidità di convergenza, si osservi che per rendere visibili sul grafico le prime tre iterazioni si è scelta la prima approssimazione  $u_0$  ben lontana dalla soluzione  $u_*$ .

si determina  $u_1$  ponendo  $y = l$  in questa equazione e risolvendo rispetto a  $u$ ; poi si itera il procedimento. Si costruisce così una successione  $u_r$  mediante la formula ricorsiva

$$(1.16) \quad u_r = u_{r-1} - \frac{f(u_{r-1}) - l}{f'(u_{r-1})};$$

questa successione converge ad  $u_*$ .

Il procedimento è illustrato graficamente in figura 1.8. Un confronto con le figure 1.6 e 1.7, relative ai metodi di bisezione e del punto fisso, suggerisce immediatamente che la rapidità di convergenza possa essere superiore a quella degli altri metodi. Per

indagare ulteriormente questo aspetto si inizia con la formula di Taylor

$$f(u_*) = f(u_{r-1}) + (u_* - u_{r-1})f'(u_{r-1}) + \frac{(u_* - u_{r-1})^2}{2}f''(t),$$

dove  $t \in [u_*, u_{r-1}]$ ; ricavando poi  $u_r$  dalla (1.16), e ricordando che è  $f(u_*) = \ell$ , si calcola

$$u_r - u_* = \frac{f''(t)}{2f'(u_{r-1})}(u_* - u_{r-1})^2.$$

L'aspetto interessante di questa formula è che, se si parte con un'approssimazione sufficientemente buona, la distanza di  $u_r$  da  $u_*$  decresce quadraticamente, e dunque in modo sensibilmente più rapido della decrescita geometrica degli altri metodi.

Si può ottenere una stima più semplice osservando che, per le ipotesi (1.15), si ha certamente

$$\frac{f''(t)}{2f'(u_{r-1})} \leq \frac{M}{2d};$$

da qui si ricava la stima ricorsiva

$$0 \leq u_r - u_* \leq \frac{M}{2d}(u_{r-1} - u_*)^2,$$

e per iterazione si ottiene <sup>9</sup>

$$(1.17) \quad 0 \leq u_r - u_* \leq \frac{2d}{M} \left[ \frac{M}{2d}(u_0 - u_*) \right]^{2^r}.$$

Se  $M(u_0 - u_*)/(2d) < 1$ , questo basta per garantire una convergenza estremamente rapida.<sup>10</sup>

Anche qui, è comodo avere a disposizione una stima locale (nel senso che deve richiedere solo la conoscenza del punto  $u_r$ , e non deve dipendere dalla scelta di  $u_0$ ) dell'approssimazione raggiunta. A tal fine, facendo uso della formula di Taylor al primo ordine, si scrive

$$f(u_*) = f(u_r) + (u_* - u_r)f'(t),$$

con  $t \in [u_*, u_r]$ . Si ha dunque

$$(1.18) \quad u_r - u_* = \frac{f(u_r) - \ell}{f'(t)} \leq \frac{f(u_r) - \ell}{d}.$$

<sup>9</sup> Sia  $\alpha_r = C\alpha_{r-1}^2$  con  $\alpha_0$  assegnato; si ricava  $\alpha_r = (C\alpha_0)^{2^r}/C$ . Infatti ciò è vero per  $r = 1$ , e per induzione si calcola

$$\alpha_r = C \left[ \frac{1}{C}(C\alpha_0)^{2^{r-1}} \right]^2 = \frac{1}{C}(C\alpha_0)^{2^r},$$

come asserito.

<sup>10</sup> La condizione è sufficiente ma non necessaria: il metodo converge comunque, sotto le condizioni (1.15), ma le stime usate sono palesemente pessimistiche.

Questa stima può essere ben utile per decidere quando sospendere l'iterazione, avendo raggiunto la precisione cercata.

Resta da valutare il numero massimo di iterazioni necessarie per ottenere l'approssimazione voluta. A tal fine occorre una stima dell'approssimazione iniziale  $u_0 - u_*$ ; in mancanza di meglio, si può sempre far uso della (1.18). Detto dunque  $u_0 - u_* \leq \Delta$ , e assumendo  $M\Delta/(2d) < 1$ , la (1.17) garantisce  $u_r - u_* \leq \delta$  purché sia

$$(1.19) \quad r \geq \frac{1}{\ln 2} \ln \left( 1 - \frac{\ln \delta - \ln \Delta}{\ln[M/(2d)] + \ln \Delta} \right)$$

Nel caso dell'equazione di Keplero ci si potrà limitare a considerare l'intervallo  $[\ell, \pi]$ ; si ha

$$f(u) = u - e \sin u,$$

e le condizioni (1.15) per l'applicabilità del metodo sono soddisfatte con

$$d = 1 - e \cos \ell, \quad M = e.$$

Come punto iniziale si può scegliere senz'altro  $u_0 = \min(\ell + e, \pi)$ , sicché vale certamente  $u_0 - u_* \leq e$ ; sostituendo dunque  $\Delta = e$  ed i valori di  $d$  e  $M$  riportati sopra si ottiene che per  $e^2/[2(1 - e \cos \ell)] < 1$  si arriverà all'approssimazione voluta in un numero  $r$  di iterazioni pari al più a

$$r = \frac{1}{\ln 2} \ln \left[ 1 + \frac{\ln \delta - \ln e}{2 \ln e - \ln 2 - \ln(1 - e \cos \ell)} \right].$$

Anche qui, la stima è necessariamente pessimistica: anzitutto, la condizione appena riportata è indispensabile per l'uso della stima generale, ma non lo è affatto per la convergenza del metodo, che è comunque assicurata; poi, l'uso della stima locale (1.18) consentirà tipicamente di sospendere il procedimento prima di aver effettuato il numero di iterazioni stimato.

### 1.2.5 Su una formula di Lagrange per l'inversione di funzioni mediante serie

La soluzione dell'equazione di Keplero può ricondursi, come osservato da Lagrange<sup>[59]</sup>, a quella dell'equazione più generale

$$(1.20) \quad \alpha - x + \varphi(x) = 0,$$

dove  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $x \in \mathbb{C}$  e  $\varphi$  è una funzione analitica di  $x$ .

Lo stesso Lagrange<sup>[58]</sup> ha dato una soluzione elegante a questo problema sotto forma di una serie i cui termini possono essere calcolati in modo esplicito mediante prodotti e derivate di funzioni note. Ancor meglio, Lagrange risolve il seguente problema: *detta  $p$  una radice dell'equazione (1.20), calcolare  $\psi(p)$ , dove  $\psi(x)$  è funzione analitica di  $x$* . Questo paragrafo è dedicato ad una deduzione della formula di Lagrange.

Per comodità nel trattare gli sviluppi si potrà riscrivere la formula (1.20) come

$$(1.21) \quad \alpha - x + \varepsilon \varphi(x) = 0$$

l'aggiunta del parametro  $\varepsilon$  di fronte a  $\varphi$  è chiaramente inessenziale, ma risulterà utile per riordinare gli sviluppi. Alla fine basterà porre  $\varepsilon = 1$ .

Per  $\varepsilon = 0$  l'equazione ha l'ovvia soluzione  $x = \alpha$ ; per  $\varepsilon > 0$  si potrà cercare di sviluppare la soluzione  $p$  in serie di potenze di  $\varepsilon$ , ossia come

$$(1.22) \quad p = \alpha + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots,$$

dove  $p_1, p_2, \dots$  sono da determinarsi.

Si consideri ora la funzione  $\psi(x)$ , analitica in  $x$ ; il valore di  $\psi$  in  $p$  potrà determinarsi, grazie allo sviluppo di Taylor, come

$$\psi(p) = \psi(\alpha) + \sum_{s \geq 1} \frac{(\varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots)^s}{s!} D^s \psi(\alpha),$$

dove il simbolo  $D$  sta per l'operatore di derivazione rispetto a  $x$ . Riordinando questa espressione in potenze di  $\varepsilon$  si potrà scrivere<sup>11</sup>

$$(1.23) \quad \psi(p) = \sum_{r \geq 0} \varepsilon^r B_r(\alpha),$$

dove la successione di funzioni  $\{B_r(x)\}_{r \geq 0}$  è definita come

$$(1.24) \quad B_0 = \psi, \quad B_r = \sum_{s=1}^r \frac{1}{s!} \sum_{\substack{k_1 \geq 1, \dots, k_s \geq 1 \\ k_1 + \dots + k_s = r}} p_{k_1} \cdot \dots \cdot p_{k_s} D^s \psi.$$

Questa espressione è valida per una qualunque funzione  $\psi$  che compare nell'equazione, ed in particolare anche se al posto di  $\psi$  si pone la funzione  $\varphi$  stessa. Denotando in questo caso con  $\{A_s(x)\}_{s \geq 0}$  la successione definita dalla (1.24) si ottiene il seguente

<sup>11</sup> Si calcola anzitutto

$$\begin{aligned} (\varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots)^s &= \sum_{k_1 \geq 1, \dots, k_s \geq 1} \varepsilon^{k_1 + \dots + k_s} p_{k_1} \cdot \dots \cdot p_{k_s} \\ &= \sum_{r \geq s} \varepsilon^r \sum_{k_1 + \dots + k_s = r} p_{k_1} \cdot \dots \cdot p_{k_s}; \end{aligned}$$

Poi si sostituisce questa espressione nello sviluppo di Taylor, e si ottiene una doppia somma del tipo

$$\sum_{s \geq 1} \frac{1}{s!} \sum_{r \geq s} \varepsilon^r \dots D^s \psi;$$

infine si scambiano queste due somme, osservando che le condizioni  $s \geq 1, r \geq s$  diventano  $r \geq 1, 1 \leq s \leq r$ , e si ottiene un'espressione del tipo

$$\sum_{r \geq 1} \varepsilon^r \sum_{s=1}^r \frac{1}{s!} \dots D^s \psi,$$

che è quella cercata.

**Lemma 1.1:** La soluzione  $p$  dell'equazione (1.21) può scriversi nella forma

$$(1.25) \quad p = \alpha + \sum_{r \geq 1} \varepsilon^r A_{r-1}(\alpha) ,$$

dove la successione di funzioni  $\{A_r(x)\}_{r \geq 1}$  è definita come

$$(1.26) \quad A_0 = \varphi , \quad A_r = \sum_{s=1}^r \frac{1}{s!} \sum_{\substack{k_1 \geq 0, \dots, k_s \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_s = r-s}} A_{k_1} \cdot \dots \cdot A_{k_s} D^s \varphi .$$

**Dimostrazione.** Sostituendo  $\psi$  con  $\varphi$  nella (1.24) si ottiene la successione

$$(1.27) \quad A_0 = \varphi , \quad A_r = \sum_{s=1}^r \frac{1}{s!} \sum_{k_1 + \dots + k_s = r} p_{k_1} \cdot \dots \cdot p_{k_s} D^s \varphi ,$$

e per la (1.23) si potrà scrivere

$$\varphi(p) = \sum_{r \geq 0} \varepsilon^r A_r(\alpha) .$$

Se  $p$  è una radice dell'equazione (1.21), si dovrà ottenere un'identità sostituendo lo sviluppo (1.22) nell'equazione; si avrà dunque

$$\alpha - (\alpha + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots) + \varepsilon \sum_{r \geq 0} \varepsilon^r A_r(\alpha) = 0 ,$$

e questa diventa un'equazione per  $p_1, p_2, \dots$ , ove al posto delle  $A_r$  si sostituiscano le espressioni esplicite (1.27) in termini delle stesse  $p_1, p_2, \dots$ . Eguagliando i termini dello stesso ordine in  $\varepsilon$  si ottiene il sistema di infinite equazioni

$$p_s = A_{s-1}(\alpha) , \quad s \geq 1 .$$

Ora, il termine di destra dipende, per  $s$  fissato, solo da  $p_1, \dots, p_{s-1}$ , sicché questo sistema di equazioni si riduce, di fatto, ad una definizione ricorsiva della successione  $\{p_s\}_{s \geq 1}$ . Ora, si ottiene lo stesso risultato sostituendo nella (1.27)  $A_{k_1-1}, \dots, A_{k_s-1}$  come funzioni di  $x$  al posto dei numeri  $p_{k_1}, \dots, p_{k_s}$ , e poi calcolando  $A_r(\alpha)$ ; questo altro non è che la forma della soluzione data dal lemma. *Q.E.D.*

Vale la pena di osservare subito che la forma della soluzione, a parte le necessarie considerazioni sulla convergenza che verranno svolte di seguito, è *esplicita*: basta calcolare ricorsivamente la successione  $\{A_r\}_{r \geq 0}$ . Ciò però non è molto comodo, ed infatti l'espressione di Lagrange si presenta in forma più compatta.

Avendo a disposizione la forma di  $p$ , si ricava subito un secondo

**Lemma 1.2:** Se  $p$  è una radice dell'equazione (1.21), e  $\psi(x)$  una funzione analitica di  $x$ , si ha

$$(1.28) \quad \psi(p) = \sum_{r \geq 0} \varepsilon^r B_r(\alpha) ,$$

dove la successione  $\{B_r\}_{r \geq 0}$  di funzioni si calcola come

$$(1.29) \quad B_0 = \psi, \quad B_r = \sum_{s=1}^r \frac{1}{s!} \sum_{\substack{k_1 \geq 0, \dots, k_s \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_s = r-s}} A_{k_1} \cdot \dots \cdot A_{k_s} D^s \psi,$$

facendo uso della successione  $\{A_r\}_{r \geq 0}$  definita dal lemma 1.1.

**Dimostrazione.** Basta riscrivere lo sviluppo (1.23) e della successione (1.24) sostituendovi la forma (1.25) dello sviluppo di  $p$  stabilita nel lemma 1.1. Q.E.D.

Per cercare una forma più compatta per le espressioni trovate si può procedere, euristicamente, calcolando i primi termini delle successioni  $\{A_r\}_{r \geq 0}$  e  $\{B_r\}_{r \geq 0}$ . Ricordando che le  $A_r$  si ottengono dalle  $B_r$  sostituendo  $\psi$  con  $\varphi$  si può procedere “a scaletta”:

$$\begin{aligned} B_0 &= \psi & A_0 &= \varphi \\ B_1 &= A_0 D\psi = \varphi D\psi & A_1 &= \varphi D\varphi = \frac{1}{2} D\varphi^2 \\ B_2 &= A_1 D\psi + \frac{1}{2} A_0^2 D^2\psi \\ &= \frac{1}{2} (D\varphi^2)(D\psi) + \frac{1}{2} \varphi^2 D^2\psi \\ &= \frac{1}{2} D(\varphi^2 D\psi) & A_2 &= \frac{1}{2} D(\varphi^2 D\varphi) = \frac{1}{3!} D^2\varphi^3 \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

Sembra dunque naturale congetturare la forma generale

$$(1.30) \quad B_r = \frac{1}{r!} D^{r-1}(\varphi^r D\psi),$$

dalla quale seguirebbe subito

$$(1.31) \quad A_r = \frac{1}{(r+1)!} D^r \varphi^{r+1},$$

Questo infatti è il risultato di Lagrange ([58], § 16):

**Proposizione 1.3:** *Si consideri l'equazione nel campo complesso*

$$\alpha - x + \varphi(x) = 0$$

con  $\varphi(x)$  funzione analitica; sia  $p$  una radice di tale equazione, e  $\psi(x)$  una qualunque funzione analitica. Allora si ha

$$\psi(p) = \psi(\alpha) + \sum_{r \geq 1} \frac{1}{r!} D^{r-1}(\varphi^r D\psi),$$

dove il secondo membro deve essere calcolato in  $x = \alpha$  dopo aver eseguito le operazioni di derivazione.

**Dimostrazione.** L'asserto è una semplice conseguenza del lemma 1.2, ove si sostituisca la congettura (1.30) e si ponga  $\varepsilon = 1$ . Il vero problema dunque è dimostrare la (1.30) come conseguenza delle (1.29) e (1.26). A tal fine si procede per induzione. Per  $r = 1$  la (1.30) è vera, come si è già calcolato; se la si suppone vera fino a  $r - 1$ , da essa segue immediatamente la forma (1.31) di  $A_r$ , e basta verificare la (1.30) per  $B_r$ . A tal fine servono due formule ausiliarie. Se nel lemma 1.2 si pone  $\psi = \varphi^m$  con  $m > 1$  intero (ossia una potenza qualunque di  $\varphi$ ) si ottiene subito

$$\varphi^m(p) = \varphi^m(\alpha) + \sum_{r \geq 1} \varepsilon^r \sum_{s=1}^r \frac{1}{s!} \sum_{k_1 + \dots + k_s = r-s} A_{k_1} \cdot \dots \cdot A_{k_s} D^s \varphi^m .$$

D'altra parte, per la forma di  $\varphi$  data dal lemma 1.2 si calcola direttamente

$$\varphi^m(p) = \varphi^m(\alpha) + \sum_{r \geq 1} \varepsilon^r \sum_{k_1 + \dots + k_m = r} A_{k_1} \cdot \dots \cdot A_{k_m} .$$

I coefficienti dello sviluppo in  $\varepsilon$  devono essere gli stessi, e da qui segue l'eguaglianza, valida per qualunque  $r$  e qualunque  $m > 1$ ,

$$(1.32) \quad \sum_{s=1}^r \frac{1}{s!} \sum_{k_1 + \dots + k_s = r-s} A_{k_1} \cdot \dots \cdot A_{k_s} D^s \varphi^m = \sum_{k_1 + \dots + k_m = r} A_{k_1} \cdot \dots \cdot A_{k_m} ;$$

questa è la prima formula. La seconda formula si ottiene osservando che se si ammette la (1.30) fino a  $r - 1$  allora per  $1 \leq s \leq r - 1$  il coefficiente di  $\varepsilon^s$  nello sviluppo di  $\varphi^m$ , che altro non è che il membro di sinistra della (1.32), deve coincidere con  $\frac{1}{s!} D^{s-1}(\varphi^s D \varphi^m)$ ; dunque per  $1 \leq s < r$  vale l'eguaglianza

$$(1.33) \quad \frac{1}{s!} D^{s-1}(\varphi^s D \varphi^m) = \sum_{k_1 + \dots + k_m = s} A_{k_1} \cdot \dots \cdot A_{k_m} .$$

Si consideri ora il membro di destra della (1.30); per la formula di Leibniz<sup>12</sup> si ha

$$(1.34) \quad \begin{aligned} D^{r-1}(\varphi^r D \psi) &= \sum_{m=0}^{r-1} \binom{r-1}{m} (D^m \varphi^r) (D^{r-m} \psi) \\ &= \sum_{s=1}^r \binom{r-1}{r-s} (D^{r-s} \varphi^r) (D^s \psi) \end{aligned}$$

---

<sup>12</sup> Formula per la derivata di un prodotto:

$$D^n(f \cdot g) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (D^j f) (D^{n-j} g) .$$

(nel secondo passaggio si sostituisce l'indice con  $s = r - m$ ); qui si osserva che vale<sup>13</sup>

$$D^{r-s}\varphi^r = \frac{r}{s}D^{r-s-1}(\varphi^{r-s}D\varphi^s) .$$

Poiché  $s \geq 1$ , si può far uso della (1.33), e si ottiene

$$D^{r-s}\varphi^r = \frac{r(r-s)!}{s} \sum_{k_1+\dots+k_s=r-s} A_{k_1} \cdot \dots \cdot A_{k_s} .$$

Questa espressione va sostituita nella (1.34), che, dividendo per  $r!$ , diventa

$$\frac{1}{r!}D^{r-1}(\varphi^r D\psi) = \sum_{s=1}^r \frac{1}{s!} \sum_{k_1+\dots+k_s=r-s} A_{k_1} \cdot \dots \cdot A_{k_s} D^s\psi ,$$

e questa espressione coincide col membro di destra della (1.29), che definisce  $B_r$ . Si ottiene dunque la (1.30). Q.E.D.

La formula data da Lagrange è ricavata in modo formale, e occorre indagarne le proprietà di convergenza.<sup>14</sup> Una condizione sufficiente per la convergenza delle serie si ottiene come segue. Si considera un disco di raggio  $R$  centrato in  $\alpha$ :

$$\Delta_R(\alpha) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |x - \alpha| < R\} ;$$

si suppone che  $\varphi$  sia una funzione analitica in  $\Delta_R(\alpha)$ , e che soddisfi

$$(1.35) \quad |\varphi(x)| \leq F \quad \text{per } x \in \Delta_R(\alpha) .$$

Sotto queste condizioni si può far uso della stima di Cauchy per le derivate di una funzione analitica<sup>15</sup>, e precisamente

$$|D^s\varphi(\alpha)| \leq \frac{s!}{R^s}F , \quad s > 0$$

Stime analoghe valgono per le potenze successive di  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} |\varphi^m(x)| &\leq F^m \quad \text{per } x \in \Delta_R(\alpha) \\ |D^s\varphi^m(\alpha)| &\leq \frac{s!}{R^s}F^m . \end{aligned}$$

Con queste stime si può dimostrare la

**Proposizione 1.4:** *Siano  $\varphi(x)$  e  $\psi(x)$  due funzioni analitiche in un disco  $\Delta_R(\alpha)$ , e sia in questo disco  $|\varphi(x)| \leq F$ . Una condizione sufficiente per la convergenza della serie della proposizione 1.3 è che si abbia*

$$\frac{F}{R} \ln \frac{1}{1 - \frac{F}{R}} < 1 .$$

<sup>13</sup> Si calcola  $D\varphi^r = r\varphi^{r-1}D\varphi = r\varphi^{r-s}(\varphi^{s-1}D\varphi) = (r/s)\varphi^{r-s}D\varphi^s$ .

<sup>14</sup> Naturalmente, anche questo aspetto è discusso nella memoria di Lagrange del 1770. Qui ho preferito discostarmi dal suo procedimento, perché l'uso delle stime di Cauchy, non disponibili a Lagrange, rende la discussione molto più diretta.

<sup>15</sup> Si veda ad esempio Rudin [87], pag. 213.

**Dimostrazione.** Ponendo  $\psi(x) = x$  nella proposizione 1.3 si ha

$$p = \alpha + \sum_{r \geq 1} \frac{1}{(r+1)!} D^r \varphi^{r+1},$$

dove il membro di destra deve essere calcolato in  $x = \alpha$ . Per le stime di Cauchy, la serie a destra è maggiorata dalla serie

$$F \sum_{r \geq 1} \frac{1}{r} \left( \frac{F}{R} \right)^r,$$

che converge per  $F < R$ ; se ne deduce

$$|p - \alpha| \leq F \ln \frac{1}{1 - \frac{F}{R}}.$$

La condizione più forte richiesta nell'enunciato garantisce  $|p - \alpha| < R$ , e quindi  $p \in \Delta_R(\alpha)$ . Poiché sia  $\varphi$  che  $\psi$  sono analitiche in  $\Delta_r(\alpha)$ , possono svilupparsi in serie di potenze assolutamente convergenti nello stesso disco. Q.E.D.

### 1.2.6 Sviluppo in serie dell'eccentricità

L'applicazione del metodo di Lagrange alla soluzione dell'equazione di Keplero è immediata, poiché l'equazione ha già la forma richiesta dalla proposizione 1.3. In effetti, ricordando che l'equazione di Keplero è

$$u - e \sin u = \ell$$

basta sostituire  $\alpha$  con  $\ell$ ,  $x$  con  $u$ ,  $\varphi(x)$  con  $e \sin u$  e  $\psi(x)$  con  $u$ , sicché  $D\psi = 1$ . Se ne ricava direttamente la soluzione sviluppata in potenze dell'eccentricità:

$$(1.36) \quad u = \ell + \sum_{r \geq 1} \frac{e^r}{r!} \frac{d^{r-1}}{du^{r-1}} \sin^r u \Big|_{u=\ell}.$$

Naturalmente, occorrerebbe svolgere il calcolo delle derivate per avere i coefficienti di  $e^r$  in forma più esplicita, ma questo richiede solo pazienza, e non comporta particolari problemi.

Per curiosità, si può procedere al calcolo dei primi ordini. Per semplificare un po' il calcolo, si possono anzitutto esprimere le potenze del seno in serie di soli seni e coseni dei multipli dell'angolo. Senza cercare formule generali, del resto non necessarie ai fini del calcolo effettivo, si potrà far uso delle note formule

$$\begin{aligned} \sin^2 u &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2u) \\ \sin^3 u &= \frac{1}{4}(3 \sin u - \sin 3u) \\ \sin^4 u &= \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2u + \cos 4u) \\ &\dots \end{aligned}$$

Eseguendo le derivate si otterrà l'espressione esplicita

$$\begin{aligned}
 u &= \ell + e \sin \ell \\
 &+ \frac{e^2}{2} \sin 2\ell \\
 &+ \frac{e^3}{3!} \left( \frac{9}{4} \sin 3\ell - \frac{3}{4} \sin \ell \right) \\
 &+ \frac{e^4}{4!} (8 \sin 4\ell - 4 \sin 2\ell) \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

Non serve qui dilungarsi ulteriormente sugli sviluppi espliciti, che comunque si trovano pubblicati su molti testi. Può essere interessante però richiamare l'attenzione sul fatto che la formula risolutiva di Lagrange fornisce direttamente lo sviluppo non solo di  $u$ , ma anche di una funzione generica di  $u$ . Così, ad esempio, si supponga di voler calcolare l'anomalia vera (indicata con  $\psi$  nel paragrafo 1.1.3), mediante una delle equazioni (1.5) o (1.6); in questo caso occorre calcolare, rispettivamente,  $\tan(u/2)$  oppure  $\sin u$ . Per sostituzione nella formula di Lagrange si può trovare direttamente lo sviluppo di queste funzioni. Il lettore interessato potrà trovare questi sviluppi nella memoria originale di Lagrange del 1771.<sup>16</sup>

### 1.2.7 Sviluppo in serie di Fourier nell'anomalia media

Un secondo tipo di sviluppo, più naturale se si pensa che  $\ell$  è un angolo, consiste nello scrivere  $u - \ell$  come funzione periodica di  $\ell$  mediante il suo sviluppo in serie di Fourier, con coefficienti dipendenti dall'eccentricità  $e$ . Anche questo sviluppo si trova nella memoria di Lagrange del 1771; si può però procedere in modo più diretto seguendo, ad esempio, Whittaker [99], § 49.

Partendo ancora dall'equazione di Keplero

$$u - e \sin u = \ell$$

si deriva rispetto ad  $\ell$ , e si ottiene

$$(1.37) \quad \frac{du}{d\ell} = \frac{1}{1 - e \cos u}$$

Il termine di destra è una funzione periodica di  $\ell$  con periodo  $2\pi$ , e potrà quindi

---

<sup>16</sup> Gli sviluppi cui si è accennato possono sembrare anacronistici, in un'epoca in cui l'uso del calcolatore sembra aver cancellato con un colpo di spugna gran parte delle difficoltà dovute al gran numero di operazioni aritmetiche da svolgere. In realtà, questo non mi sembra del tutto evidente: se il calcolo della soluzione dell'equazione di Keplero può svolgersi con metodi iterativi, resta però il fatto che il calcolo di una funzione richiede comunque un'approssimazione polinomiale. Perché dunque preferire *a priori* un metodo che richiede almeno due passaggi a uno che fornisce direttamente lo sviluppo finale?

esprimersi in serie di Fourier, ossia nella forma

$$\frac{du}{d\ell} = a_0 + \sum_{m>0} (a_m \cos m\ell + b_m \sin m\ell) ,$$

con coefficienti

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\ell}{1 - e \cos u} \\ a_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos m\ell}{1 - e \cos u} d\ell \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin m\ell}{1 - e \cos u} d\ell . \end{aligned}$$

Con un cambio di variabili, ricavando  $d\ell$  dalla (1.37), si ottiene

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} du = 1 \\ a_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos[m(u - e \sin u)] du = 2J_m(me) \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin [m(u - e \sin u)] du = 0 , \end{aligned}$$

dove  $J_m(me)$  è la funzione di Bessel di ordine  $m$ . Sostituendo nello sviluppo e integrando in  $\ell$  si ottiene infine

$$(1.38) \quad u(\ell) = \ell + 2 \sum_{m>0} \frac{1}{m} J_m(me) \sin m\ell .$$

Facendo uso dello sviluppo delle funzioni di Bessel per piccoli valori di  $e$  si possono calcolare i primi coefficienti:<sup>17</sup>

$$\begin{aligned} 2J_1(e) &= e - \frac{e^3}{8} + \frac{e^5}{192} + \dots \\ J_2(2e) &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{6} + \frac{e^6}{48} \dots \\ \frac{2}{3}J_3(3e) &= \frac{3e^3}{8} - \frac{27e^5}{128} + \frac{243e^7}{5120} - \dots \\ \frac{1}{2}J_4(4e) &= \frac{e^4}{3} - \frac{4e^6}{15} + \frac{4e^8}{45} - \dots \end{aligned}$$

---

<sup>17</sup> Si veda un qualunque testo di analisi che comprenda un capitolo sulle funzioni speciali; ad esempio Smirnov [93], t. III, parte 2, cap. VI, §2. Può essere curioso osservare che questi sviluppi, nella loro forma generale, si trovano già nella memoria di Lagrange del 1771.

### 1.3 Gli elementi orbitali

Mediante le leggi di Keplero è possibile descrivere in modo completo la cinematica del moto planetario, naturalmente nell'approssimazione in cui la descrizione Kepleriana è considerata esatta. A tale scopo, supponendo noti i parametri che determinano l'ellisse, si comincia con il descrivere la posizione di un pianeta sulla sua orbita. In seguito si descrive la giacitura dell'ellisse nello spazio, al fine di tener conto del fatto che le orbite dei pianeti non sono complanari. Questo procedimento conduce in modo naturale a caratterizzare il moto di ciascun pianeta mediante sei parametri, detti *elementi orbitali*.

#### 1.3.1 Determinazione della posizione del pianeta sull'orbita

Dalla discussione del paragrafo precedente si può vedere come il moto di un pianeta sull'orbita ellittica sia completamente determinato quando si conoscano quattro costanti. Una scelta comune consiste nell'assegnare il semiasse maggiore  $a$ , l'eccentricità  $e$ , la direzione del perielio  $\vartheta_0$  e il tempo di passaggio al perielio  $\tau$ . A verifica di ciò, si osservi che la (1.12) fornisce il moto medio e la (1.9) l'anomalia media al tempo  $t$ ; risolvendo l'equazione di Keplero (1.10) si ricava poi  $u(t)$  e di conseguenza, risolvendo la (1.4), l'anomalia vera  $\psi(t)$ ; infine l'equazione dell'ellisse (1.3) dà  $r(t)$  direttamente tramite  $u(t)$ . Le funzioni  $r(t)$  e  $\psi(t)$  esprimenti la posizione del pianeta sull'orbita sono dunque note, e tramite queste è possibile calcolare anche la velocità.

Ad illustrazione di quanto detto si consideri il problema di ricavare le coordinate cartesiane e le corrispondenti componenti della velocità del pianeta ad un qualunque tempo  $t$ , in un riferimento con origine nel sole e con assi  $\xi, \eta$ , orientati in modo che la direzione positiva dell'asse  $\xi$  punti verso il perielio. Si tratta in pratica di determinare due funzioni

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(a, e, \vartheta_0, \tau, t) \\ \eta &= \eta(a, e, \vartheta_0, \tau, t) ,\end{aligned}$$

e le loro derivate rispetto al tempo. Facendo riferimento alla figura 1.3 si ottiene subito

$$(1.39) \quad \begin{aligned}\xi &= a(\cos u - e) \\ \eta &= a\sqrt{1 - e^2} \sin u ,\end{aligned}$$

e quindi il calcolo delle coordinate richiede solo di determinare  $u(t)$  risolvendo l'equazione di Keplero. Per trovare le componenti della velocità occorre derivare  $\xi$  ed  $\eta$  rispetto al tempo, ottenendo

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= -a\dot{u} \sin u \\ \dot{\eta} &= a\dot{u}\sqrt{1 - e^2} \cos u .\end{aligned}$$

L'applicazione di questa formula richiede la determinazione di  $\dot{u}$ ; a tal fine, derivando rispetto al tempo l'equazione di Keplero, si calcola

$$\dot{u}(1 - e \cos u) = n ,$$

e sostituendovi l'equazione dell'ellisse (1.3) si ottiene

$$\dot{u} = \frac{na}{r} ,$$

dove  $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ . Facendo uso anche della terza legge di Keplero nella forma (1.12) si ha infine

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -2\pi \sqrt{\frac{ka}{\xi^2 + \eta^2}} \sin u \\ \dot{\eta} &= 2\pi \sqrt{\frac{ka(1-e^2)}{\xi^2 + \eta^2}} \cos u . \end{aligned}$$

Pertanto, anche il calcolo della velocità è possibile quando sia nota l'anomalia eccentrica  $u(t)$ . È anche interessante osservare che il quadrato del modulo della velocità risulta essere indipendente dall'eccentricità:

$$(1.40) \quad \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = 4\pi^2 k \left( \frac{2}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} - \frac{1}{a} \right) .$$

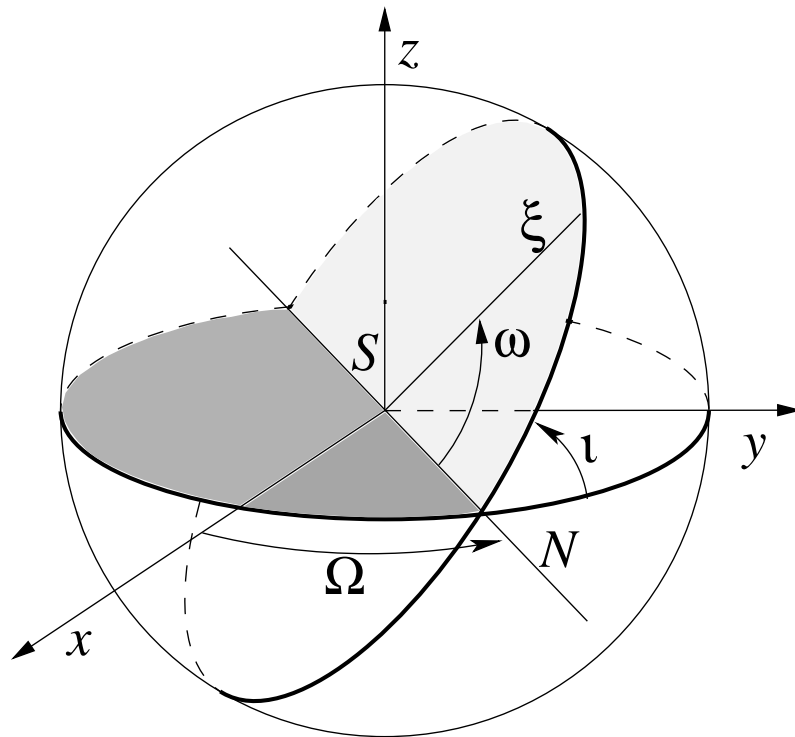
Per ricavare quest'ultima relazione si deve usare ancora l'equazione dell'ellisse (1.3), oltre all'eguaglianza elementare  $1 + e \cos u = 2 - (1 - e \cos u) = 2 - r/a$ .

### 1.3.2 Determinazione della giacitura dell'ellisse

Il modo più comodo consiste nel porsi in un sistema eliocentrico. Precisamente, sia  $(S, x, y, z)$  un riferimento cartesiano, che potrà dirsi assoluto, con origine nel sole; un tal riferimento può costruirsi ricorrendo alle stelle fisse. Si consideri poi un secondo riferimento cartesiano  $(S, \xi, \eta, \zeta)$  con origine nel sole e orientato in modo che l'asse  $z$  sia ortogonale al piano orbitale e la direzione positiva dell'asse  $x$  punti al perielio; in questo sistema le coordinate  $(\xi, \eta)$  del pianeta sono espresse dalle (1.39), mentre si ha identicamente  $\zeta = 0$ .

I due riferimenti possono ottenersi l'uno dall'altro mediante una rotazione, e questo consente di trovare facilmente le relazioni tra le coordinate. A tal fine è utile introdurre tre angoli  $\iota$ ,  $\Omega$  e  $\omega$  determinati col procedimento seguente (si veda la figura 1.9). L'angolo  $\iota$  formato dalle direzioni positive degli assi  $z$  e  $\zeta$  viene detto *inclinazione*. Se  $\iota$  non assume uno dei valori  $0, \pi$ , i piani  $x, y$  e  $\xi, \eta$  si intersecano lungo una retta  $N$  che viene detta *asse dei nodi*; tale retta contiene l'origine  $S$  comune ai due sistemi, ed è ortogonale al piano determinato dagli assi  $z, \zeta$ . Sull'asse dei nodi si prende ad arbitrio una direzione positiva; la scelta tradizionale consiste nel prendere la direzione del *nodo ascendente*, ossia del punto in cui il pianeta, percorrendo la sua orbita, passa dal semispazio  $z < 0$  al semispazio  $z > 0$ . L'angolo  $\Omega$  formato dalle direzioni positive degli assi  $x$  e  $N$  viene detto *longitudine del nodo*. Infine, l'angolo  $\omega$  formato dalle direzioni positive degli assi  $N$  e  $\xi$  viene detto *argomento del perielio*.<sup>18</sup>

<sup>18</sup> Si ricordi che l'asse  $\xi$  è diretto verso il perielio. L'angolo  $\omega$  sostituisce l'angolo  $\vartheta$  introdotto nel paragrafo precedente; il cambio di notazione vuole mettere in evidenza la scelta di misurare  $\omega$  rispetto all'asse dei nodi anziché rispetto ad una direzione arbitraria.



**Figura 1.9.** Ad illustrazione degli elementi orbitali. Assegnato un sistema di riferimento assoluto (solidale con le stelle fisse) con assi  $x, y, z$ , si identifica l'asse dei nodi  $N$  mediante l'intersezione del piano  $x, y$  col piano dell'orbita, qui rappresentato come obliquo. L'inclinazione  $\iota$  è l'angolo tra i due piani (o, equivalentemente, tra le normali ai due piani); la longitudine del nodo è l'angolo  $\Omega$  tra l'asse  $\xi$  e l'asse dei nodi. I due angoli  $\iota$  e  $\Omega$  determinano la giacitura del piano dell'orbita. In quest'ultimo piano si identifica poi la direzione  $\xi$  del perielio. L'argomento del perielio è l'angolo tra l'asse dei nodi  $N$  e l'asse  $\xi$ .

I tre angoli  $\iota, \Omega, \omega$  determinano completamente le relazioni tra i due sistemi di riferimento. A verifica di ciò si può procedere come segue: partendo dalla terna di assi  $(x, y, z)$  si esegue una rotazione  $R_\Omega$  di un angolo  $\Omega$  intorno all'asse  $z$ , così da portare l'asse  $x$  a sovrapporsi all'asse dei nodi  $N$ ; si esegue poi una seconda rotazione  $R_\iota$  di un angolo  $\iota$  intorno all'asse  $N$  (ora coincidente con  $x$ ), così da portare l'asse  $z$  a sovrapporsi all'asse  $\zeta$ ; infine si esegue una terza rotazione  $R_\omega$  di un angolo  $\omega$  intorno all'asse  $z$  (ora coincidente con  $\zeta$ ), così da portare l'asse  $x$  a sovrapporsi all'asse  $\xi$ ; la successione di queste tre rotazioni porta la terna  $(x, y, z)$  a sovrapporsi alla terna  $(\xi, \eta, \zeta)$ .

### 1.3.3 Trasformazione di coordinate

Supponendo ora note le coordinate  $\xi, \eta, \zeta$  di un pianeta si vogliono calcolare le coordinate  $x, y, z$ . In pratica si tratta di costruire una matrice di rotazione  $R$  (più propriamente, una matrice ortogonale, ovvero soddisfacente la proprietà  $RR^T = I$  (la matrice

identità), che può ottenersi componendo le tre rotazioni  $R_\Omega, R_\iota, R_\omega$  descritte sopra.

Le matrici corrispondenti a queste tre rotazioni si ricavano facilmente, trattandosi di rotazioni piane.<sup>19</sup> Si ha infatti

$$R_\Omega = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_\iota = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \iota & -\sin \iota \\ 0 & \sin \iota & \cos \iota \end{pmatrix}$$

$$R_\omega = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e la matrice completa  $R$  si ottiene come prodotto di queste tre rotazioni, ossia come  $R = R_\Omega \cdot R_\iota \cdot R_\omega$  (si noti che occorre passare da  $\xi, \eta, \zeta$  a  $x, y, z$ ). Si ha dunque

$$R = \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \cos \iota \sin \omega & -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \iota \cos \omega & \sin \Omega \sin \iota \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \cos \iota \sin \omega & -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \iota \cos \omega & -\cos \Omega \sin \iota \\ \sin \iota \sin \omega & \sin \iota \cos \omega & \cos \iota \end{pmatrix}$$

La trasformazione inversa, da  $x, y, z$  a  $\xi, \eta, \zeta$ , si ottiene semplicemente mediante la matrice trasposta  $R^T$ .

#### 1.3.4 Riferimenti rispetto al piano equatoriale e rispetto all'eclittica

Quanto detto vale per qualunque scelta del riferimento  $(S, x, y, z)$ , che rappresenta qui un riferimento assoluto. In pratica, si hanno comunemente due possibilità; a seconda che si prenda come piano di riferimento il piano equatoriale oppure il piano dell'eclittica.

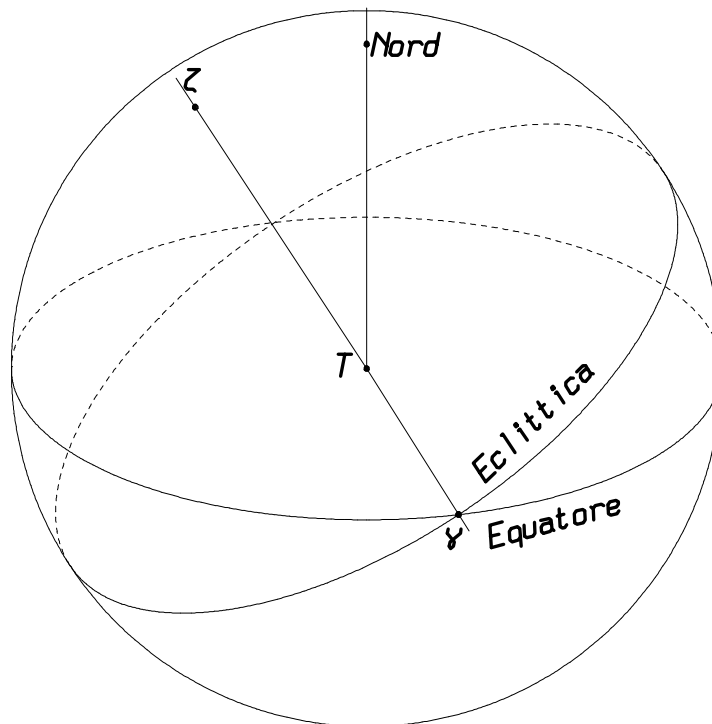
Ci si pone in un primo tempo in un sistema geocentrico, e si considera il cielo delle stelle fisse; questo può ben descriversi, coerentemente con ciò che vediamo, come la superficie di una sfera. Su questa sfera si tracciano due circonferenze: la prima, detta *equatore celeste*, altro non è che la proiezione sulla sfera celeste dell'equatore terrestre; la seconda, detta *eclittica*, è la circonferenza percorsa dal sole nel suo moto annuo, così come è vista dalla terra (figura 1.10).

Il piano equatoriale e il piano dell'eclittica (determinati da queste due circonferenze) non coincidono: le normali ai due piani formano un angolo di circa  $23^\circ 27'$ . La normale al piano equatoriale (ovvero l'asse di rotazione terrestre) interseca la sfera nei

---

<sup>19</sup> Nel piano, siano  $x, y$  e  $\xi, \eta$  due riferimenti cartesiani con origine in comune, e tali che  $\xi, \eta$  sia ruotato di un angolo  $\vartheta$  rispetto a  $x, y$ . Si ricava subito la trasformazione di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

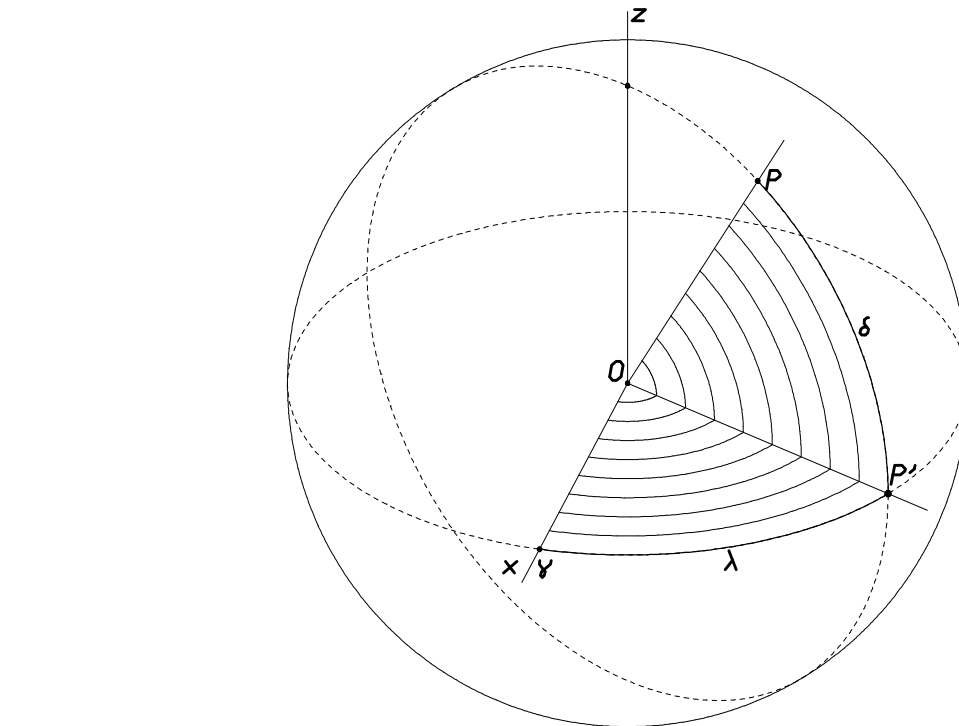


**Figura 1.10.** Il sistema di riferimento celeste geocentrico. La sfera rappresenta il cielo delle stelle fisse; il moto diurno degli astri determina i poli e l'equatore celeste; il moto annuo del sole determina l'eclittica. L'angolo  $\iota$  tra le normali ai piani dell'eclittica e dell'equatore è di circa  $23^{\circ}27'$ .

poli (il polo nord si trova in prossimità della stella polare); l'asse dei nodi (ovvero la retta determinata dall'intersezione dei due piani), interseca la sfera nei punti corrispondenti alla posizione del sole all'equinozio di primavera (detto anche *punto vernale* o *punto  $\gamma$* ) e all'equinozio d'autunno.

Nel caso del riferimento equatoriale l'asse  $z$  è costituito dall'asse polare, e l'asse  $x$  è l'asse dei nodi, orientato in direzione del punto vernale (questo è sufficiente, perché l'asse  $y$  si ottiene semplicemente richiedendo che la terna  $x, y, z$  sia destrorsa). La posizione di un qualunque corpo celeste rispetto al centro della terra viene determinata da due angoli (si noti che la distanza non è rilevante ai fini del puntamento del telescopio): dato il punto  $P$  sulla sfera (si veda la figura 1.11), si ottiene il punto  $P'$  proiettando la semiretta  $OP$  sul piano equatoriale ed intersecando la proiezione con la sfera; l'angolo  $\lambda = \widehat{\gamma OP'}$ , misurato lungo l'equatore in direzione Ovest–Est, prende il nome di *ascensione retta*; l'angolo  $\delta = \widehat{P'OP}$ , misurato lungo il meridiano a partire dall'equatore, prende il nome di *declinazione*.

Nel caso del riferimento rispetto all'eclittica l'asse  $z$  è la normale al piano dell'eclittica, mentre l'asse  $x$  è ancora l'asse dei nodi. La posizione di un punto sulla sfera celeste si ricava ancora come per il riferimento equatoriale, con la sola avvertenza che il piano equatoriale va sostituito con quello dell'eclittica; in questo caso gli angoli  $\lambda$  e  $\delta$  vengono chiamati rispettivamente *longitudine* e *latitudine celeste*.



**Figura 1.11.** Posizione di un punto sulla sfera celeste in un sistema di coordinate geocentriche: bastano i due angoli  $\lambda$  e  $\delta$ , in quanto la distanza  $|OP|$  è irrilevante ai fini del puntamento del telescopio.

I riferimenti così costruiti sono, come si è osservato, geocentrici, ma possono essere traslati indifferentemente in qualunque punto nello spazio. Ai fini dello studio del moto planetario la scelta naturale consiste nel porsi in un sistema eliocentrico. Le orbite dei pianeti sono allora determinate da sei costanti, dette *elementi orbitali*, e precisamente

$i$	inclinazione del piano dell'orbita
$\Omega$	longitudine del nodo ascendente
$\omega$	argomento del perielio
$a$	semiasse maggiore
$e$	eccentricità
$\tau$	tempo del passaggio al perielio.

Queste quantità devono essere determinate mediante l'osservazione. È d'uso anche considerare le quantità  $\Omega + \omega$ , detta longitudine del perielio, e  $\Omega + \omega + \ell$ , detta longitudine media del pianeta.

### 1.3.5 Note sul calcolo della posizione rispetto all'osservatore

Dal punto di vista di un osservatore terrestre la determinazione della posizione sulla sfera celeste, necessaria ai fini del puntamento del telescopio, richiede un ulteriore calcolo per riferirsi ad un sistema geocentrico. A questo scopo basta determinare la

posizione della terra nel sistema eliocentrico, ed effettuare una traslazione. Occorre inoltre, per un osservatore posto sulla superficie della terra, tener conto del moto diurno della sfera celeste (che richiede una rotazione) e del raggio terrestre (ancora una traslazione); quest'ultima traslazione può essere trascurata per oggetti lontani, ma non per oggetti vicini alla terra, quali i satelliti.

Fin qui lo schema kepleriano. Ma l'osservazione è ulteriormente influenzata dal fatto che i sistemi di riferimento descritti non sono, in realtà, fissi, oltre che da altri effetti fisici. In modo schematico, si possono almeno richiamare i fatti seguenti.

- i. L'asse di rotazione della terra non ha direzione costante. Il moto più rilevante è costituito dalla *precessione*, in conseguenza della quale l'asse descrive una superficie conica intorno alla normale al piano dell'eclittica, con un periodo di circa  $2.6 \times 10^4$  anni; è questa la causa maggiore della *precessione degli equinozi*, già nota a Ipparco ( $\approx 129$  a.C.). Alla precessione si sovrappone poi la *nutazione*, in conseguenza della quale il polo celeste descrive una piccola ellisse di assi  $18.42''$  e  $13.72''$ .
- ii. Il piano dell'eclittica non è costante, ma si muove lentamente provocando un ulteriore spostamento del punto vernale, molto meno rilevante di quello dovuto alla precessione dell'asse terrestre ( $\approx 0.114''$  all'anno per lo spostamento del piano dell'eclittica, contro i  $\approx 50.26''$  della precessione dell'asse); a questo fenomeno si dà il nome di *precessione planetaria*.
- iii. La velocità finita di propagazione della luce richiede una correzione dipendente dalla distanza dell'oggetto osservato. Questa correzione è rilevante per i pianeti.
- iv. La rifrazione atmosferica provoca uno spostamento apparente della posizione degli astri; tale effetto è nullo allo zenith (determinato dalla verticale del luogo di osservazione) e massimo all'orizzonte, dove arriva a circa  $35'$ .
- v. La determinazione dell'unità di tempo, tipicamente fondata sul moto diurno degli astri, risente del rallentamento della velocità di rotazione della terra, che provoca un allungamento del giorno solare di circa  $1.4 \times 10^{-3}$  secondi al secolo.
- vi. L'asse di rotazione della terra si sposta, sulla sua superficie, con oscillazioni la cui ampiezza può arrivare a circa  $1''$ .

La rilevanza o meno di questi fenomeni ai fini dell'osservazione dei corpi celesti dipende, ovviamente, da cosa si osserva. In particolare, alcuni fenomeni, quali la precessione degli equinozi, o la non costanza degli elementi orbitali, o il rallentamento della rotazione terrestre, possono produrre effetti consistenti su intervalli di tempo sufficientemente lunghi (si pensi ad esempio al confronto delle datazioni attuali delle eclissi con le osservazioni descritte in documenti antichi).

