

2

LA GRAVITAZIONE DI NEWTON

L'introduzione della dinamica nei termini in cui noi la conosciamo è dovuta a Newton^[99], e ad essa è dedicato questo capitolo. La discussione è limitata alla parte di diretto interesse per il moto planetario, assumendo noti i principi fondamentali per i quali si rimanda ai trattati di Meccanica Razionale.

In un primo tempo si mostra come dalle leggi di Keplero si giunga ad enunciare la legge di gravitazione universale. Si passa poi a considerare i problemi classici dei due corpi e del moto di un punto materiale in un campo di forze centrali. La discussione di questi problemi può svolgersi in un ambito ben più vasto di quello previsto dalla legge Newtoniana di gravitazione; ne risulta una classe di modelli dinamici che presenta una varietà molto ricca ed interessante di comportamenti. Il teorema di Bertrand però pone in evidenza una caratteristica singolare del potenziale kepleriano: tra quelli che possono considerarsi significativi perché danno origine a forze che tendono a zero con la distanza è il solo per cui tutte le orbite limitate siano chiuse.

L'estensione della dinamica al problema di n corpi non è semplice: il sistema non è più, in generale, integrabile (per essere più precisi, non è mai stato integrato). La ricerca delle soluzioni di questo problema si presenta quindi alquanto complessa, ed è stata lo stimolo principale allo sviluppo dei metodi perturbativi. È però possibile illustrare in modo abbastanza semplice, anche se per la verità alquanto grossolano, i motivi su cui si fonda la validità dello schema Kepleroiano anche per il sistema solare completo. Gli sviluppi successivi condurranno alla nascita della teoria classica delle perturbazioni, iniziata da Lagrange e Laplace.

2.1 La legge di gravitazione newtoniana

Riflettendo sulle prime due leggi di Keplero si arriva alla conclusione che l'accelerazione di un pianeta in moto su un'orbita ellittica è diretta verso il Sole, ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra Sole e pianeta. Si deve però osservare che anche questa è una considerazione di carattere cinematico. Per introdurre la dinamica, e poi la gravitazione newtoniana, occorrono altri tre passi.

Il primo passo consiste nell'attribuire l'accelerazione dei pianeti ad una forza che agisce su di essi. Ciò non è affatto scontato. Il concetto di forza nasce dalla nostra esperienza quotidiana, e principalmente dalla statica: si pensi alla legge del parallelogramma delle forze, o alla leva, o al piano inclinato. Per formalizzare il concetto si presuppone che le forze si possano misurare, il che richiede l'uso di strumenti adatti, ad esempio dinamometri o bilance. Newton ci poi ha insegnato quale relazione esista tra forza ed accelerazione, condensando il tutto nelle tre leggi fondamentali della Meccanica. Ora, non è evidente a priori che gli stessi concetti siano estendibili ai fenomeni astronomici: la forza che agisce su un pianeta non è misurabile in modo diretto. Dobbiamo invece assumere che le leggi fisiche o chimiche che valgono sulla terra si applichino a tutto l'universo: un'affermazione che oggi troviamo del tutto naturale, ma certo non scontata in epoca copernicana o galileiana. Nel caso dei moti planetari estendere all'universo le leggi fisiche che verifichiamo in laboratorio significa affermare che se si osserva un'accelerazione vi deve essere una forza che ne è la causa.

Il secondo passo consiste nel riconoscere che se esiste una forza che agisce sui pianeti questa deve essere attribuita al Sole, ossia che il Sole diventa la sorgente di un campo di forze, descrivibile in modo indipendente dal pianeta: ciò è conseguenza della terza legge di Keplero. Anche questo passo è tutt'altro che immediato, e può vedersi in qualche modo come il coronamento del sogno che Keplero inseguì per tutta la vita: trovare l'unità e l'armonia nelle apparenti differenze dei moti planetari.

Il terzo passo consiste, in un certo senso, nel rimettere in discussione la rivoluzione copernicana: il Sole non ha un ruolo privilegiato, perché qualunque massa posta nello spazio esercita una forza gravitazionale su qualunque altra massa. Ciò è conseguenza del principio di azione e reazione, che noi possiamo sperimentare nei nostri laboratori e che ancora una volta estendiamo ai fenomeni celesti. Da qui nasce la gravitazione universale.

2.1.1 Dipendenza dell'accelerazione dalla distanza

Si osservi innanzitutto che le prime due leggi di Keplero, pur senza tener conto della forma ellittica dell'orbita, privilegiano comunque un piano e, in questo piano, un punto S rispetto al quale viene misurata la velocità areolare. È quindi naturale considerare sul piano dell'orbita un sistema di coordinate polari r, ϑ dove r è la distanza da S e ϑ è l'angolo misurato rispetto ad una direzione fissa arbitraria. È conveniente allora scomporre sia la velocità v che l'accelerazione a nelle componenti radiali v_r, a_r e tangenti (ortogonali al raggio) v_ϑ, a_ϑ . È noto che tali componenti sono¹

$$(2.1) \quad \begin{aligned} v_r &= \dot{r} , & a_r &= \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 , \\ v_\vartheta &= r\dot{\vartheta} , & a_\vartheta &= r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} . \end{aligned}$$

¹ Le relazioni (2.1) e (2.2) si deducono come segue: detti $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y$ dei versori diretti come gli assi x, y , si considerino i versori radiali $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_x \cos \vartheta + \mathbf{u}_y \sin \vartheta$ e tangente $\mathbf{u}_\vartheta = -\mathbf{u}_x \sin \vartheta + \mathbf{u}_y \cos \vartheta$. Si calcola subito $\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{\vartheta} \mathbf{u}_\vartheta$ e $\dot{\mathbf{u}}_\vartheta = -\dot{\vartheta} \mathbf{u}_r$. Per un punto P del piano distinto da S si ha allora $\overline{SP} = r \mathbf{u}_r$, e quindi, derivando, $\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\vartheta} \mathbf{u}_\vartheta$ e $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2) \mathbf{u}_r + (r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta}) \mathbf{u}_\vartheta$, ossia le (2.1). In un tempo dt il vettore \overline{SP} descrive l'area $dA = \frac{1}{2} r^2 d\vartheta = \frac{1}{2} r^2 \dot{\vartheta} dt$, e da qui segue subito la (2.2).

Detta ora $\mathcal{A}(t)$ l'area descritta dal raggio vettore, la velocità areolare si scrive

$$(2.2) \quad \dot{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\vartheta} .$$

Proposizione 2.1: *Se un punto P si muove in un piano obbedendo alla seconda legge di Keplero rispetto ad un centro S , allora l'accelerazione è puramente radiale, e se l'orbita $r(\vartheta)$ è nota, l'accelerazione è*

$$(2.3) \quad a_r = -\frac{4C^2}{r^2} \left(\frac{d^2}{d\vartheta^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right)$$

dove $C = \dot{\mathcal{A}}$ è la velocità areolare.

La (2.3) è nota come formula di Binet.

Proposizione 2.2: *Se l'orbita del punto P è un'ellisse con S in un fuoco, allora l'accelerazione è inversamente proporzionale al quadrato della distanza di P da S , e vale*

$$(2.4) \quad a_r = -\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \frac{1}{r^2}$$

dove T è il periodo dell'orbita.

Dimostrazione della proposizione 2.1. Per la seconda legge di Keplero si ha $r^2 \dot{\vartheta}/2 = C$, ovvero, derivando rispetto al tempo, $rr\ddot{\vartheta} + r^2 \dot{\vartheta}^2/2 = ra_{\vartheta}/2 = 0$, e quindi $a_{\vartheta} = 0$. Questo mostra che l'accelerazione è puramente radiale. Derivando $r(\vartheta)$ rispetto al tempo si ha

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\vartheta} \dot{\vartheta} = \frac{2C}{r^2} \frac{dr}{d\vartheta} = -2C \frac{d}{d\vartheta} \frac{1}{r} ;$$

derivando ulteriormente si ha poi

$$\ddot{r} = -2C \dot{\vartheta} \frac{d^2}{d\vartheta^2} \frac{1}{r} = -\frac{4C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\vartheta^2} \frac{1}{r} .$$

La (2.3) si ottiene sostituendo quest'ultima relazione nell'espressione della componente radiale a_r dell'accelerazione, data dalla (2.1). Q.E.D.

Dimostrazione della proposizione 2.2. Basta sostituire nella formula di Binet (2.3) l'espressione (1.1) dell'ellisse in coordinate polari, ed eseguire le derivate. Si ottiene così

$$a_r = -\frac{4C^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2} .$$

La (2.4) si ottiene infine sostituendo il valore della velocità areolare $C = \pi ab/T$, dove b è il semiasse minore dell'ellisse, e quello del parametro $p = b^2/a$ dato dalla terza delle (1.2). Q.E.D.

2.1.2 La terza legge di Keplero e la legge di gravitazione universale

Il risultato della proposizione 2.2 è già di per sé interessante: l'accelerazione del pianeta dipende solo dalla sua distanza dal sole. Viene dunque mantenuta una simmetria rotazionale che, in un modo o nell'altro, è già presente nelle teorie pre-Newtoniane. Resta tuttavia la possibilità che la costante di proporzionalità a^3/T^2 che compare nella (2.4) dipenda dal pianeta. Ora, la terza legge di Keplero afferma precisamente che *la quantità a^3/T^2 è una costante che non dipende dal pianeta, ma solo dal sole.*

Fin qui le deduzioni rigorose dalle leggi di Keplero. Ciò che si può aggiungere è frutto della profonda intuizione di Newton, che arriva fino alla formulazione della legge di gravitazione universale.

In conseguenza della terza legge si può concepire che lo spazio intorno al sole sia sede di un campo di accelerazioni creato dal sole stesso. Se poi si accetta la legge di Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ (massa \times accelerazione = forza), allora diremo che il sole crea un campo di forze inversamente proporzionale al quadrato della distanza da esso e proporzionale alla massa del pianeta. In altre parole, su qualunque corpo celeste posto nello spazio agirebbe una forza diretta verso il sole di intensità $f(r) = \Gamma m/r^2$, dove m è la massa del corpo e Γ una costante che dipende solo dal sole.

Si deve anche osservare come l'accelerazione del pianeta non dipenda dalla sua massa. Il fatto che questa circostanza si verifichi anche per il moto dei gravi in prossimità della superficie terrestre suggerisce che tale moto sia attribuibile ad una causa analoga, ossia che anche la terra crei intorno a sé un campo di accelerazioni; si può poi ammettere che questo campo si estenda fino alla luna, e che possa anche dar ragione del moto della luna intorno alla terra.²

Ammissa l'esistenza di un campo di accelerazioni intorno alla terra, è spontaneo pensare all'esistenza di un campo di forze che si estende fino al sole, ossia che la terra eserciti sul sole una forza di intensità $\gamma M/r^2$, dove M è la massa del sole e γ una costante che dipende solo dalla terra. Si noti bene che questo punto di vista conduce inevitabilmente a negare quella centralità del sole che costituisce il presupposto del modello Kepleriano.

Infine, se si accetta il principio di azione e reazione si deve ammettere l'eguaglianza $\Gamma m = \gamma M$, sicché la forza che si esercita fra la terra e il sole deve avere intensità $\mathcal{G}mM/r^2$, dove \mathcal{G} è una costante universale, dipendente solo dal sistema di misura. Se non si attribuisce qualche proprietà particolare alla terra e al sole, è spontaneo ammettere, con Newton, che *tra due masse qualsiasi m_1, m_2 si esercita una forza gravitazionale attrattiva di intensità $\mathcal{G}m_1m_2/r^2$, dove r è la distanza tra le due masse.*

Una volta accettata la teoria Newtoniana, si deve poi rovesciare il problema: le leggi di Keplero devono essere giustificate sulla base della dinamica, assumendo la legge di gravitazione. È subito evidente che il problema è estremamente complesso: non è più lecito considerare, con Keplero, un pianeta per volta, ma occorre, in linea

² Si ricordi, a tal proposito, che l'esistenza di satelliti intorno a Giove era già nota ai tempi di Newton, grazie alla scoperta di Galileo. Dunque, il fatto che la terra avesse un satellite non costituiva più un caso eccezionale.

di principio, scrivere le equazioni di moto per *tutti* i corpi presenti nel sistema solare, tenendo conto della forza gravitazionale agente tra tutte le coppie, e risolvere il sistema di equazioni che ne risulta.

In altre parole, se si considerano N corpi si ha un sistema di $3N$ equazioni differenziali del secondo ordine, in ciascuna delle quali l'espressione della forza contiene $N - 1$ termini distinti. Ad esempio, Newton avrebbe dovuto scegliere almeno $N = 8$ (sole, terra, luna e i cinque pianeti allora conosciuti); questo, naturalmente, trascurando i satelliti di Giove e le comete, assumendo che null'altro si trovi nel sistema solare, e che le stelle non abbiano alcuna influenza sul moto planetario. Inoltre occorre anche ammettere che i pianeti si possano considerare come punti materiali, o almeno, come Newton si preoccupò di dimostrare, che si possano rappresentare i pianeti come sfere perfette e perfettamente rigide.

2.2 La mela e la luna

Una prima verifica della legge di gravitazione, portata a termine dallo stesso Newton, si ha risolvendo quello che viene talvolta chiamato il “problema della mela di Newton”: *mostrare che l'accelerazione di gravità alla superficie della terra e l'accelerazione centripeta della luna sono effettivamente proporzionali agli inversi dei quadrati delle distanze dal centro della terra*. A tal fine, denotando con a l'accelerazione centripeta della Luna, ϱ il raggio dell'orbita lunare, g l'accelerazione di gravità alla superficie della Terra e R il raggio della terra e accettando la legge di gravitazione avremmo

$$a = \frac{\Gamma}{\varrho^2}, \quad g = \frac{\Gamma}{R^2},$$

dove Γ è una costante che dipende dalla Terra. Il valore di Γ non era noto a Newton, ma risulta irrilevante per il nostro calcolo in quanto ci basta verificare che valga

$$\frac{g}{a} \sim \frac{\varrho^2}{R^2}.$$

Svolgiamo il calcolo assumendo che la luna si muova su un'orbita circolare attorno alla terra, e facendo uso dei dati astronomici a noi noti; adottiamo il sistema di misura MKS (metro–kilogrammo–secondo).

$$\begin{aligned} \varrho &= 3.844 \times 10^8 \text{ m} && \text{raggio dell'orbita lunare;} \\ T &= 2.361 \times 10^6 \text{ s} && \text{periodo sidereo della Luna;} \\ g &= 9.803 \text{ m/s}^2 && \text{accelerazione di gravità;} \\ R &= 6.378 \times 10^6 \text{ m} && \text{raggio della Terra.} \end{aligned}$$

Il calcolo dell'accelerazione radiale della Luna ci dà

$$a = \omega^2 \varrho = \frac{4\pi^2 \varrho}{T^2} = 2.722 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2,$$

dove ω è la velocità angolare della Luna sulla sua orbita.³ Calcoliamo poi

$$\frac{g}{a} = 3.601 \times 10^3, \quad \frac{g^2}{R^2} = 3.632 \times 10^3,$$

sicché le due quantità differiscono di meno di 1 ‰, una differenza ben giustificata dalle nostre approssimazioni.⁴

2.3 Il problema dei due corpi

L'estensione più immediata del modello Kepleriano (moto di un singolo pianeta rispetto al sole) è senz'altro costituita dal problema dei due corpi: *due punti materiali di massa m_1, m_2 si muovono nello spazio sotto l'azione di forze mutue di attrazione o repulsione soddisfacenti il principio di azione e reazione, agenti lungo la retta congiungente i due punti e dipendenti dalla sola distanza.*

In un sistema di riferimento cartesiano fisso le equazioni di Newton si scrivono

$$(2.5) \quad \begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \end{aligned}$$

dove \mathbf{F} è la forza che il punto m_2 esercita su m_1 . La forza si potrà inoltre scrivere nella forma

$$(2.6) \quad \mathbf{F} = f(r) \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{r}$$

dove $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ è la distanza tra i due punti e $f(r)$ è l'intensità, negativa in caso di forza attrattiva e positiva in caso di forza repulsiva. Questa forma tiene conto di tutte le ipotesi sulle forze specificate nell'enunciato del problema.

È ben noto che (sotto modiche condizioni di regolarità della funzione $f(r)$, certamente soddisfatte nel caso Kepleriano) la forza (2.6) ammette potenziale, sicché si potrà scrivere $\mathbf{F} = -\text{grad } V$, o, in modo equivalente, $f = -\frac{dV}{dr}$, dove $V = V(r)$ è una funzione della distanza.

È conveniente introdurre una trasformazione di coordinate

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{X} &= \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \end{aligned}$$

³ È utile una precisazione sul periodo lunare. Si deve distinguere il *periodo sidereo* di 27 giorni, 7 ore e 43 minuti, necessario perché la Luna compia una rivoluzione completa rispetto alle stelle fisse, dal *periodo sinodico* di 29 giorni, 12 ore, 44 minuti e 2.8 secondi, necessario per il completamento del ciclo delle fasi lunari. In questo calcolo si assume praticamente che la terra sia ferma rispetto al cielo delle stelle fisse, e quindi si deve far uso del periodo sidereo, che nella tabella è espresso in secondi.

⁴ I dati di cui si fa uso in questo calcolo sono quelli riportati nelle tabelle dei testi di astronomia. Nel calcolo svolto da Newton si assumeva che la distanza della luna fosse circa 60 volte il raggio terrestre, un valore non molto dissimile da $g/R \simeq 60.27$ che risulterebbe dai nostri dati.

dove \mathbf{X} è il *baricentro* del sistema, e \mathbf{r} la posizione della massa m_2 rispetto ad m_1 . Si ottengono così le equazioni

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}} &= 0 \\ \mu \ddot{\mathbf{r}} &= -\text{grad } V, \end{aligned}$$

dove μ è la *massa ridotta*, definita come

$$(2.9) \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Si conclude immediatamente che:

- i. *il baricentro dei due corpi si muove di moto rettilineo uniforme*
- ii. *il moto della massa m_2 rispetto a m_1 è lo stesso che si avrebbe se la massa m_1 fosse fissa e agisse su m_2 con la forza derivata dall'energia potenziale $\frac{m_1+m_2}{m_1}V(r)$.*

Si noti bene che nessuna delle due masse risulta privilegiata in questo schema: se un punto dello spazio deve essere privilegiato, questo è il baricentro \mathbf{X} . Del resto, la scelta di \mathbf{r} come coordinata può giustificarsi dicendo che si vuole descrivere direttamente il moto di uno dei due corpi così come è visto da un osservatore solidale con l'altro corpo. Se ci si vuole riferire al baricentro, basta osservare che le coordinate $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{X}$ e $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{X}$ relative al baricentro sono

$$(2.10) \quad \mathbf{r}'_1 = -\frac{\mu}{m_1}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}'_2 = \frac{\mu}{m_2}\mathbf{r},$$

sicché il movimento visto da un osservatore solidale con il baricentro è, a parte un fattore di scala, lo stesso visto da un osservatore solidale con una qualunque delle due masse.

2.4 Il problema del moto centrale: risultati generali

Le conclusioni del paragrafo 2.3 riconducono lo studio del problema dei due corpi a quello ben noto del moto centrale: *un punto materiale P si muove nello spazio sotto l'azione di una forza che è sempre diretta come la congiungente il punto P con un centro fisso O .*⁵ La sola differenza rilevante è che la massa del punto P deve essere sostituita con la massa ridotta del sistema dei due corpi.

⁵ Si noti che non è richiesto che \mathbf{F} dipenda solo dalla distanza $r = |\mathbf{x}|$; questa ipotesi verrà usata più avanti. Una tale generalizzazione può apparire innaturale, ma ha almeno due buone giustificazioni. La prima giustificazione è che l'introduzione di una dipendenza della forza dall'orientamento diventa inevitabile quando si considerano corpi estesi e non dotati di simmetria sferica, sicché il considerare il problema generale non è frutto di pura curiosità intellettuale. Resta in ogni caso interessante, ed è questa la seconda giustificazione, indagare quanto generali siano le leggi di Keplero, e quindi quali siano le minime ipotesi richieste per assicurarne la validità.

2.4.1 Conservazione del momento angolare, o legge delle aree

Se si prende il centro O come origine di un riferimento cartesiano si ha l'equazione

$$(2.11) \quad \mu \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

con una forza $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ diretta come \mathbf{x} , ossia soddisfacente la condizione

$$(2.12) \quad \mathbf{x} \wedge \mathbf{F} = 0 .$$

Vale la seguente proposizione, detta anche *legge delle aree*.

Proposizione 2.3: *Sotto l'ipotesi (2.12) che il campo di forze sia di tipo centrale, l'equazione di Newton (2.11) ammette l'integrale primo*

$$\mathbf{M} = \mathbf{x} \wedge \mu \dot{\mathbf{x}} .$$

Dimostrazione. Basta derivare rispetto al tempo:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{x} \wedge \mu \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{F} ,$$

e quest'ultima espressione si annulla perché \mathbf{F} e \mathbf{x} sono paralleli. Q.E.D.

Corollario 2.4: *L'orbita di un pianeta in un campo di forze centrali è piana, e obbedisce alla seconda legge di Keplero (la velocità areolare rispetto al centro O è costante).*

Dimostrazione. Che l'orbita sia piana segue dalla costanza della direzione del momento angolare: per definizione di prodotto vettore, \mathbf{x} e $\dot{\mathbf{x}}$ giacciono ad ogni istante t nel piano passante per O e perpendicolare al vettore costante \mathbf{M} ; se $\mathbf{M} = 0$, si verifica subito che il moto è rettilineo, e quindi a maggior ragione piano. La costanza della velocità areolare segue dal fatto che il modulo $|\mathbf{M}|$ è costante: per definizione di prodotto vettore, il modulo $|\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{x}} dt|$ è l'area del parallelogramma di lati \mathbf{x} e $\dot{\mathbf{x}} dt$; questa a sua volta è il doppio dell'area $d\mathcal{A}$ descritta dal vettore \mathbf{x} nel tempo dt . Si ha dunque

$$(2.13) \quad \dot{\mathcal{A}} = \frac{|\mathbf{M}|}{2\mu} ,$$

e segue che $\dot{\mathcal{A}}$ è costante. Q.E.D.

2.4.2 Equazione dell'orbita

Stabilito che il moto è piano, è conveniente scegliere il riferimento cartesiano in modo che l'asse z sia orientato come \mathbf{M} , sicché il moto avviene nel piano x, y ; questo consente di ridurre il sistema (2.11) dal sesto al quarto ordine. È poi conveniente passare nel piano x, y a coordinate polari r, ϑ , mediante la consueta trasformazione $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$.

Se si denota con f la componente radiale della forza, la sola non nulla, il sistema (2.11) si riduce a

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \mu(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2) &= f \\ \frac{d}{dt}(\mu r^2 \dot{\vartheta}) &= 0 . \end{aligned}$$

A questo sistema si arriva facilmente usando le espressioni (2.1) dell'accelerazione in coordinate polari. Si ricordi che f dipenderà, in generale, da r e ϑ .

La seconda delle (2.14) è ormai ben nota, perché esprime ancora la conservazione del momento angolare: basta verificare che $\mu r^2 \dot{\vartheta}$ altro non è che la componente del momento angolare lungo l'asse z , ossia la sola componente che non si annulli. Denotando con L tale componente, si avrà dunque l'integrale primo del sistema (2.14)

$$(2.15) \quad \mu r^2 \dot{\vartheta} = L .$$

Tornando ora al sistema (2.14), il metodo tradizionale consiste nell'introdurre una variabile ausiliaria $w = 1/r$, e nel ricavare un sistema di due equazioni; la prima di esse, ove risolta, fornisce l'orbita nella forma $w = w(\vartheta)$, mentre la seconda dà il movimento nella forma $\vartheta = \vartheta(t)$. Precisamente, si ha la

Proposizione 2.5: *Posto $w = 1/r$, il sistema (2.14) è equivalente al sistema*

$$(2.16) \quad \frac{d^2 w}{d\vartheta^2} + w = -\frac{\mu f}{L^2 w^2}$$

$$(2.17) \quad \dot{\vartheta} = \frac{L}{\mu} w^2 .$$

Dimostrazione. La seconda equazione si ottiene in modo evidente, quindi basta ricavare la prima. A tal fine, si ricerchi l'equazione dell'orbita nella forma $r = r(\vartheta)$; allora l'accelerazione può scriversi mediante la formula di Binet (2.3), e questa suggerisce di introdurre la variabile $w = 1/r$; per ricavare la (2.16) occorre solo sostituire la costante C che compare nella formula di Binet con $L/(2\mu)$, come si vede confrontando la (2.15) con l'espressione (2.2) della velocità areolare. *Q.E.D.*

Se si riesce a integrare la (2.16), si può sostituire l'espressione $w(\vartheta)$ così ottenuta nella (2.17); si ottiene così un'equazione a variabili separabili, in linea di principio integrabile. Il vero problema resta dunque l'integrazione dell'equazione dell'orbita.

È utile fare un breve cenno al problema delle condizioni iniziali. Si supponga di aver assegnato i dati r_0 , \dot{r}_0 , ϑ_0 e $\dot{\vartheta}_0$ corrispondenti all'istante iniziale t_0 ; da questi si devono determinare la costante L e i valori di $w(\vartheta_0)$ e $\frac{dw}{d\vartheta}(\vartheta_0)$, diciamo w_0 e v_0 . Si trova facilmente

$$(2.18) \quad L = \mu r_0^2 \dot{\vartheta}_0, \quad w_0 = \frac{1}{r_0}, \quad v_0 = -\frac{\mu \dot{r}_0}{L};$$

qui, solo la terza formula può sollevare qualche dubbio, ma basta calcolare

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\vartheta} \dot{\vartheta} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\vartheta} = -\frac{L}{\mu} \frac{dw}{d\vartheta}$$

(questo del resto altro non è che il calcolo già svolto per ricavare la formula di Binet). Dunque, una volta calcolato L , si dovrà risolvere la (2.16) con le condizioni iniziali

$$w(\vartheta_0) = w_0, \quad \frac{dw}{d\vartheta}(\vartheta_0) = v_0,$$

e poi la (2.17) con la condizione iniziale

$$\vartheta(t_0) = \vartheta_0 .$$

2.4.3 Il caso di forze a simmetria radiale

Il caso generale più interessante in cui l'integrazione dell'equazione dell'orbita risulta possibile è quello di una forza f che dipende solo dalla distanza r . Introducendo la variabile ausiliaria $v = \frac{dw}{d\vartheta}$, la (2.16) diventa equivalente al sistema

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \frac{dw}{d\vartheta} &= v \\ \frac{dv}{d\vartheta} &= -w - \frac{\mu}{L^2 w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) ; \end{aligned}$$

eliminando poi $d\vartheta$ tra queste due equazioni si trova

$$v dv = - \left[w + \frac{\mu}{L^2 w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) \right] dw .$$

Se ora si indica con $V(r)$ l'energia potenziale della forza f , ossia se è soddisfatta la relazione $f = -\frac{dV}{dr}$, si può subito integrare l'ultima equazione, e ottenere un integrale primo del sistema (2.19); si ha precisamente

$$(2.20) \quad \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}w^2 + \frac{\mu}{L^2}V\left(\frac{1}{w}\right) = C ,$$

dove C è una costante di integrazione. Questa è a sua volta un'equazione a variabili separabili, che, fissati i dati iniziali ϑ_0, w_0 , dà

$$(2.21) \quad \vartheta - \vartheta_0 = \int_{w_0}^w \frac{d\eta}{\sqrt{2C - \eta^2 - \frac{2\mu}{L^2}V\left(\frac{1}{\eta}\right)}} .$$

Occorre dunque una prima quadratura per ottenere ϑ come funzione di w ; occorre poi invertire la relazione così ottenuta e sostituirla nella (2.17); infine si deve eseguire una seconda quadratura per determinare $\vartheta(t)$. Si è così dimostrata la

Proposizione 2.6: *Il problema del moto centrale con forza dipendente dalla sola distanza è integrabile per quadrature.*

Un procedimento equivalente, che evita l'introduzione della variabile w , è il seguente. Si parte direttamente dal sistema (2.14), e si mostra che esso ammette gli integrali primi

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \mu r^2 \dot{\vartheta} &= L \\ \frac{1}{2}\mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2) + V(r) &= E , \end{aligned}$$

dove L ed E sono costanti di integrazione, e $V(r)$ è l'energia potenziale. A questo si giunge in modo naturale se si fa uso del teorema di conservazione dell'energia, che dà immediatamente

la seconda delle (2.22). Ricavando poi $\dot{\vartheta}$ dalla prima equazione, e sostituendo nella seconda si ottiene

$$(2.23) \quad \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) = E .$$

Questa espressione coincide formalmente con quella dell'energia totale di un punto in moto su una retta soggetto all'energia potenziale efficace

$$(2.24) \quad V^*(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) ;$$

da qui si ricava

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\sqrt{E - V^*(\rho)}} ,$$

sicché la (2.23) è ridotta alle quadrature; infine, invertendo per ottenere $r(t)$ e sostituendo nella prima delle (2.22) si riduce l'intero problema alle quadrature.

Se poi si vuole ricavare direttamente l'equazione dell'orbita nella forma $r = r(\vartheta)$, basta eliminare il tempo t tra la prima delle (2.22) e la (2.23); si ottiene così

$$(2.25) \quad \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r^2}{L} \sqrt{2\mu [E - V^*(r)]} ;$$

questa equazione sostituisce la (2.16).

È immediato osservare che i due procedimenti sono molto simili. Il primo dà un'equazione più elegante per l'orbita; inoltre il calcolo dell'orbita nel caso Kepleriano viene considerevolmente semplificato. Il secondo procedimento è più naturale per chi abbia familiarità con i metodi generali della meccanica. Al lettore la scelta.

2.5 Il moto centrale: studio qualitativo

Prima di passare al calcolo esplicito dell'orbita, è interessante soffermarsi sulle informazioni di carattere qualitativo che si possono dedurre dall'equazione (2.16). Si osservi anzitutto che essa, se si attribuisce a ϑ la funzione di tempo, altro non è che l'equazione di un punto materiale su una retta soggetto alla forza $-w - \frac{\mu f}{L^2 w^2}$. Questo è giustificato dalla (2.15), che assicura che $\vartheta(t)$ è funzione monotona del tempo. Conviene allora far uso dell'integrale primo (2.20), riscrivendolo nella forma

$$(2.26) \quad \frac{1}{2}v^2 + \mathcal{V}^*(w) = C ;$$

qui il termine $v^2/2$ svolge il ruolo di energia cinetica, e $\mathcal{V}^*(w)$ quello di energia potenziale, essendo

$$(2.27) \quad \mathcal{V}^*(w) = \frac{1}{2}w^2 + \frac{\mu}{L^2} V \left(\frac{1}{w} \right) .$$

Il punto potrà raggiungere solo le posizioni w soddisfacenti la condizione

$$(2.28) \quad \mathcal{V}^*(w) \leq C ;$$

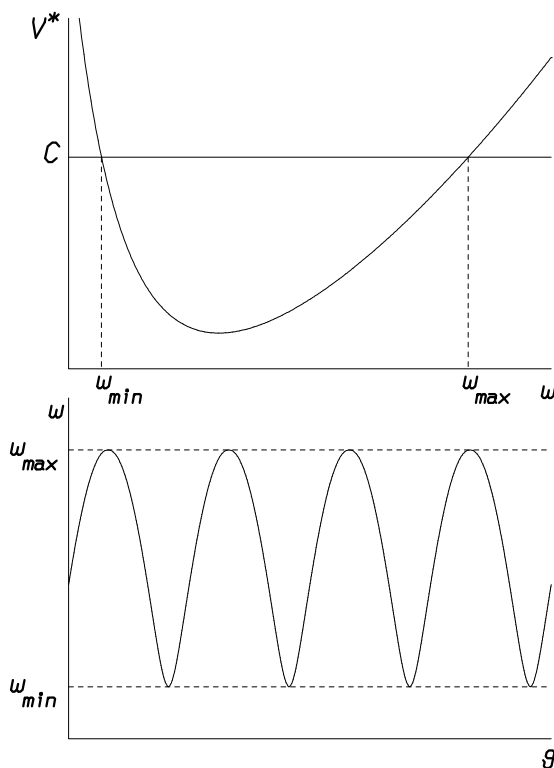


Figura 2.1. Andamento qualitativo della soluzione dell'equazione dell'orbita in prossimità di un minimo di $\mathcal{V}^*(w)$: la soluzione oscilla periodicamente nell'intervallo $w_{min} \leq w \leq w_{max}$.

questo è già sufficiente per ottenere interessanti informazioni qualitative sul comportamento dell'orbita. Il resto di questo paragrafo è dedicato a questa discussione.

2.5.1 Stati legati

È particolarmente interessante il caso in cui $\mathcal{V}^*(w)$ abbia un minimo; in tal caso esisterà un intervallo di valori di C per cui la (2.28) determina un intervallo $[w_{min}, w_{max}]$ entro il quale la funzione $w(\vartheta)$ non può che oscillare (figura 2.1). Se si ricorda che $w = 1/r$, e se l'intervallo $[w_{min}, w_{max}]$ giace sulla semiretta $w > 0$, segue che la distanza r soddisfa sempre $r_{min} \leq r(\vartheta) \leq r_{max}$, con $r_{min} = 1/w_{max}$ e $r_{max} = 1/w_{min}$; si parlerà in questo caso di *stato legato*. In particolare, se \bar{w} è il punto di minimo di $\mathcal{V}^*(w)$, e si denota $C_{min} = \mathcal{V}^*(\bar{w})$, si ha che $w(\vartheta) = \bar{w}$ è una soluzione di equilibrio della (2.16); lo stesso accade ovviamente per tutti quei punti (non necessariamente di minimo) ove si annulla la derivata prima di $\mathcal{V}^*(w)$.

È naturale chiedersi, a questo punto, quale sia la forma dell'orbita nel piano r, ϑ . La soluzione di equilibrio si interpreta facilmente: l'orbita è circolare, essendo $r(\vartheta) = 1/\bar{w}$, e viene percorsa con moto uniforme, ossia $\vartheta(t) = \vartheta_0 + L\bar{w}^2 t/\mu$, come si ricava subito dalla (2.17). Per $C - C_{min} > 0$ e sufficientemente piccolo il moto si svolge entro una corona circolare $r_{min} \leq r(\vartheta) \leq r_{max}$ (figura 2.2). Si osservi bene che $r(\vartheta)$ è certamente una funzione periodica, ma non è detto che l'orbita sia a sua volta

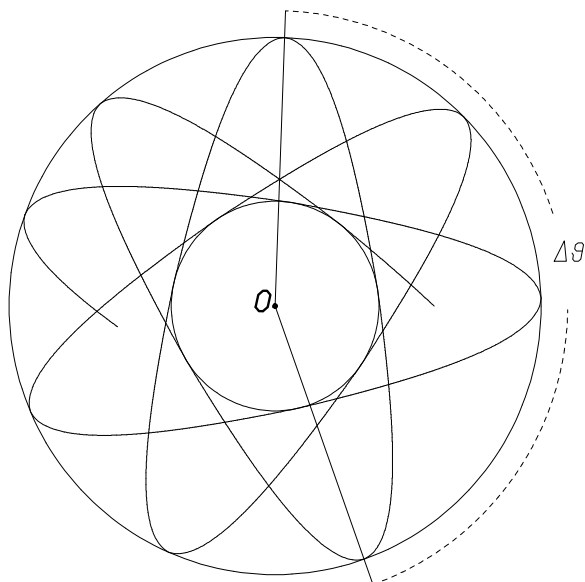


Figura 2.2. Rappresentazione della soluzione dell'equazione dell'orbita nel piano r, ϑ , nel caso di uno stato legato. L'angolo $\Delta\vartheta$ è il periodo della soluzione $r(\vartheta)$.

una funzione periodica, né che abbia una forma semplice: la quantità rilevante qui è il periodo $\Delta\vartheta$ della funzione $w(\vartheta)$, o, equivalentemente, l'angolo che intercorre tra due perielii consecutivi: l'orbita si chiude se e solo se $\Delta\vartheta/(2\pi)$ è un numero razionale. Se si considera l'evoluzione nel tempo, si potranno identificare in generale due periodi: il primo, T_r , è il tempo necessario per percorrere l'angolo $\Delta\vartheta$, o il tempo che intercorre tra due perielii consecutivi; il secondo, T_ϑ , è il tempo medio necessario perché ϑ si incrementi di 2π . È immediato osservare che sarà $T_r/T_\vartheta = \Delta\vartheta/(2\pi)$.⁶ Su questi problemi si tornerà in seguito; qui basti osservare che il calcolo di $\Delta\vartheta$ può effettuarsi integrando la (2.26) sull'intervallo $[w_{\min}, w_{\max}]$, ossia calcolando⁷

$$(2.29) \quad \Delta\vartheta = 2 \int_{w_{\min}}^{w_{\max}} \frac{dw}{\sqrt{2[C - \mathcal{V}^*(w)]}}$$

(si tenga conto del fatto che $v = \frac{dw}{d\vartheta}$, e che la (2.26) è quadratica in v).

2.5.2 Stati d'urto

La discussione qualitativa è meno semplice se l'intervallo $[w_{\min}, w_{\max}]$ contiene l'origine, o si estende fino all'infinito.

⁶ Nella descrizione Kepleriana non si trova traccia di questi due periodi, ma ciò è dovuto al fatto eccezionale che $T_r = T_\vartheta$.

⁷ Si noti che questo è il procedimento che solitamente si segue per calcolare il periodo di oscillazione intorno ad una soluzione di equilibrio; ciò è dovuto proprio al fatto di considerare ϑ come tempo.

Il caso di un intervallo che contiene l'origine si verifica quando la forza $f(r)$ diventa repulsiva o si annulla per $r \rightarrow \infty$. In questo caso la funzione $w(\vartheta)$ si può ancora ricavare come nel caso precedente, e si tratta ancora di una funzione periodica in ϑ , ma subisce due cambiamenti di segno nel corso di un'oscillazione, e si deve tener conto del fatto che il raggio r diventa infinito all'annullarsi di $w(\vartheta)$. È facile vedere che si può determinare un intervallo $[\vartheta_0, \vartheta_1]$ tale che $w(\vartheta_0) = w(\vartheta_1) = 0$ e $w(\vartheta) > 0$ per $\vartheta_0 < \vartheta < \vartheta_1$ (figura 2.3). Se si impone l'ovvia condizione che sia $r > 0$, si devono considerare come significativi i soli valori $w(\vartheta)$ soddisfacenti $0 < w(\vartheta) \leq w_{\max}$, il che equivale a considerare il solo intervallo $(\vartheta_0, \vartheta_1)$. Nel piano r, ϑ si ha che la distanza r diventa infinita agli estremi dell'intervallo, dove l'orbita diventa asintotica a due semirette di direzioni ϑ_0, ϑ_1 , e che il punto non può avvicinarsi al centro ad una distanza inferiore a $r_{\min} = 1/w_{\max}$. Si parla in questo caso di *stato d'urto*, e l'angolo $\Delta\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_0$ viene detto *angolo di scattering*.

Per quanto riguarda il comportamento all'infinito, si può osservare che dalle equazioni (2.16) e (2.17) si ha

$$\dot{w} = \frac{dw}{d\vartheta} \dot{\vartheta} = \frac{L}{\mu} v w^2 ;$$

facendo uso anche dell'integrale primo (2.26) e di $r = 1/w$ si ottiene

$$\dot{r} = -\frac{\dot{w}}{w^2} = \pm \frac{L}{\mu} \sqrt{2 \left[C - \mathcal{V}^* \left(\frac{1}{r} \right) \right]}$$

(il segno dipende dal dato iniziale); pertanto al tendere di r all'infinito il movimento tende a diventare rettilineo uniforme, con velocità $\pm \sqrt{2[C - \mathcal{V}^*(0)]}$ (si osservi che la velocità angolare $\dot{\vartheta}$ si annulla in virtù della (2.17), poiché $w \rightarrow 0$).

Gli intervalli in cui $w(\vartheta)$ diventa negativa non sono da considerarsi significativi, per il potenziale in esame. A questi si può attribuire un significato cambiando segno a r , ossia considerando un'energia potenziale $\mathcal{V}'(r) = \mathcal{V}(-r)$, per la quale si ha la stessa descrizione qualitativa.

2.5.3 Caduta sul centro

Un'altra possibilità è che l'intervallo $[w_{\min}, w_{\max}]$ si estenda fino all'infinito; ciò può verificarsi nel caso di un campo di forze attrattivo la cui intensità per $r \rightarrow 0$ cresca abbastanza rapidamente, sì da superare la forza centrifuga. Per semplicità, si supponga che la condizione (2.28) sia soddisfatta per $w \geq w_{\min} > 0$; allora si ha necessariamente $w(\vartheta) \rightarrow +\infty$ sia per $\vartheta \rightarrow -\infty$ che per $\vartheta \rightarrow +\infty$. Questo corrisponde ad un'orbita che può ben partire arbitrariamente vicino al centro e allontanarsene fino ad una distanza $r_{\max} = 1/w_{\min}$, ma poi ricade inevitabilmente sul centro. Contemporaneamente, la (2.17) dice che per $w \rightarrow \infty$ si ha $\dot{\vartheta} \rightarrow \pm\infty$ (il segno dipende da L , ossia dal dato iniziale); dunque il moto in prossimità del centro è una spirale che viene percorsa a velocità angolare crescente oltre ogni limite.

È spontaneo chiedersi quanto tempo richieda la caduta. Per rispondere a questa domanda si deve stimare l'andamento della funzione $w(t)$ per w grandi. Facendo uso

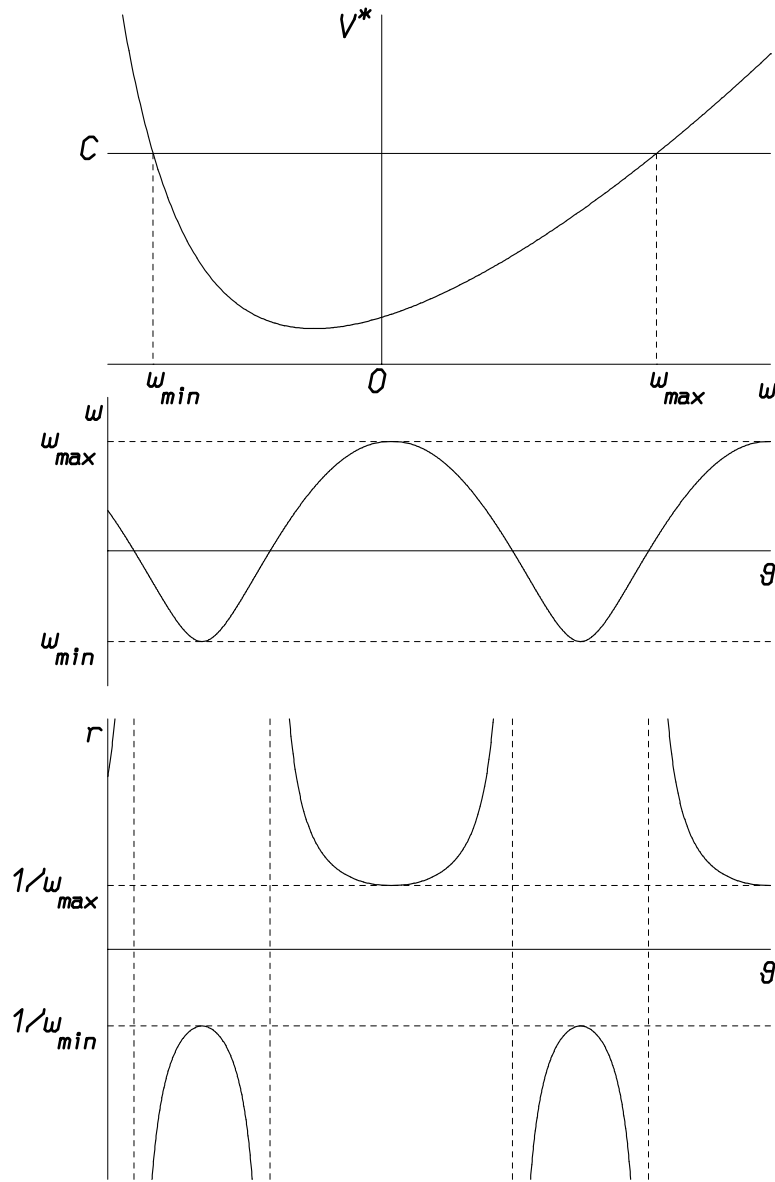


Figura 2.3. Andamento qualitativo di $\mathcal{V}^*(w)$, $w(\vartheta)$ e $r(\vartheta)$ quando l'intervallo $[w_{\min}, w_{\max}]$ contiene l'origine. Gli zeri di $w(\vartheta)$ corrispondono agli asintoti di $r(\vartheta)$.

ancora delle equazioni (2.16) e (2.17), nonché dell'integrale primo (2.26), si ricava subito

$$(2.30) \quad \dot{w} = \frac{Lw^2}{\mu} \sqrt{2[C - \mathcal{V}^*(w)]} .$$

Il caso più semplice si ha quando $C - \mathcal{V}^*(w)$ tende ad un limite finito e non nullo per $w \rightarrow +\infty$. Allora per w sufficientemente grande si può approssimare la (2.30) con l'equazione

$$\dot{w} = \alpha w^2 ,$$

dove $\alpha \neq 0$ è una costante; i casi $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$ corrispondono rispettivamente ad una caduta e ad un'uscita dal centro. La soluzione corrispondente alla condizione iniziale $w(t_0) = w_0$ è

$$w(t) = \frac{w_0}{1 - \alpha w_0(t - t_0)} .$$

Si vede che la soluzione ha un polo per $t = t_0 + 1/(\alpha w_0)$; dunque la caduta avviene in un tempo finito.

La descrizione qualitativa diventa più complessa se $C - \mathcal{V}^*(w) \rightarrow 0$ per $w \rightarrow +\infty$; in questo caso diventa rilevante considerare il comportamento all'infinito del membro di destra della (2.30). Come esempio significativo, si consideri il caso in cui per w sufficientemente grande si abbia

$$C - \mathcal{V}^*(w) \simeq \frac{k}{w^{2\beta}} , \quad \beta \geq 0 .$$

Questo caso si verifica, ad esempio, se il potenziale $V(r)$ ha la forma

$$V(r) = -\frac{k}{r^2} + r^{2\beta} ,$$

con una scelta opportuna delle costanti L e C , ossia dei dati iniziali. Allora l'equazione (2.30) può approssimarsi con

$$\dot{w} = \alpha w^{2-\beta} ,$$

con una costante opportuna $\alpha \neq 0$. La soluzione corrispondente alla condizione iniziale $w(t_0) = w_0$ è

$$\begin{aligned} w(t) &= [w_0 + \alpha(\beta - 1)(t - t_0)]^{1/(\beta-1)} && \text{per } \beta \neq 1 , \\ w(t) &= w_0 \exp[\alpha(t - t_0)] && \text{per } \beta = 1 . \end{aligned}$$

Se ne deduce che il tempo di caduta resta finito per $\beta < 1$, e diventa infinito per $\beta \geq 1$.

2.5.4 Orbite asintotiche a orbite circolari

Come ultimo caso si consideri la possibilità che il potenziale $\mathcal{V}^*(w)$ abbia un massimo, diciamo in $w = \bar{w}$. Anche in questo caso $w(\vartheta) = \bar{w}$ è una soluzione dell'equazione dell'orbita, corrispondente a $C = \bar{C} = \mathcal{V}^*(\bar{w})$; nel piano r, ϑ questa soluzione è ancora un'orbita circolare che viene percorsa con velocità angolare uniforme $\dot{\vartheta} = L\bar{w}^2/\mu$. A differenza del caso del minimo però quest'orbita è instabile. Per $C < \bar{C}$ la condizione (2.28) esclude il punto \bar{w} , e dunque le orbite corrispondenti non incrociano quella circolare; per $C > \bar{C}$ invece il punto \bar{w} risulta interno all'intervallo determinato dalla (2.28), ma, a parte il fatto che $|v|$ ha un minimo in corrispondenza a questo punto, non ha particolare rilevanza per la dinamica.

Il comportamento delle orbite per $C = \bar{C}$ è più interessante. Per quanto riguarda il comportamento locale, è noto che orbite $w(\vartheta)$ con dato iniziale in un intorno di \bar{w} sono asintotiche a \bar{w} o per $t \rightarrow -\infty$ o per $t \rightarrow +\infty$. Nel piano r, ϑ si hanno orbite

asintotiche a quella circolare instabile, percorse con velocità angolare che tende a diventare uniforme per $t \rightarrow -\infty$ o per $t \rightarrow +\infty$.⁸

Lo studio del comportamento globale di queste orbite si svolge tenendo conto dei risultati discussi nei paragrafi precedenti. L'informazione rilevante è contenuta ancora nella condizione (2.28). Ad esempio, se tale condizione è verificata su un intervallo $\bar{w} \leq w \leq w_{\max}$ con w_{\max} finito, e se $\mathcal{V}^*(w) < \bar{C}$ su tutto l'intervallo aperto, allora l'orbita che tende asintoticamente a \bar{w} per $\vartheta \rightarrow -\infty$ potrà ben allontanarsi fino a w_{\max} , ma poi tornerà a cadere asintoticamente su \bar{w} per $\vartheta \rightarrow +\infty$. Se all'interno dell'intervallo $[w, w_{\max}]$ esiste un altro punto, diciamo \tilde{w} , tale che $\mathcal{V}^*(\tilde{w}) = \bar{C}$ (e dunque anch'esso un massimo), allora esistono sia orbite asintotiche a \bar{w} per $\vartheta \rightarrow -\infty$ e a \tilde{w} per $\vartheta \rightarrow +\infty$ che orbite asintotiche a \tilde{w} per $\vartheta \rightarrow -\infty$ e a \bar{w} per $\vartheta \rightarrow +\infty$. Infine, se la (2.28) è soddisfatta su tutto l'intervallo $w \geq \bar{w}$, con $\mathcal{V}^*(w) < C$ per $w > \bar{w}$, allora si hanno orbite asintotiche a \bar{w} , e che cadono sul centro, oppure ne escono, come descritto nel paragrafo 2.5.3. La discussione relativa all'intervallo $w < \bar{w}$ è sostanzialmente la stessa, salvo sostituire la caduta sul centro con la fuga all'infinito, ed è lasciata al lettore.

Anche questa analisi qualitativa può svolgersi utilizzando direttamente la variabile r , anziché introdurre w . Invece della funzione $\mathcal{V}^*(w)$ si deve allora considerare il potenziale efficace $V^*(r)$, e la (2.20) deve essere sostituita dalla (2.23). Si noti che questo corrisponde a reintrodurre il tempo t , e non ϑ , come variabile indipendente. La condizione (2.28) viene sostituita a sua volta da

$$V^*(r) \leq E ,$$

e questa determina l'intervallo $[r_{\min}, r_{\max}]$ (che può ancora estendersi all'infinito in caso di stato d'urto o comprendere l'origine in caso di caduta sul centro). La costante C viene sostituita dall'energia E ; la relazione tra queste due costanti, ambedue determinate dai dati iniziali, si ricava confrontando la (2.23) con la (2.26); si ottiene

$$(2.31) \quad C = \frac{\mu}{L^2} E .$$

La discussione qualitativa prosegue, a questo punto, in completa analogia con quella svolta nei paragrafi precedenti: basta riferirsi costantemente ad r anziché a w .

2.6 Il moto centrale: calcolo dell'orbita in casi particolarmente semplici e interessanti

In generale, il calcolo esplicito dell'orbita non è agevole. Si conoscono tuttavia tre casi in cui si arriva ad una soluzione esplicita in termini di funzioni trigonometriche, e dunque con metodi semplici: il caso del potenziale armonico, quello del potenziale kepleriano, e quello del potenziale inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro.

⁸ La dinamica di queste orbite diventa più facilmente comprensibile se si fa uso della rappresentazione sul piano di fase: si tratta semplicemente delle separatrici che si formano in prossimità di un punto di equilibrio iperbolico. Questo metodo verrà illustrato brevemente più avanti, nel capitolo sui sistemi Hamiltoniani.

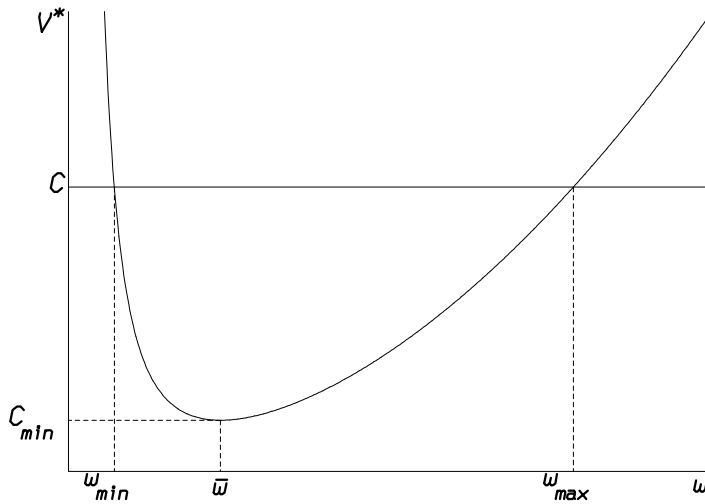


Figura 2.4. Il caso della forza attrattiva armonica, $\mathcal{V}^*(w) = w^2/2 + k\mu/(2L^2w^2)$. Il minimo è in $\bar{w} = (k\mu/L^2)^{1/4}$, e corrispondentemente si ha $C_{\min} = \mathcal{V}^*(\bar{w}) = \sqrt{k\mu}/L$.

2.6.1 Il potenziale armonico

Come esempio particolarmente semplice, si consideri il caso di una *forza attrattiva armonica*: $f(r) = -kr$, ovvero $V(r) = kr^2/2$; si ha dunque

$$(2.32) \quad \mathcal{V}^*(w) = \frac{1}{2}w^2 + \frac{k\mu}{2L^2w^2}.$$

L'andamento qualitativo di $\mathcal{V}^*(w)$ è rappresentato in figura 2.4: il minimo è nel punto $\bar{w} = (k\mu/L^2)^{1/4}$, e ivi è $C_{\min} = \mathcal{V}^*(\bar{w}) = \sqrt{k\mu}/L$; per $C = C_{\min}$ l'orbita è circolare, mentre per $C > C_{\min}$ si ha l'andamento oscillante nell'intervallo $w_{\min} \leq w(\vartheta) \leq w_{\max}$, con

$$(2.33) \quad w_{\min} = \sqrt{C - \sqrt{C^2 - \frac{k\mu}{L^2}}}, \quad w_{\max} = \sqrt{C + \sqrt{C^2 - \frac{k\mu}{L^2}}}.$$

L'equazione dell'orbita (2.21) diventa in questo caso

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int_{w_0}^w \frac{d\eta}{\sqrt{2C - \eta^2 - \frac{k\mu}{L^2\eta^2}}},$$

e il calcolo dell'angolo $\Delta\vartheta$ secondo la formula generale (2.29) richiede di valutare questo stesso integrale tra gli estremi w_{\min} e w_{\max} .

Per il calcolo dell'integrale si effettua la sostituzione $\eta^2 = \xi$, e ci si riconduce a

$$\frac{1}{2} \int \frac{d\xi}{\sqrt{2C\xi - \xi^2 - \frac{k\mu}{L^2}}} = \frac{1}{2} \int \frac{d\xi}{\sqrt{(C^2 - \frac{k\mu}{L^2}) - (\xi - C)^2}},$$

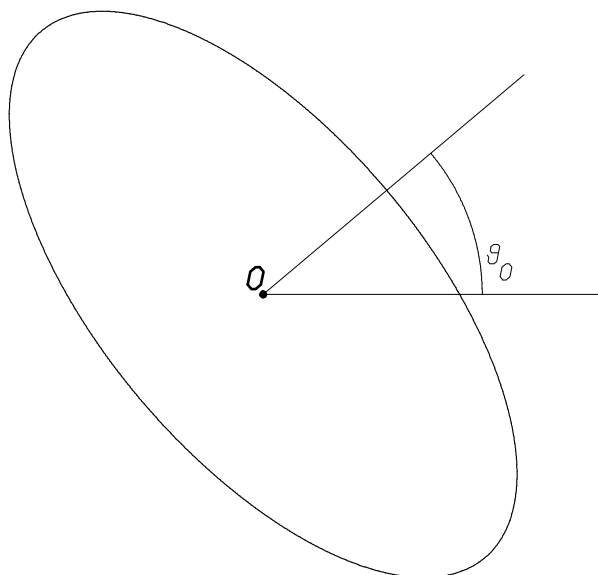


Figura 2.5. Orbita nel piano r, ϑ nel caso della forza attrattiva armonica. Si tratta di un'ellisse con centro nel centro delle forze.

e con l'ulteriore sostituzione $\xi - C = \sqrt{C^2 - \frac{k\mu}{L^2}} \cos \varphi$ quest'ultimo integrale dà semplicemente $\varphi/2$. Scegliendo ora il dato iniziale $w_0 = w_{\max}$ (ovvero scegliendo opportunamente ϑ_0) si ottiene

$$\vartheta - \vartheta_0 = \frac{1}{2} \arccos \frac{w^2 - C}{\sqrt{C^2 - \frac{k\mu}{L^2}}},$$

o ancora, sostituendo $w = 1/r$,

$$(2.34) \quad \frac{1}{r^2} = C + \sqrt{C^2 - \frac{k\mu}{L^2}} \cos 2(\vartheta - \vartheta_0).$$

Per $k > 0$ questa è l'equazione di un'ellisse con centro nell'origine (figura 2.5). Il calcolo di $\Delta\vartheta$ è, a questo punto, superfluo, essendo palesemente $\Delta\vartheta = \pi$.

2.6.2 Il potenziale inversamente proporzionale al quadrato della distanza

Un secondo esempio, che ben si presta ad illustrare il caso di stati non legati, è costituito dalla forza attrattiva inversamente proporzionale al cubo della distanza: $f(r) = -k/r^3$, ovvero $V(r) = -k/(2r^2)$. Si ha dunque

$$(2.35) \quad \mathcal{V}^*(w) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k\mu}{L^2} \right) w^2.$$

L'esame delle curve $\mathcal{V}^*(w)$ rivela immediatamente che può verificarsi una delle situazioni che seguono, illustrate in figura 2.6.

- a. Per $k\mu/L^2 < 1$ si ha uno stato d'urto: il punto può avvicinarsi ad una distanza minima r_{\min} dal centro, ma poi viene respinto all'infinito.

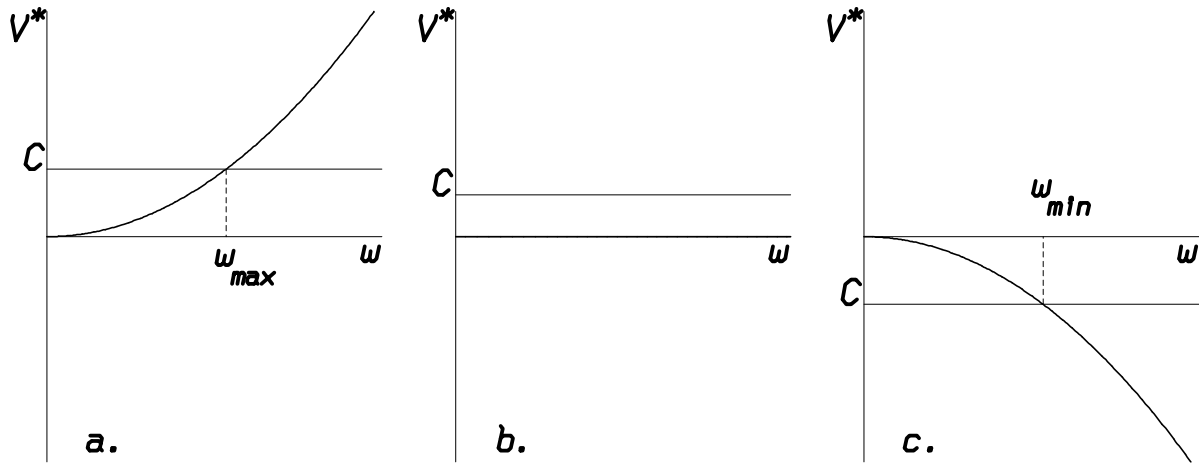


Figura 2.6. Andamento qualitativo di $\mathcal{V}^*(w)$ per il potenziale $V(r) = -k/(2r^2)$. Caso a: $k\mu/L^2 < 1$; stato d'urto con $r \geq r_{\max} = 1/w_{\max}$. Caso b: $k\mu/L^2 = 1$; movimento su tutta la semiretta $r > 0$. Caso c: $k\mu/L^2 > 1$; moto sull'intervallo $0 < r \leq r_{\max} = 1/w_{\min}$, con caduta sul centro, per $C < 0$, e moto su tutta la semiretta per $C \geq 0$.

- b. Per $k\mu/L^2 = 1$ il punto può percorrere tutta la semiretta $r > 0$, sia andandosene all'infinito, sia cadendo sul centro; ciò dipende dal segno della velocità radiale iniziale. Fa eccezione il caso $C = 0$, che viene discusso qui sotto.
- c. Per $k\mu/L^2 > 1$ occorre distinguere due sottocasi. Se $C < 0$ il moto è confinato in $0 < r \leq r_{\max}$, con un valore opportuno di r_{\max} , e in ogni caso il punto precipita sul centro in un tempo finito. Se invece $C \geq 0$ il moto è ancora possibile su tutta la semiretta $r > 0$, come nel caso b.

Per il calcolo esplicito dell'orbita conviene senz'altro far uso direttamente dell'equazione (2.16), che qui diventa

$$(2.36) \quad \frac{d^2 w}{d\vartheta^2} + \left(1 - \frac{k\mu}{L^2}\right) w = 0 .$$

Si hanno dunque le situazioni seguenti, illustrate in figura 2.7.

- a. Per $k\mu/L^2 < 1$ la soluzione della (2.36) è

$$w(\vartheta) = A \cos \left[\sqrt{1 - \frac{k\mu}{L^2}} (\vartheta - \vartheta_0) \right] ,$$

con A, ϑ_0 costanti di integrazione. L'angolo di scattering è $\Delta\vartheta = \pi/\sqrt{1 - k\mu/L^2}$.

- b. Per $k\mu/L^2 = 1$ la soluzione della (2.36) è

$$w(\vartheta) = A\vartheta + B ,$$

con A e B costanti di integrazione; la semiretta $r > 0$ viene percorsa con un moto a spirale in vicinanza del centro e con un'orbita asintotica ad una retta per grandi distanze. Per esaminare il caso $C = 0$ occorre osservare che le condizioni iniziali

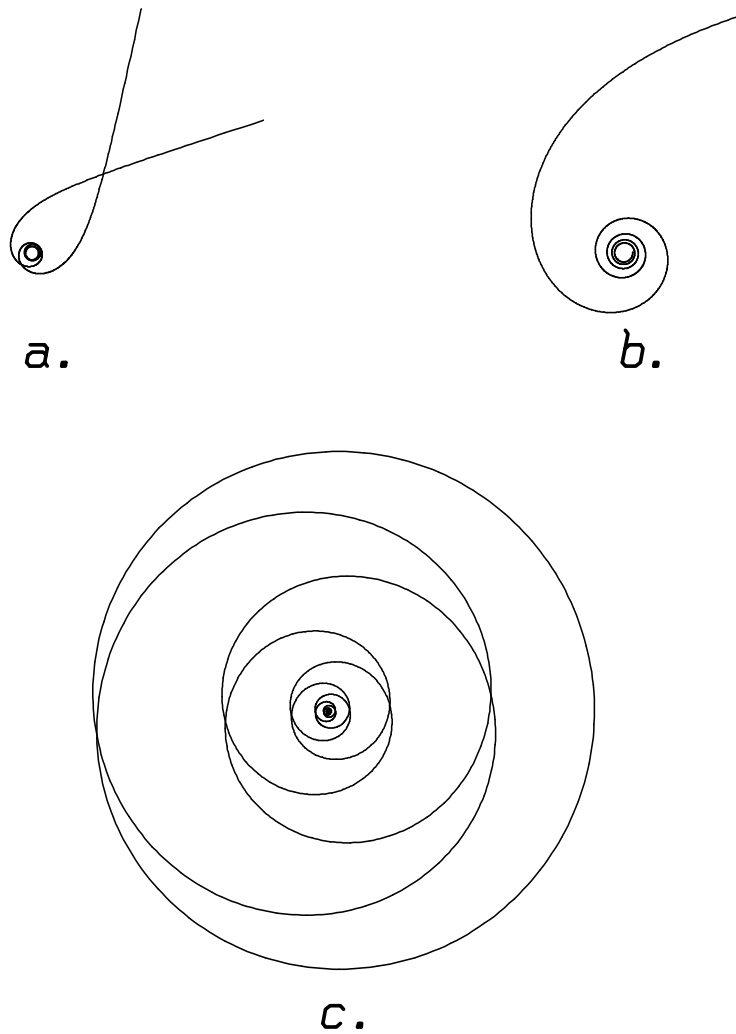


Figura 2.7. Orbite nel piano r, ϑ nel caso del potenziale $V(r) = k/(2r^2)$. I casi a, b e c corrispondono a quelli già illustrati nella figura 2.6. Nel caso a il punto può provenire dall'infinito, e percorre un'orbita a spirale attorno al centro fino a raggiungere il pericentro; poi si allontana percorrendo un'orbita simmetrica a quella di arrivo. Nel caso b il punto può provenire dall'infinito, e cade sul centro percorrendo un'orbita a spirale; la stessa orbita viene percorsa a ritroso se si inverte la velocità. Nel caso c, per $C < 0$, il punto può percorrere un'orbita a spirale che si allontana dal centro fino a raggiungere la massima distanza consentita dalla sua energia, poi ricade sul centro sempre seguendo un'orbita a spirale.

$w(0) = w_0$ e $\frac{dw}{d\vartheta}(\vartheta_0) = v_0$ danno immediatamente $B = w_0$ e $A = v_0 = \sqrt{2C}$. Quindi per $C = 0$ si ha la soluzione $w(\vartheta) = w_0$, ed esistono solo orbite circolari con raggio arbitrario.

c. Per $k\mu/L^2 > 1$ la soluzione della (2.36) si scrive

$$w(\vartheta) = A \exp(\lambda\vartheta) + B \exp(-\lambda\vartheta) ,$$

con

$$\lambda = \sqrt{\frac{k\mu}{L^2} - 1},$$

e A, B costanti di integrazione. Le condizioni iniziali $w(0) = w_0$ e $\frac{dw}{d\vartheta}(\vartheta_0) = v_0$ danno

$$A = \frac{\exp(-\lambda\vartheta_0)}{2} \left(w_0 + \frac{v_0}{\lambda} \right)$$

$$B = \frac{\exp(\lambda\vartheta_0)}{2} \left(w_0 - \frac{v_0}{\lambda} \right).$$

Occorre ora distinguere tre sottocasi. Per $C < 0$ si ha $|v_0| < \lambda w_0$, sicché A e B sono ambedue positivi; la soluzione descrive uno stato d'urto (figura 2.7c). Per $C > 0$ si ha invece $|v_0| > \lambda w_0$, sicché A e B risultano avere segno opposto; si ha dunque un'orbita che proviene dall'infinito e cade sul centro, o viceversa. Infine, il caso $C = 0$ separa i due casi precedenti: si ha $|v_0| = \lambda w_0$, sicché una delle due costanti A e B si annulla; anche qui l'orbita può percorrere tutto l'asse w , ma la velocità si annulla all'infinito.

2.6.3 Il caso Kepleriano

Il caso di maggiore interesse per la meccanica celeste, alla luce di quanto già esposto, è quello della forza gravitazionale, $f(r) = -k/r^2$, ovvero $V(r) = -k/r$; per $k < 0$ si ha il caso di una forza repulsiva, che non è di interesse immediato per la meccanica celeste, ma si presenta nello studio del moto di particelle cariche.⁹ La discussione può tuttavia limitarsi al solo caso $k > 0$: se si osserva che $V(-r) = -V(r)$, e si ricordano le osservazioni del paragrafo 2.5, si vede che eventuali soluzioni dell'equazione dell'orbita con valori negativi di w descrivono proprio il caso repulsivo.

Si ha qui

$$(2.37) \quad \mathcal{V}^*(w) = \frac{1}{2}w^2 - \frac{k\mu}{L^2}w;$$

questa è una parabola passante per l'origine (figura 2.8). Il punto di minimo \bar{w} e il valore minimo C_{\min} di \mathcal{V}^* si hanno per

$$(2.38) \quad \bar{w} = \frac{k\mu}{L^2}, \quad C_{\min} = -\frac{k^2\mu^2}{2L^4}$$

⁹ L'esempio classico è la traiettoria di una particella con carica positiva che viene indirizzata verso un nucleo di massa sensibilmente superiore. Il problema si studia tenendo conto della legge di Coulomb per le forze elettriche, che dipende dall'inverso del quadrato della distanza come nel caso gravitazionale, ma diventa repulsiva se le cariche hanno egual segno. Il celebre esperimento di Rutherford del 1911 consisteva appunto nell'osservare le traiettorie di raggi α (di fatto nuclei di elio) che attraversavano una lamina d'oro^{[108][109]}. Il risultato fu la conferma della validità del modello "planetario" dell'atomo: un piccolissimo nucleo con carica positiva attorno al quale ruotano gli elettroni.

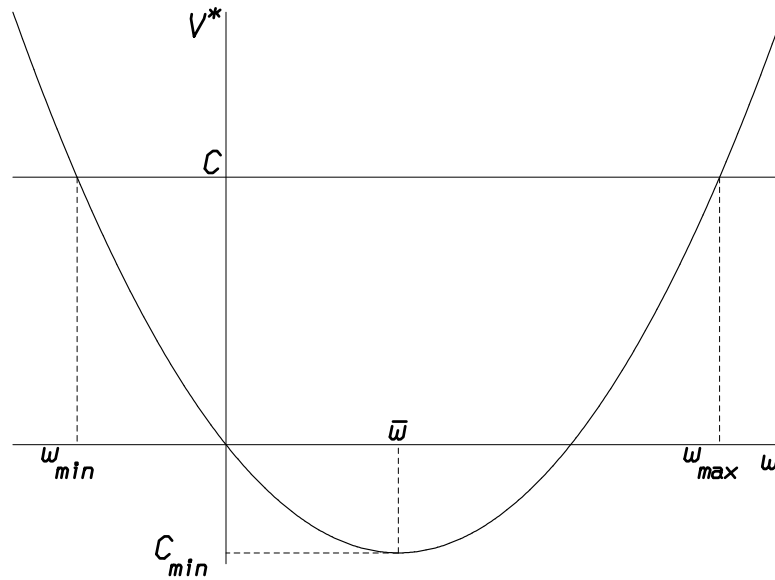


Figura 2.8. Il grafico della funzione $\mathcal{V}^*(w)$ nel caso Kepleriano.

Per $C > C_{min}$ la soluzione $w(\vartheta)$ dell'equazione dell'orbita oscilla periodicamente nell'intervallo $w_{min} \leq w \leq w_{max}$, con

$$(2.39) \quad w_{min} = \bar{w} - \sqrt{\frac{k^2\mu^2}{L^4} + 2C}, \quad w_{max} = \bar{w} + \sqrt{\frac{k^2\mu^2}{L^4} + 2C}$$

(si noti che il radicando è sempre positivo). Si vede subito che al variare di C si dovranno distinguere tre casi.

- a. Per $C < 0$ si ha $0 < w_{min} < w_{max}$, quindi si hanno solo stati legati.
- b. Per $C = 0$ si ha $0 = w_{min} < w_{max}$, quindi si ha uno stato d'urto.
- c. Per $C > 0$ si ha $w_{min} < 0 < w_{max}$, quindi si ha una coppia di stati d'urto, uno corrispondente al caso attrattivo, $0 < w \leq w_{max}$, e l'altro al caso repulsivo $w_{min} \leq w < 0$.

Per determinare l'orbita conviene riferirsi senz'altro all'equazione (2.16), che in questo caso si scrive

$$(2.40) \quad \frac{d^2w}{d\vartheta^2} + w = \frac{k\mu}{L^2};$$

la soluzione è

$$(2.41) \quad w(\vartheta) = \bar{w} + A \cos(\vartheta - \vartheta_0),$$

dove \bar{w} è il punto di minimo di \mathcal{V}^* , dato dalla (2.38). Le costanti ϑ_0 e A devono essere determinate mediante i dati iniziali; in particolare, dalle (2.39) segue

$$(2.42) \quad A = \sqrt{\frac{k^2\mu^2}{L^4} + 2C}.$$

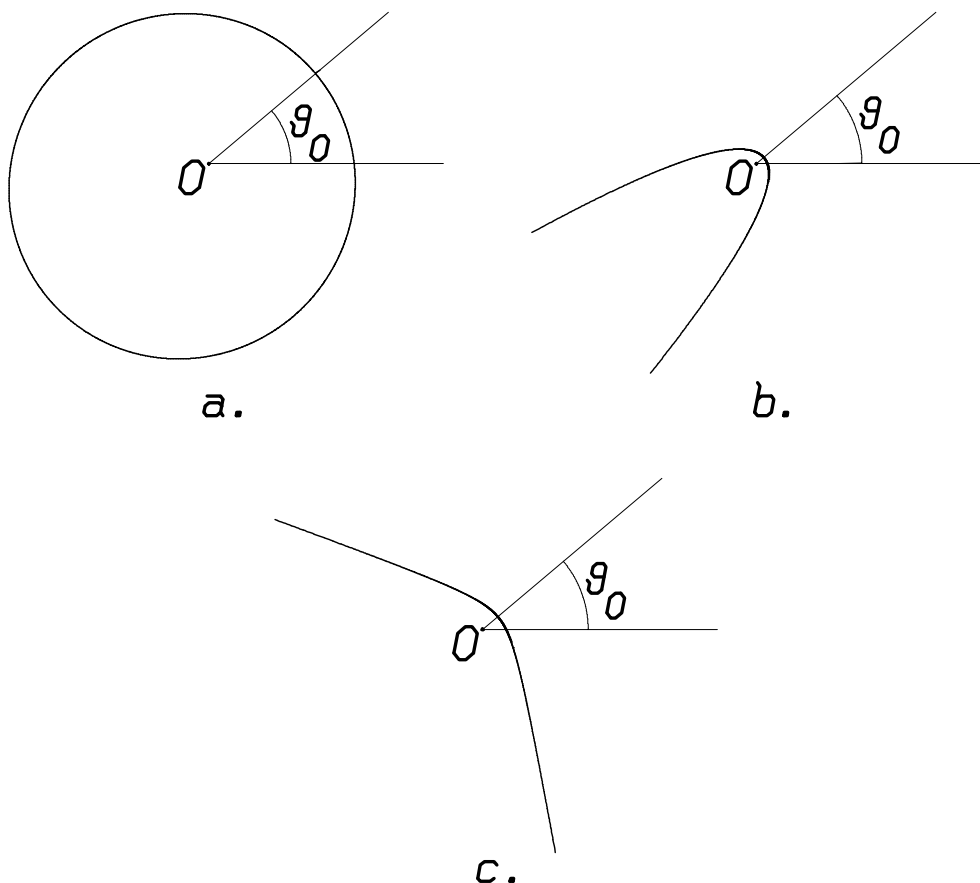


Figura 2.9. Orbita nel piano r, ϑ per il caso Kepleriano. a) ellisse, $0 \leq e < 1$; b) parabola, $e = 1$; c) iperbole, $e > 1$. L'angolo ϑ_0 determina la direzione del perielio.

Ricordando che $w = 1/r$, la (2.41) può scriversi

$$(2.43) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos(\vartheta - \vartheta_0)},$$

dove

$$(2.44) \quad p = \frac{L^2}{k\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2CL^4}{k^2\mu^2}}.$$

L'orbita è dunque in ogni caso una conica con fuoco nel centro delle forze; restano da discutere in maggior dettaglio i casi già illustrati sopra, rappresentati in figura 2.9.

- Per $C_{\min} \leq C < 0$ si ha $0 \leq e < 1$, quindi l'orbita è un'ellisse (in particolare una circonferenza per $e = 0$), in accordo con la prima legge di Keplero; questo vale per tutti gli stati legati. Il calcolo esplicito di $\Delta\vartheta$ è superfluo, perché è evidentemente $\Delta\vartheta = 2\pi$.
- Per $C = 0$ si ha $e = 1$; l'orbita è una parabola, e l'angolo di scattering coincide col periodo di $w(\vartheta)$, ossia è $\Delta\vartheta = 2\pi$.

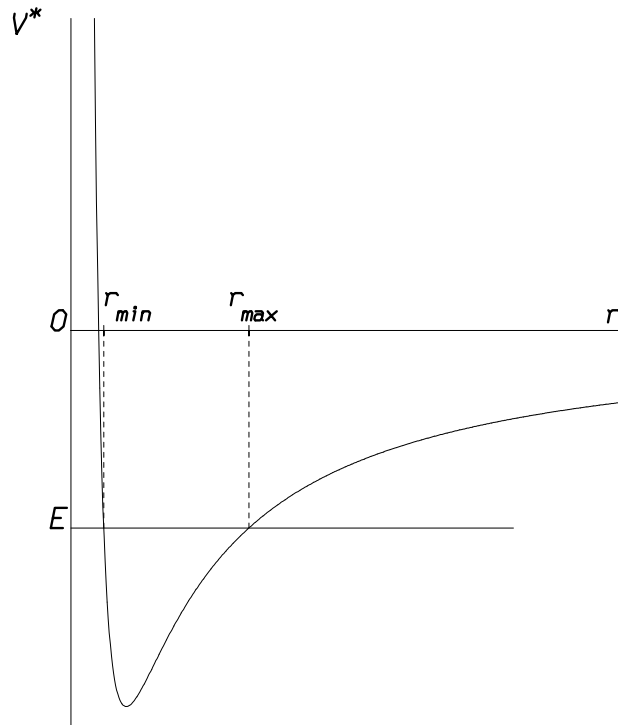


Figura 2.10. L'andamento del potenziale efficace $V^*(r)$ nel caso Kepleriano.

- c. Per $C > 0$ si ha $e > 1$; l'orbita è un'iperbole sia nel caso attrattivo che nel caso repulsivo. Gli angoli di scattering $\Delta\vartheta_+$ del caso attrattivo e $\Delta\vartheta_-$ del caso repulsivo soddisfano evidentemente la relazione $\Delta\vartheta_+ + \Delta\vartheta_- = 2\pi$. La funzione $w(\vartheta)$ si annulla per $\cos(\vartheta - \vartheta_0) = \bar{w}/A$; quindi si ha

$$\Delta\vartheta_+ = 2 \left(\pi - \arccos \frac{1}{e} \right), \quad \Delta\vartheta_- = 2 \arccos \frac{1}{e}.$$

Nella letteratura questa discussione è frequentemente riportata facendo riferimento direttamente alla distanza r , secondo lo schema descritto alla fine dei paragrafi 2.4.3 e 2.5. In tal caso il potenziale efficace $V^*(r)$ si scrive

$$(2.45) \quad V^*(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r},$$

ed ha l'andamento rappresentato in figura 2.10. Il calcolo dell'orbita si effettua risolvendo la (2.25), ossia calcolando

$$\vartheta - \vartheta_0 = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int^r \frac{d\varrho}{\varrho^2 \sqrt{E + \frac{k}{\varrho} - \frac{L^2}{2\mu\varrho^2}}};$$

si riottiene così l'equazione (2.43), con

$$(2.46) \quad p = \frac{L^2}{k\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2\mu}}.$$

A conclusione di questa analisi si può tornare a confrontare i risultati dedotti dalla dinamica con le leggi di Keplero.

La forma ellittica delle orbite col sole in un fuoco, stabilita dalla prima legge, risulta pienamente confermata dal modello dei due corpi. Si vede però che, accanto alle orbite ellittiche, viene messa in evidenza anche la possibilità che esistano orbite paraboliche e iperboliche, sconosciute a Keplero.

Più delicato è il confronto con la terza legge di Keplero. Si tratta qui di calcolare il rapporto a^3/T^2 , e controllare se dipende solo dal sole. Il periodo T si calcola mediante la velocità areolare, e si ottiene $T = 2\pi ab\mu/L$; dove a e b sono i semiassi maggiore e minore dell'ellisse. Facendo poi uso delle relazioni (1.2) tra gli elementi dell'ellisse, e del valore di p dato dalla (2.44) si calcola

$$(2.47) \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{k}{4\pi^2\mu} .$$

Se infine si ricorda che per la legge di gravitazione universale è $k = \mathcal{G}m_1m_2$, e che la massa ridotta è $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$, si ottiene

$$(2.48) \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{4\pi^2} .$$

Si vede dunque che la terza legge di Keplero può considerarsi ben verificata solo se la massa del pianeta è trascurabile rispetto a quella del sole.

2.7 Potenziali con orbite chiuse

Un problema interessante, risolto da Bertrand¹⁰, consiste nel cercare potenziali caratterizzati dal fatto che tutte le orbite limitate sono chiuse;^[9] questo studio fornisce anche l'occasione per mettere in evidenza altri aspetti del problema del moto centrale.

Un primo risultato si può ottenere applicando alla (2.26) il metodo di approssimazione delle piccole oscillazioni in prossimità di un punto di equilibrio stabile. A tal fine, basta che la funzione $\mathcal{V}^*(w)$ abbia un punto di minimo, diciamo in \bar{w} ; a tale punto corrisponderà nel piano r, ϑ un'orbita circolare di raggio $\bar{r} = 1/\bar{w}$, percorsa con velocità uniforme. Se si considera L fissato e $C \geq C_{\min}$ si avrà un'orbita limitata prossima ad una circonferenza, per la quale ha senso definire l'angolo $\Delta\vartheta$ tra due pericentri consecutivi. Ha quindi senso definire $\Delta\vartheta_{\text{circ}}$ come il limite di $\Delta\vartheta$ per orbite infinitamente vicine a quella circolare. Si ha allora il seguente

Lemma 2.7: *Si consideri un campo di forze centrali con energia potenziale $V(r)$, e sia $\mathcal{V}(w) = V(1/w)$; sia inoltre $w(\vartheta) = \bar{w}$ una soluzione di equilibrio dell'equazione dell'orbita (2.26), soddisfacente l'ulteriore condizione*

$$(2.49) \quad 1 + \frac{\mu}{L^2} \mathcal{V}''(\bar{w}) > 0 .$$

¹⁰ La dimostrazione qui riportata è suggerita in Arnold [6], cap. 2, § 8. Una dimostrazione tecnicamente diversa è riportata in Tisserand [123], Vol. I, pp. 43-48.

Allora si ha

$$(2.50) \quad \Delta\vartheta_{\text{circ}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{\bar{w}\mathcal{V}''(\bar{w})}{\mathcal{V}'(\bar{w})}}} .$$

Dimostrazione. Perché \bar{w} sia soluzione di equilibrio stabile deve annullarsi la derivata prima di $\mathcal{V}^*(w)$, ossia deve essere

$$(2.51) \quad \bar{w} + \frac{\mu}{L^2}\mathcal{V}'(\bar{w}) = 0$$

La (2.49) assicura che \bar{w} è un punto di minimo, e quindi per dati iniziali prossimi a \bar{w} si hanno oscillazioni. Approssimando $\mathcal{V}^*(w)$, a meno di una costante inessenziale, con la parte quadratica dello sviluppo di \mathcal{V}^* nell'intorno di \bar{w} , ossia con

$$\left(1 + \frac{\mu}{L^2}\mathcal{V}''(\bar{w})\right) \frac{(w - \bar{w})^2}{2} ,$$

si ottiene

$$\Delta\vartheta_{\text{circ}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \frac{\mu}{L^2}\mathcal{V}''(\bar{w})}} .$$

La (2.50) si ottiene allora sostituendo il valore di L^2 ricavato dalla (2.51) *Q.E.D.*

Per quanto discusso sopra si vede che se esiste una soluzione di equilibrio stabile \bar{w} , ne esiste anche una famiglia parametrizzata da L ; in questo caso il lemma 2.7 consente di calcolare $\Delta\vartheta_{\text{circ}}$ come funzione di $\bar{w} = \bar{w}(L)$. Ci si può chiedere se esistano dei campi di forza caratterizzati dal fatto che $\Delta\vartheta_{\text{circ}}$ è indipendente da \bar{w} , ovvero da L . A questa domanda risponde il

Lemma 2.8: *I soli campi di forze centrali per cui $\Delta\vartheta_{\text{circ}}$ è indipendente dal raggio dell'orbita circolare sono quelli con energia potenziale*

$$(2.52) \quad \begin{aligned} V(r) &= \frac{k}{\alpha}r^\alpha , & \alpha \neq 0 , \alpha > -2 , \\ V(r) &= k \ln r , \end{aligned}$$

dove k è una costante positiva; inoltre in questi casi si ha

$$(2.53) \quad \Delta\vartheta_{\text{circ}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2 + \alpha}} ,$$

dove il valore $\alpha = 0$ corrisponde al potenziale logaritmico.

Dimostrazione. Dal lemma 2.7, imponendo che $\Delta\vartheta_{\text{circ}}$ sia indipendente da \bar{w} , si ottiene che $\mathcal{V}(w)$ deve soddisfare l'equazione differenziale

$$\frac{\mathcal{V}' - w\mathcal{V}''}{\mathcal{V}'} = \gamma > 0 ,$$

dove γ è una costante, e l'ulteriore condizione $\mathcal{V}' < 0$, necessaria perché esista la soluzione dell'equazione (2.51) per l'equilibrio (si ricordi che $w > 0$). Integrando una prima volta si ottiene $\mathcal{V}'(w) = \beta w^{1-\gamma}$, con una costante arbitraria di integrazione β ;

integrando una seconda volta, e ignorando la costante di integrazione (irrilevante per il movimento), si ottiene

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(w) &= \frac{\beta}{2-\gamma} w^{2-\gamma} && \text{per } \gamma \neq 2, \\ \mathcal{V}(w) &= \beta \ln w && \text{per } \gamma = 2,\end{aligned}$$

e si ha evidentemente $\Delta\vartheta_{\text{circ}} = 2\pi/\sqrt{\gamma}$. La condizione su \mathcal{V}' impone poi che sia $\beta < 0$, e le (2.52) e (2.53) si ottengono ponendo $\alpha = \gamma - 2$ e $k = -\beta$. *Q.E.D.*

Occorre ora prendere in considerazione le orbite limitate non circolari. Supponendo L fissato, si avrà in corrispondenza di \bar{w} un valore $C_{\min} = \mathcal{V}^*(\bar{w})$, e per $C_{\min} < C < C_{\max}$, con un C_{\max} opportuno, si avranno orbite limitate. Nei casi dei potenziali della forma (2.52) sarà $C_{\max} = 0$ per $-2 < \alpha < 0$, e $C_{\max} = +\infty$ per $\alpha > 0$ e per il potenziale logaritmico. Per queste orbite si avrà un angolo $\Delta\vartheta$ dipendente, in generale, da C . Vale a tal proposito il seguente

Lemma 2.9: *Per i campi di forze centrali con energia potenziale della forma (2.52) si ha*

$$(2.54) \quad \lim_{C \rightarrow +\infty} \Delta\vartheta = \pi$$

per $\alpha > 0$ e per il caso logaritmico, e

$$(2.55) \quad \lim_{C \rightarrow 0^-} \Delta\vartheta = \frac{2\pi}{2 + \alpha}$$

per $-2 < \alpha < 0$.

Dimostrazione. In ambedue i casi si calcola $\Delta\vartheta$ mediante la formula generale (2.29), ossia

$$\Delta\vartheta = 2 \int_{w_{\min}}^{w_{\max}} \frac{dw}{\sqrt{2[C - \mathcal{V}^*(w)]}},$$

che si scrive in forma più esplicita

$$(2.56) \quad \Delta\vartheta = 2 \int_{w_{\min}}^{w_{\max}} \frac{dw}{\sqrt{2[C - \frac{1}{2}w^2 - \frac{\mu}{L^2}V(\frac{1}{w})]}}.$$

Si effettua poi la sostituzione $y = w/w_{\max}$, e si ottiene

$$(2.57) \quad \Delta\vartheta = 2 \int_{y_{\min}}^1 \frac{dy}{\sqrt{\frac{2C}{w_{\max}^2} - y^2 - \frac{2\mu}{L^2 w_{\max}^2} V\left(\frac{1}{yw_{\max}}\right)}}.$$

Nel caso $\alpha > 0$ del potenziale logaritmico si deve ricordare che è

$$C = \frac{1}{2}w_{\max}^2 + \frac{\mu}{L^2}V\left(\frac{1}{w_{\max}}\right);$$

si osserva poi che per $C \rightarrow \infty$ si ha $w_{\max} \rightarrow \infty$ e $w_{\min} \rightarrow 0$; il termine che contiene V quindi si annulla, e l'integrale tende a

$$\Delta\vartheta = 2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pi ,$$

e da qui segue la (2.54). Nel caso $-2 < \alpha < 0$ si sostituisce nella (2.56) l'espressione esplicita $V(r) = -kr^\alpha$; per $C \rightarrow 0^-$ si ha allora $w_{\min} \rightarrow 0$, mentre w_{\max} si deve calcolare annullando il radicando della (2.56) per $C = 0$, e si ottiene

$$w_{\max}^{2+\alpha} = \frac{2k\mu}{L^2} .$$

Sostituendo nella (2.57) si ricava allora¹¹

$$\Delta\vartheta = 2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^{-\alpha} - y^2}} = \frac{2\pi}{2 + \alpha} ,$$

ossia la (2.55).

Q.E.D.

A conclusione di questa discussione si perviene alla formulazione del teorema di Bertrand

Proposizione 2.10: *I soli campi di forze centrali per cui tutte le orbite limitate siano chiuse sono quelli con potenziale armonico, $V = kr^2/2$ e Kepleriano, $V = -k/r$.*

Dimostrazione. In generale $\Delta\vartheta$, calcolato mediante la (2.29), dipende in modo continuo dalle costanti C e L , determinate a loro volta mediante i dati iniziali. Perché tutte le orbite limitate siano chiuse occorre che l'angolo $\Delta\vartheta$ tra due perielii consecutivi sia in rapporto razionale con 2π ; per continuità, questo implica che $\Delta\vartheta$ deve essere indipendente sia da L che da C . Per il lemma 2.8, l'indipendenza da L seleziona i soli potenziali della forma (2.52). Se ora si fissa L , l'indipendenza da C richiede almeno che $\Delta\vartheta_{\text{circ}}$ coincida con il limite di $\Delta\vartheta$ quando $w_{\max} \rightarrow +\infty$. Confrontando i risultati del lemma 2.9 con quelli del lemma 2.8 si hanno due casi. Scegliendo nella (2.52) $\alpha > 0$, oppure il potenziale logaritmico (corrispondente a $\alpha = 0$) si ha la condizione

$$\frac{2\pi}{\sqrt{2+\alpha}} = \pi$$

soddisfatta solo per $\alpha = 2$, ossia per il potenziale armonico, con $\Delta\vartheta = \pi$. Per $-2 < \alpha < 0$ si ha invece la condizione

$$\frac{2\pi}{\sqrt{2+\alpha}} = \frac{2\pi}{2+\alpha}$$

soddisfatta solo per $\alpha = -1$, ossia per il potenziale Kepleriano, con $\Delta\vartheta = 2\pi$. Restano quindi i soli condidati $V(r) = kr^2/2$ e $V(r) = -k/r$, per i quali occorrerebbe verificare che l'orbita è effettivamente chiusa per tutti i valori di L e C che danno orbite limitate. Questo calcolo è già stato svolto nel paragrafo 2.6.1 per il potenziale armonico e nel

¹¹ Per il calcolo dell'integrale si effettua la sostituzione $y^{(2+\alpha)/2} = \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

paragrafo 2.6.3 per il caso Kepleriano, dove si è visto che le orbite sono in ambedue i casi ellittiche, e dunque chiuse. Q.E.D.

2.8 Il problema a molti corpi

Il problema dei due corpi, e la conseguente riduzione al problema del moto centrale, hanno fin qui consentito di verificare la corrispondenza tra le previsioni della dinamica Newtoniana e le leggi fenomenologiche di Keplero. È ora tempo di effettuare un ulteriore allargamento, passando senz'altro a discutere il problema di n punti materiali interagenti.

2.8.1 Equazioni e leggi di conservazione

Nello scrivere le equazioni di moto di un sistema di n punti si dovrà tener conto della interazione reciproca di tutti i punti. A tal fine si farà uso del *principio di sovrapposizione delle forze*, ammettendo, con Newton, che la forza totale esercitata su un punto qualsiasi da tutti gli altri punti del sistema sia la somma vettoriale delle singole forze dovute a ciascuno degli altri punti.

Come forza agente si dovrà considerare la forza gravitazionale; tuttavia, i primi risultati possono dedursi per campi di forze più generali. Più precisamente, facendo riferimento ad un sistema di coordinate cartesiane solidali con le stelle fisse, e denotando con \mathbf{x}_j , ($1 \leq j \leq n$) le coordinate dei punti, con \mathbf{F}_{jk} la forza che il punto \mathbf{x}_k esercita sul punto \mathbf{x}_j , e con $|\cdot|$ la distanza euclidea in \mathbb{R}^3 si supponrà che valgano le seguenti ipotesi¹² (*forze di tipo classico*):

i. *principio di azione e reazione:*

$$(2.58) \quad \mathbf{F}_{jk} + \mathbf{F}_{kj} = 0 ;$$

ii. *principio delle forze centrali:*

$$(2.59) \quad (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \wedge \mathbf{F}_{jk} = 0 ;$$

iii. *principio di invarianza per rotazioni:*

$$(2.60) \quad \mathbf{F}_{jk} = \mathbf{F}_{jk}(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|) ;$$

intendendo con questo che l'intensità della forza dipende dalla sola distanza tra i punti.

¹² La discussione qui riportata è volutamente sommaria, non essendo scopo di queste note spiegare i fondamenti della meccanica. In particolare, si considera il sistema di punti come isolato nello spazio, e quindi non soggetto a forze esterne. Per un'esposizione più completa e generale si rimanda ai testi di Meccanica Razionale.

Sotto queste ipotesi la forza assume l'espressione generale

$$(2.61) \quad \mathbf{F}_{jk} = f_{jk}(r_{jk}) \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k}{r_{jk}},$$

dove $r_{jk} = |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|$, e f_{jk} è una funzione reale della sola variabile reale r_{jk} . È ben noto che una forza siffatta ammette potenziale; questo del resto si può facilmente mostrare rifacendosi al problema dei due corpi, e riscrivendo l'energia potenziale totale come somma dei contributi di tutte le coppie di punti.

Le equazioni di Newton per il sistema di punti si scriveranno pertanto, denotando con m_1, \dots, m_n le masse dei punti,

$$(2.62) \quad m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \mathbf{F}_{jk}, \quad 1 \leq j \leq n;$$

questo è un sistema di $3n$ equazioni differenziali del secondo ordine. Lo studio di queste equazioni è, in generale, tutt'altro che agevole. In effetti, i soli risultati generali sono quelli relativi all'esistenza degli integrali primi classici, comunemente riportati nei testi di Meccanica Classica. A tal fine si introducono la *quantità di moto* totale \mathbf{P} , il *momento angolare* totale \mathbf{M}_O rispetto all'origine O del riferimento cartesiano, l'*energia cinetica* totale T e l'*energia potenziale* V definite come

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_j m_j \dot{\mathbf{x}}_j \\ \mathbf{M}_O &= \sum_j \mathbf{x}_j \wedge m_j \dot{\mathbf{x}}_j \\ T &= \frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{\mathbf{x}}_j^2 \\ V &= \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} V_{jk}(r_{jk}) \end{aligned}$$

qui $V_{jk}(r_{jk})$ è l'energia potenziale della coppia di punti $\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k$, definita (a meno di una costante arbitraria) mediante la relazione $f_{jk}(r_{jk}) = -V'_{jk}(r_{jk})$, dove f_{jk} è l'intensità della forza che compare nelle (2.61). Le leggi di conservazione sono enunciate nelle tre proposizioni seguenti.

Proposizione 2.11: *Se le forze soddisfano al principio di azione e reazione (2.58) allora la quantità di moto totale \mathbf{P} è un integrale primo del sistema di equazioni (2.62).*

Dimostrazione. Derivando rispetto al tempo, e facendo uso delle (2.62) si ottiene

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_j m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = \sum_{j \neq k} \mathbf{F}_{jk} = \sum_{j < k} (\mathbf{F}_{jk} + \mathbf{F}_{kj}) = 0$$

in virtù della (2.58).

Q.E.D.

Proposizione 2.12: *Se le forze soddisfano i principi di azione e reazione (2.58) e delle forze centrali (2.59), allora il momento angolare totale \mathbf{M}_O è un integrale primo del sistema di equazioni (2.62).*

Dimostrazione. Basta calcolare

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{M}}_O &= \sum_j \mathbf{x}_j \wedge m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = \sum_{j \neq k} \mathbf{x}_j \wedge \mathbf{F}_{jk} \\ &= \sum_{j < k} (\mathbf{x}_j \wedge \mathbf{F}_{jk} + \mathbf{x}_k \wedge \mathbf{F}_{kj}) \\ &= \sum_{j < k} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \wedge \mathbf{F}_{jk} = 0 ;\end{aligned}$$

qui si è fatto uso successivamente delle (2.58) e (2.59).

Q.E.D.

Proposizione 2.13: *Se le forze soddisfano i principi di azione e reazione (2.58) delle forze centrali (2.59) e dell'invarianza per rotazioni (2.60), allora l'energia totale $E = T + V$ è un integrale primo del sistema di equazioni (2.62).*

Dimostrazione. Derivando rispetto al tempo l'energia cinetica T si ha

$$\dot{T} = \sum_j m_j \dot{\mathbf{x}}_j \cdot \ddot{\mathbf{x}}_j = \sum_{j \neq k} \dot{\mathbf{x}}_j \cdot \mathbf{F}_{jk} = \sum_{j < k} (\dot{\mathbf{x}}_j - \dot{\mathbf{x}}_k) \cdot \mathbf{F}_{jk} .$$

Facendo poi uso dell'espressione (2.61) della forza si ha¹³

$$\begin{aligned}(\dot{\mathbf{x}}_j - \dot{\mathbf{x}}_k) \cdot \mathbf{F}_{jk} &= f_{jk}(r_{jk}) \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \cdot (\dot{\mathbf{x}}_j - \dot{\mathbf{x}}_k)}{r_{jk}} \\ &= f_{jk}(r_{jk}) \dot{r}_{jk} = -\dot{V}_{jk}(r_{jk})\end{aligned}$$

qui si è fatto uso dell'identità $(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \cdot (\dot{\mathbf{x}}_j - \dot{\mathbf{x}}_k) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} r_{jk}^2 = r_{jk} \dot{r}_{jk}$. Sostituendo nell'espressione di \dot{T} si ottiene subito $\dot{T} = -\dot{V}$. *Q.E.D.*

Nel caso dei due corpi, $n = 2$, l'esistenza di questi integrali primi è sufficiente per ridurre il problema alle quadrature: questo è stato ampiamente discusso nel paragrafo 2.4. Ciò non è più vero per $n > 2$, e d'altra parte Poincaré ha dimostrato che non ne esistono, in generale, altri: su questo tema si tornerà più avanti. È però possibile, almeno in linea di principio sfruttare questi integrali primi per diminuire l'ordine del sistema (2.62). La minima riduzione possibile verrà illustrata più avanti per il problema dei tre corpi; nel seguito di questo paragrafo si discute invece un metodo per l'eliminazione del centro di massa.

2.8.2 Le coordinate eliocentriche e l'approssimazione Kepleriana

È conveniente nel seguito introdurre un cambiamento di notazione, che tiene implicitamente conto del ruolo privilegiato del sole nel sistema solare.¹⁴ Precisamente, si considerino $n+1$ punti materiali P_0, \dots, P_n di massa m_0, \dots, m_n , e si supponga che la massa m_0 sia preponderante rispetto alle altre, ossia che si abbia $m_0 \gg m_j$, ($1 \leq j \leq n$).

¹³ Per inciso, questo calcolo dimostra di fatto che l'energia potenziale esiste ed è additiva.

¹⁴ Questo sistema di coordinate non è molto comune nei testi di meccanica celeste, ove viene preferito il sistema di coordinate di Jacobi di cui si parlerà più avanti.

Mettendo in evidenza l'equazione per il punto P_0 il sistema di equazioni (2.62) si riscrive

$$(2.63) \quad \begin{aligned} m_0 \ddot{\mathbf{x}}_0 &= \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbf{F}_{0k} \\ m_j \ddot{\mathbf{x}}_j &= \mathbf{F}_{j0} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \mathbf{F}_{jk}, \quad 1 \leq j \leq n, \end{aligned}$$

che è un sistema di $3(n+1)$ equazioni del secondo ordine. L'eliminazione del baricentro si effettua mediante le trasformazioni di coordinate

$$(2.64) \quad \begin{aligned} \mathbf{X} &= \frac{\sum_{j=0}^n m_j \mathbf{x}_j}{\sum_{j=0}^n m_j} \\ \mathbf{r}_j &= \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0, \quad 1 \leq j \leq n; \end{aligned}$$

qui \mathbf{X} è la coordinata del baricentro, e \mathbf{r}_j rappresenta il vettore congiungente il punto P_0 (sole) con P_j (pianeta). Il sistema (2.63) si trasforma così in

$$(2.65) \quad \begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}} &= 0 \\ \ddot{\mathbf{r}}_j &= \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_j} \right) \mathbf{F}_{j0} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \left(\frac{\mathbf{F}_{jk}}{m_j} - \frac{\mathbf{F}_{0k}}{m_0} \right), \quad 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

La prima equazione dà immediatamente il moto del baricentro, e resta dunque un sistema di $3n$ equazioni del secondo ordine. È interessante notare che \mathbf{F}_{j0} dipende solo dalla distanza $|\mathbf{r}_j|$ tra P_j e P_0 ; il primo termine a destra delle (2.65) coincide con quello che si ottiene dal problema dei due corpi. L'azione di tutti gli altri punti è invece concentrata nella somma; se si potesse mostrare che il contributo della somma è trascurabile rispetto al primo termine si avrebbe una ragionevole giustificazione della descrizione Kepleriana del moto planetario. Naturalmente, non si può trarre nessuna conclusione senza tener conto della forma esplicita della forza. Occorre dunque sostituire nelle (2.65) l'espressione della forza nel caso Kepleriano, ossia

$$\mathbf{F}_{jk} = -\mathcal{G} m_j m_k \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^3};$$

con qualche calcolo si ottiene

$$(2.66) \quad \ddot{\mathbf{r}}_j = -\mathcal{G}(m_0 + m_j) \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} - \mathcal{G} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} m_k \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^3} + \frac{\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_k|^3} \right), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Nel valutare i termini che compaiono in queste equazioni bisogna tener conto sia delle masse che compaiono a fattore, sia dei quadrati delle distanze che compaiono a denominatore.

Se le distanze reciproche tra i punti P_1, \dots, P_n non diventano troppo piccole l'evoluzione del sistema è ben descritta, per tempi non troppo lunghi, dalle equazioni

$$(2.67) \quad \ddot{\mathbf{r}}_j = -\mathcal{G}(m_0 + m_j) \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3}$$

ossia dal moto Kepleriano. Ciò è dovuto al fatto che il fattore $m_0 + m_j$ che compare nel primo termine della (2.66) risulta preponderante rispetto agli altri fattori che compaiono negli altri termini.

Nel caso di distanze piccole l'approssimazione descritta non è più valida. A titolo di esempio, si consideri il caso $n = 2$, e si supponga che la distanza tra P_1 e P_2 sia molto piccola rispetto alla distanza di P_1 e P_2 da P_0 , ossia che si abbia $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \ll |\mathbf{r}_1| \approx |\mathbf{r}_2|$. Le equazioni (2.66) si scrivono in questo caso

$$(2.68) \quad \begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\mathcal{G}(m_0 + m_1) \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} - \mathcal{G}m_2 \left(\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} + \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3} \right) \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\mathcal{G}(m_0 + m_2) \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3} - \mathcal{G}m_1 \left(\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} \right) ; \end{aligned}$$

procedendo allora come per il problema dei due corpi si introducono il baricentro \mathbf{R} dei punti P_1, P_2 e la distanza reciproca \mathbf{r} , ossia

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

e si ricavano le equazioni per \mathbf{R} e \mathbf{r} dal sistema (2.68), introducendo l'approssimazione $\mathbf{r}_1 \approx \mathbf{r}_2 \approx \mathbf{R}$. Si ottiene

$$(2.69) \quad \begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}} &= -\mathcal{G}(m_0 + m_1 + m_2) \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \\ \ddot{\mathbf{r}} &= -\mathcal{G}(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \end{aligned}$$

Ci si deve dunque aspettare che il baricentro di P_1, P_2 percorra un'orbita Kepleriana intorno a P_0 , mentre P_1 e P_2 si comporteranno a loro volta come un sistema a due corpi. In questa approssimazione si rende dunque ragione del moto di un satellite.