3

RICHIAMI SUL FORMALISMO HAMILTONIANO

Il formalismo hamiltoniano, o canonico, deve ormai considerarsi come lo strumento principe nello studio della dinamica dei sistemi conservativi e nello sviluppo della teoria delle perturbazioni.

In questo capitolo intendo richiamare alcune nozioni di cui si farà uso nel resto di queste note: la forma canonica delle equazioni, l'algebra delle parentesi di Poisson, le trasformazioni canoniche. Nella maggior parte dei casi verrà omessa la dimostrazione dei risultati: per questo si rimanda ai testi di Meccanica Analitica.[1] In particolare, nel discutere le trasformazioni canoniche si assume l'atteggiamento pragmatico di rispondere a due domande: (i) come stabilire se una data trasformazione sia canonica o no; (ii) come costruire una trasformazione canonica facendo uso di una funzione generatrice.

3.1 Lo spazio delle fasi e le equazioni di Hamilton

Lo stato di un sistema meccanico a n gradi di libertà viene identificato da un punto su una varietà differenziabile a $2n$ dimensioni, che verrà denotata genericamente con $\mathscr{F}$, sulla quale sono assegnate delle coordinate canonicamente coniugate $(q,p) \equiv (q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n)$. L'evoluzione del sistema è rappresentata dalle funzioni $q(t),p(t)$, dove t varia in un intervallo reale (finito o infinito).

L'evoluzione è determinata da una funzione $H : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$, detta *Hamiltoniana*, mediante le *equazioni canoniche* (o equazioni di Hamilton)

$$\dot q_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}\ , \quad \dot p_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}\ , \quad j=1,\ldots,n\ , \tag{3.1}$$

dove $H = H(q,p)$. Se $H(q,p)$ è indipendente dal tempo si parla di sistema *autonomo.* Più in generale si potrà considerare il caso di una Hamiltoniana dipen-

[1] Senza la minima pretesa di dare un elenco esaustivo (cosa del resto non facile) mi limito a citare i trattati di Whittaker [127], Wintner [129], Gantmacher [42] e Arnold [6].

dente dal tempo $H(q,p,t)$, nel qual caso si parla di sistema *non autonomo*. Si può però osservare che il caso non autonomo può ricondursi a quello autonomo mediante un'estensione banale dello spazio delle fasi.[2] Precisamente, alle variabili canoniche $(q,p) \equiv (q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n)$ si aggiunge una coppia di variabili, che denoteremo con (q_0,p_0), sicché la dimensione delle spazio delle fasi viene incrementata di 2. Data poi l'Hamiltoniana $H(q,p,t)$ si introduce la nuova Hamiltoniana sullo spazio esteso

$$\tilde{H}(q,q_0,p,p_0) = H(q,p,q_0) + p_0 \ .$$

Per questa si scrivono le equazioni di Hamilton

$$\dot{q}_0 = 1 \ , \quad \dot{p}_0 = -\frac{\partial H}{\partial q_0} \quad \text{e} \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \ , \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \ , \quad j-1,\ldots,n \ .$$

Si osserva subito che la prima equazione ammette la soluzione banale $q_0(t) = t - t_0$, dove t_0 è l'istante iniziale. Grazie a questo, le equazioni per $q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n$ coincidono di fatto con le (3.1). Supponendo di averne determinato le soluzioni $q(t),p(t)$, si sostituiscono queste funzioni del tempo nel secondo membro dell'equazione per $\dot{p}_0$, ricavandone una funzione nota del tempo t. Si ottiene così un'equazione a variabili separate, che si integra per quadrature. In virtù di questa osservazione nel seguito di questo capitolo considererò il solo caso autonomo, e aggiungerò qualche considerazione sulle trasformazioni canoniche per il caso non autonomo nel paragrafo 3.2.4.

3.1.1 Parentesi di Poisson

Siano $f(q,p)$ e $g(q,p)$ funzioni differenziabili. La loro *parentesi di Poisson* è una nuova funzione definita come

$$\{g,f\} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q_j} \right) \ ; \tag{3.2}$$

L'operazione di parentesi di Poisson soddisfa alcune proprietà notevoli. Se f, g e h sono variabili dinamiche differenziabili, e α è una costante reale abbiamo:

(i) bilinearità:

$$\begin{aligned} \{f,g+h\} &= \{f,g\} + \{f,h\} \ , \quad \{f,\alpha g\} = \alpha\{f,g\} \ , \\ \{f+g,h\} &= \{f,h\} + \{g,h\} \ , \quad \{\alpha f,g\} = \alpha\{f,g\} \ ; \end{aligned}$$

[2] Nella maggior parte dei testi di Meccanica Analitica si tende a considerare il caso generale di sistemi non autonomi. Un tale atteggiamento appare giustificato se si ricorda che uno dei procedimenti tradizionali consiste nel cercare di ridurre l'ordine delle equazioni differenziali mediante integrazioni successive. Un esempio tipico si trova nel testo classico di Whittaker [127], cap. XII, § 141, ove si mostra come si possa far uso dell'integrale primo dell'energia per ricondurre un sistema Hamiltoniano autonomo a un sistema non autonomo eliminando un grado di libertà — il che corrisponde in qualche modo a seguire un percorso che è l'opposto di quello suggerito qui. La scelta di ricondursi sistematicamente al caso autonomo si giustifica invece se si osserva che nello sviluppo della teoria si ha una semplificazione di enunciati e calcoli. Per inciso, il procedimento seguito in queste note è usato nel trattato di Poincaré [105], cap. I, § 12.

(ii) anticommutatività: $\{f, g\} = -\{g, f\}$;
(iii) identità di Jacobi: $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$;
(iv) regola di Leibniz: $\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$;
(v) derivate:

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\{f, g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial q_j}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial q_j}\right\}$$
$$\frac{\partial}{\partial p_j}\{f, g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial p_j}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial p_j}\right\}\ , \quad 1 \le j \le n\ .$$

La dimostrazione delle proprietà è lasciata al lettore.

3.1.2 Variabili dinamiche e integrali primi

Una *variabile dinamica* è una funzione reale differenziabile $f(q, p)$ sullo spazio delle fasi. Ad esempio, l'Hamiltoniana stessa è una variabile dinamica. Se le coordinate evolvono nel tempo come funzioni $\bigl(q(t), p(t)\bigr)$, ne segue che anche la variabile dinamica evolve nel tempo come $f\bigl(q(t), p(t)\bigr)$. In particolare se il flusso $\bigl(q(t), p(t)\bigr)$ è determinato dalle equazioni canoniche (3.1) allora l'evoluzione temporale di $f(p, q)$ obbedisce all'equazione

$$\dot{f} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) = \{f, H\}\ . \tag{3.3}$$

Questa del resto altro non è che la derivata temporale di f lungo il flusso indotto da H, talvolta detta anche derivata di Lie e denotata come $L_H f$. In coordinate l'operatore L_H assume la forma[3]

$$L_H := \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j}\right)\ . \tag{3.4}$$

---

[3] Le proprietà della parentesi di Poisson si riscrivono facilmente in termini di derivate di Lie:

(i) $L_f(g + h) = L_f g + L_f h\ , \quad L_f(\alpha g) = \alpha L_f g\ ,$

(ii) $L_f g = -L_g f\ ,$

(iii) $[L_f, L_g] = L_{\{f,g\}}\ ,$

(iv) $L_f(gh) = gL_f h + hL_f g\ ,$

(v) $\left[\frac{\partial}{\partial q_j}, L_f\right] = L_{\frac{\partial f}{\partial q_j}}\ , \quad \left[\frac{\partial}{\partial p_j}, L_f\right] = L_{\frac{\partial f}{\partial p_j}}\ , \quad 1 \le j \le n\ .$

Qui ho usato la notazione $[\cdot, \cdot]$ per il commutatore tra due operatori lineari, ossia $[L_f, L_g] = L_f L_g - L_g L_f$. Si osservi in particolare che la proprietà (iii) significa che il commutatore tra i campi vettoriali Hamiltoniani generati da f e g è il campo vettoriale Hamiltoniano generato da $\{f, g\}$.

L'evoluzione di una variabile dinamica soddisfa dunque l'equazione alle derivate parziali $\dot{f} = \{f, H\}$, ovvero

$$\dot{f} = L_H f \ . \tag{3.5}$$

Di conseguenza, tutta la dinamica Hamiltoniana può esprimersi in termini di parentesi di Poisson. In particolare le equazioni di Hamilton possono riscriversi nella forma simmetrica (si veda ad esempio [71])

$$\dot{q}_j = \{q_j, H\} \ , \quad \dot{p}_j = \{p_j, H\} \ , \quad 1 \le j \le n \ , \tag{3.6}$$

Una variabile dinamica $\Phi(q,p)$ viene detta *costante del moto*, o spesso *integrale primo*, se mantiene costante il suo valore sotto il flusso indotto dalle equazioni (3.1). In altre parole, se $\bigl(q(t), p(t)\bigr)$ è la soluzione delle equazioni canoniche corrispondente al dato iniziale $q(0) = q_0$, $p(0) = p_0$ deve valere $\Phi\bigl(q(t), p(t)\bigr) = \Phi(q_0, p_0)$ per tutti i t.

Ciò implica (se $\Phi(q,p)$ è differenziabile) che debba valere $\dot{\Phi} = 0$. In virtù della (3.3) si vede subito che *ogni funzione* $\Phi(q,p)$ *che soddisfi l'equazione alle derivate parziali*

$$L_H \Phi = 0 \tag{3.7}$$

è un integrale primo.

Tenuto conto delle proprietà delle derivate di Lie possiamo enunciare le proposizioni seguenti:

(i) l'Hamiltoniana di un sistema canonico autonomo è un integrale primo;

(ii) se $\Phi(q,p)$ e $\Psi(q,p)$ sono integrali primi differenziabili, allora anche $\{\Phi, \Psi\}$ è un integrale primo.

La prima affermazione segue dall'anticommutatività della parentesi di Poisson. La seconda è una conseguenza dell'identità di Jacobi.

3.2 Trasformazioni canoniche

Anche nel caso Hamiltoniano si può far ricorso a cambiamenti di coordinate per semplificare le equazioni. In generale però si perde la forma canonica, nel senso che le equazioni trasformate non possono più scriversi come equazioni di Hamilton con un'opportuna Hamiltoniana. D'altra parte la forma canonica offre notevoli vantaggi, il che rende interessante studiare se esista una classe di trasformazioni che la mantenga. Questo porta a introdurre il gruppo delle *trasformazioni canoniche*.

In queste note mi limiterò a mettere in evidenza due criteri di canonicità:

(i) la trasformazione conserva le parentesi di Poisson;

(ii) la trasformazione conserva l'integrale della 1–forma $\sum_j p_j dq_j$ lungo una curva chiusa.

Questi criteri consentono di verificare facilmente se una trasformazione assegnata sia canonica. Inoltre, esiste anche un metodo per costruire delle trasformazioni certamente canoniche facendo uso di *funzioni generatrici*. Questo metodo sta alla base di ulteriori sviluppi che conducono all'equazione di Hamilton–Jacobi e al teorema di Liouville sull'integrabilità per quadrature.

3.2.1 Trasformazioni che mantengono la forma Hamiltoniana delle equazioni.

Cerchiamo anzitutto delle trasformazioni $(q,p) = \mathcal{C}(Q,P)$ che godano della proprietà seguente: *a ogni Hamiltoniana $H(q,p)$ si può associare un'altra funzione $K(Q,P)$ tale che il sistema di equazioni canoniche*

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \ , \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \ , \quad j = 1, \ldots, n \ ,$$

viene trasformato nel sistema

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j} \ , \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial K}{\partial Q_j} \ , \quad j = 1, \ldots, n \ ,$$

anch'esso canonico.

Se il sistema Hamiltoniano che si considera è autonomo (per ora ci restringiamo a questo caso) e la trasformazione che si considera non dipende dal tempo, allora si puo richiedere che l'Hamiltoniana $K(Q,P)$ del sistema trasformato sia la trasformata dell'Hamiltoniana di partenza $H(q,p)$, ossia

$$K(Q,P) = H(q,p)\big|_{q=q(Q,P)\,,\,p=p(Q,P)} \ . \tag{3.8}$$

Il caso apparentemente più generale di sistemi non autonomi o trasformazioni dipendenti dal tempo può ricondursi a quello che stiamo discutendo.

Un primo esempio elementare di trasformazione canonica è la *traslazione*, definita come

$$q_j = Q_j + a_j \ , \quad p_j = P_j + b_j \ , \quad 1 \le j \le n \ ,$$

dove $a = (a_1, \ldots, a_n)$ e $b = (b_1, \ldots, b_n)$ sono costanti. Si verifica direttamente che le equazioni trasformate hanno ancora la forma canonica, con Hamiltoniana

$$K(Q,P) = H(q,p)\Big|_{q=Q+a\,,\,p=P+b} \ .$$

Un secondo esempio è la *trasformazione di scala*

$$q_j = \alpha Q_j \ , \quad p_j = \beta P_j \ , \quad 1 \le j \le n \ .$$

In questo caso l'Hamiltoniana trasformata è

$$K(Q,P) = \frac{1}{\alpha\beta} H(q,p)\bigg|_{q=\alpha Q\,,\,p=\beta P} \ .$$

È proprio questo l'esempio di una trasformazione che mantiene la forma canonica delle equazioni, ma con una nuova Hamiltoniana che non è semplicemente la trasformata della precedente. In effetti, la nuova Hamiltoniana soddisfa la (3.8), solo se $\alpha\beta = 1$. Dunque la trasformazione è canonica nel senso stretto adottato in queste note solo in quest'ultimo caso. La classe più generale considerata ad esempio da Wintner o Gantmacher si ottiene componendo una trasformazione canonica nel senso stretto qui adottato con una trasformazione di scala.

La trasformazione di scala può applicarsi separatamente alle coppie di coordinate. Così, ad esempio, la trasformazione

$$q_j = \alpha_j Q_j \ , \quad p_j = \frac{1}{\alpha_j} P_j \ , \quad 1 \le j \le n \ ,$$

è canonica in senso stretto. Nel caso $\alpha = 1$ ci si riduce all'identità.

Un terzo caso interessante è lo *scambio di coordinate canoniche*, ossia

$$q_j = P_j \ , \quad p_j = -Q_j \ , \quad 1 \le j \le n \ . \tag{3.9}$$

L'Hamiltoniana trasformata è

$$K(Q,P) = H(q,p)\big|_{q=P\,,\,p=-Q} \ .$$

È consentito anche scambiare solo alcune coppie di coordinate: la trasformazione resta canonica.

3.2.2 Conservazione delle parentesi di Poisson

Ci occupiamo qui di enunciare un criterio di canonicità, ossia di metterci in grado di verificare se una data trasformazione sia canonica.

Abbiamo già osservato che il formalismo Hamiltoniano può riformularsi in termini di parentesi di Poisson, dato che l'evoluzione temporale di qualunque variabile dinamica f (ivi comprese le coordinate) soddisfa l'equazione $\dot f = \{f,H\}$. Questo fatto conduce in modo naturale a caratterizzare le trasformazioni canoniche come quelle che mantengono invariata la forma della parentesi di Poisson.

Sia $(q,p) = \mathscr{C}(Q,P)$ una trasformazione di coordinate, e denotiamo con $\mathscr{C}f$ la funzione trasformata

$$\bigl(\mathscr{C}f\bigr)(Q,P) = f(q,p)\Big|_{(q,p)=\mathscr{C}(Q,P)} \ .$$

Denotiamo anche con $\{\cdot,\cdot\}_{q,p}$ e con $\{\cdot,\cdot\}_{Q,P}$ la parentesi di Poisson calcolata rispetto alle variabili q,p nel primo caso e Q,P nel secondo. Diremo che la trasformazione $\mathscr{C}$ *conserva le parentesi di Poisson* se per ogni coppia di funzioni f e g rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} f,g & \xrightarrow{\mathscr{C}} & \mathscr{C}f,\mathscr{C}g \\ {\scriptstyle\{\cdot,\cdot\}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\{\cdot,\cdot\}} \\ \{f,g\}_{q,p} & \xrightarrow[\mathscr{C}]{} & \mathscr{C}\bigl(\{f,g\}_{q,p}\bigr) = \{\mathscr{C}f,\mathscr{C}g\}_{Q,P} \ . \end{array} \tag{3.10}$$

In altre parole, si ottiene lo stesso risultato sia calcolando la parentesi di Poisson rispetto alle variabili q,p e poi applicando la trasformazione, sia trasformando le funzioni e poi calcolando la parentesi di Poisson rispetto alle nuove variabili.

Proposizione 3.1: *Una trasformazione $(q,p) = \mathscr{C}(Q,P)$ è canonica se e solo se conserva le parentesi di Poisson, ossia se il diagramma (3.10) è commutativo.*

La proposizione appena enunciata può trasformarsi in un criterio di canonicità effettivamente applicabile ricorrendo alle coordinate, considerate come variabili dinamiche. Si vede subito che valgono le relazioni

$$\begin{aligned} &\{q_j, q_k\} = \{p_j, p_k\} = 0 \\ &\{q_j, p_k\} = \delta_{jk} \end{aligned} \qquad 1 \le j \le n\ ,\ 1 \le k \le n \tag{3.11}$$

dove δ_{jk} è il simbolo di Kronecker. Queste espressioni vengono chiamate *parentesi di Poisson fondamentali*. Il nome è giustificato dal

Lemma 3.2: *Una trasformazione conserva le parentesi di Poisson tra due funzioni qualsiasi se e solo se conserva le parentesi di Poisson fondamentali.*

Questo conduce a formulare una condizione effettivamente applicabile:[4]

Proposizione 3.3: *Una trasformazione* $(q,p) = \mathscr{C}(Q,P)$ *è canonica se e solo se conserva le parentesi di Poisson fondamentali, ossia*

$$\begin{aligned} &\{q_j, q_k\}_{Q,P} = \{p_j, p_k\}_{Q,P} = 0 \\ &\{q_j, p_k\}_{Q,P} = \delta_{jk}\ , \qquad\qquad 1 \le j \le n\ , \quad 1 \le k \le n\ . \end{aligned} \tag{3.12}$$

Esempio 3.1: *Il caso di un grado di libertà.* Nel caso $n = 1$ la condizione di canonicità assume la forma particolarmente semplice

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial Q} & \dfrac{\partial q}{\partial P} \\ \dfrac{\partial p}{\partial Q} & \dfrac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} = 1\ ,$$

il che significa che la trasformazione deve conservare l'area.

3.2.3 Funzioni generatrici

Mostriamo ora come si possano costruire delle trasformazioni che siano certamente canoniche ricorrendo alle *funzioni generatrici*. L'argomento è assai vasto, ma, coerentemente con l'atteggiamento pragmatico tenuto fin qui, ci limitiamo a enunciare il metodo rimandando per una discussione più ampia ai testi di Meccanica Analitica.

Denotando con p, q le vecchie variabili e con P, Q le nuove, dobbiamo considerare una *funzione generatrice* $S(P, q)$ in variabili miste. Vale la

Proposizione 3.4: *Sia* $S(P, q)$ *una funzione differenziabile soddisfacente la condizione*

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial P_j \partial q_k} \right) \ne 0\ . \tag{3.13}$$

---

[4] Nei testi recenti si trova abitualmente il seguente enunciato: *una trasformazione è canonica se e solo se il suo Jacobiano è una matrice simplettica.* Il lettore che abbia familiarità col formalismo simplettico verificherà facilmente che si tratta esattamente della proprietà richiesta nella proposizione 3.3. Con un po' più di attenzione si vedrà anche che facendo uso della condizione sulle parentesi di Poisson fondamentali si alleggerisce il calcolo, perché si richiedono meno operazioni.

Allora la trasformazione definita implicitamente dalle relazioni

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}(P,q)\ ,\quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j}(P,q)\ ,\quad 1\le j\le n\ . \tag{3.14}$$

è canonica.

La (3.13) è una condizione di invertibilità (almeno locale). In effetti, le relazioni (3.14) definiscono p_j e Q_j come funzioni di q e P, sicché la trasformazione è definita in modo implicito. Per renderla esplicita abbiamo due vie. La prima è risolvere la prima equazione rispetto a P e sostituirla nella seconda; la seconda è risolvere la seconda equazione rispetto a q e sostituirla nella prima. In ambedue i casi la condizione (3.13) assicura che l'inversione è possibile.

Riportiamo ora due esempi utili.

Esempio 3.2: *Trasformazione puntuale estesa* Consideriamo la trasformazione *puntuale* $q = q(Q)$, che supponiamo essere un diffeomorfismo,[5] sicché vale

$$\det\frac{\partial(Q_1,\ldots,Q_n)}{\partial(q_1,\ldots,q_n)} \neq 0\ . \tag{3.15}$$

Si può completare la trasformazione in modo che sia canonica facendo uso della funzione generatrice

$$S(P,q) = \sum_k P_k Q_k\big|_{Q=Q(q)}\ .$$

Infatti la condizione di invertibilità 3.4 risulta soddisfatta in virtù della (3.15), perché

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial P_k \partial q_j}\right) = \det\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_j}\right) \neq 0\ .$$

La trasformazione completa si scrive

$$q_j = q_j(Q)\ ,\quad p_j = \sum_k P_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_j}(q)\ ,\quad 1\le j\le n\ .$$

Abbiamo così esteso una trasformazione puntuale a una canonica. È utile anche osservare che l'estensione non è unica: la trasformazione estesa più generale è quella definita mediante la funzione generatrice

$$S(P,q) = \sum_k P_k Q_k\big|_{Q=Q(q)} + W(q)\ , \tag{3.16}$$

dove $W(q)$ è una funzione arbitraria (differenziabile).

Esempio 3.3: *Trasformazioni canoniche prossime all'identità.* Consideriamo la funzione generatrice

$$S(P,q) = \sum_j P_j q_j + \varepsilon f(P,q)\ , \tag{3.17}$$

[5] Queste sono le trasformazioni di coordinate che vengono prese in considerazione nel formalismo lagrangiano.

dove $f(P, q)$ è una funzione arbitraria e ε è un parametro reale, che assumeremo piccolo. La condizione (3.13) è soddisfatta per $\varepsilon = 0$, e quindi, per continuità, anche per ε sufficientemente piccolo. La trasformazione si scrive in forma implicita

$$p_j = P_j + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial q_j}(P, q) \ , \quad Q_j = q_j + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial P_j}(P, q) \ , \quad 1 \le j \le n \ .$$

La trasformazione può porsi in forma esplicita ricorrendo a uno sviluppo nel parametro ε. Ad esempio, invertendo la seconda relazione rispetto a q e sostituendo il risultato nella prima si ottiene

$$\begin{aligned} q_j &= Q_j - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial P_j}(P, Q) + \varepsilon^2 \ldots \\ p_j &= P_j + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial q_j}(P, Q) + \varepsilon^2 \ldots \ . \end{aligned}$$

I termini successivi dello sviluppo in ε richiedono un calcolo tecnicamente più complesso, che procede per approssimazioni successive. Il nome *trasformazione prossima all'identità* si giustifica osservando che per $\varepsilon = 0$ ci si riduce effettivamente all'identità, mentre per $\varepsilon \neq 0$ le coordinate vengono deformate di una quantità piccola. Questo tipo di trasformazioni viene ampiamente usato in teoria delle perturbazioni.

La proposizione 3.4 ci dà un metodo per costruire trasformazioni che sono certamente canoniche, ma non afferma che tutte le trasformazioni canoniche possano costruirsi a questo modo. Un controesempio elementare è la trasformazione di scambio di coordinate coniugate (3.9) del paragrafo 3.2.1: il lettore verificherà facilmente che non esiste una funzione $S(P, q)$ che la produce.

Una seconda formulazione utile è contenuta nella seguente

Proposizione 3.5: *Sia $S(Q, q)$ una funzione differenziabile soddisfacente la condizione*

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial Q_k} \right) \neq 0 \ . \tag{3.18}$$

Allora la trasformazione definita implicitamente dalle relazioni

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}(Q, q) \ , \quad P_j = -\frac{\partial S}{\partial Q_j}(Q, q) \ , \quad 1 \le j \le n \ . \tag{3.19}$$

è canonica.

Esempio 3.4: *Scambio di coordinate coniugate* La funzione

$$S(q, Q) = \sum_j q_j Q_j$$

è la generatrice della trasformazione

$$p_j = Q_j \ldots P_j = -q_j \ , \quad 1 \le j \le n \ ,$$

che scambia le coordinate canoniche coniugate.

Ancora una volta occorre precisare che le due forme di funzione generatrice riportate nelle due proposizioni non esauriscono tutte le trasformazioni canoniche possibili. Per coprire tutte le possibilità occorre considerare altre forme della funzione generatrice, e precisamente 2^n forme distinte, dove n è il numero di gradi di libertà. Tuttavia ai fini di queste note le due proposizioni enunciate sono sufficienti, e nn ci addentreremo ulteriormente nella discussione. Il lettore interessato ad approfondire l'argomento potrà consultare, ad esempio, il testo di Arnold [6].

3.2.4 *Trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo*

Il formalismo descritto fin qui si estende facilmente al caso di sistemi non autonomi e di trasformazioni dipendenti dal tempo utilizzando in modo appropriato l'estensione dello spazio delle fasi.

Consideriamo un'Hamiltoniana non autonoma $H(q,p,t)$, ed estendiamo lo spazio delle fasi introducendo due nuove coordinate q_0, p_0. Consideriamo poi l'Hamiltoniana[6]

$$\tilde{H}(q,p,q_0,p_0) = H(q,p,q_0) + p_0 \ . \tag{3.20}$$

definita sullo spazio delle fasi esteso. In linea di principio potremmo considerare trasformazioni canoniche della forma $q = q(Q,P,Q_0,P_0)$, $p = p(Q,P,Q_0,P_0)$, $q_0 = q_0(Q,P,Q_0,P_0)$, $p_0 = p_0(Q,P,Q_0,P_0)$, per le quali vale tutta la teoria esposta fin qui. In tal caso però modificheremmo anche la variabile temporale q_0, sicché la nuova variabile Q_0 potrebbe non evolvere più uniformemente nel tempo.

Restringiamoci allora a considerare trasformazioni che lascino invariata la coordinata q_0, ovvero il tempo, imponendo $q_0 = Q_0$; dovremo allora determinare $p_0 = p_0(Q,P,Q_0,P_0)$ in modo che la condizione di canonicità sia soddisfatta. Una prima conseguenza è che la condizione $\{q_0,p_0\}_{Q,P} = 1$ implica $\frac{\partial p_0}{\partial P_0} = 1$, e dunque $p_0 = P_0 + f(Q,P,q_0)$ con una funzione f per ora arbitraria. Dovendosi poi verificare le condizioni $\{q_0,q_j\}_{Q,P} = \{q_0,p_j\}_{Q,P} = 0$ per $1 \le j \le n$, segue che $\frac{\partial q_j}{\partial P_0} = \frac{\partial p_j}{\partial P_0} = 0$, e dunque le q_j, p_j non dovranno dipendere da P_0.

Dalle considerazioni svolte fin qui ricaviamo il seguente schema generale. Una volta esteso lo spazio delle fasi e introdotta l'Hamiltoniana (3.20), supponiamo di saper costruire una trasformazione che soddisfi sia le condizioni di canonicità, sia la condizione $q_0 = Q_0$. Avremo allora l'Hamiltoniana trasformata

$$K(Q,P,Q_0,P_0) = H(q,p,q_0)\big|_{q=q(Q,P,Q_0),\,p=p(Q,P,Q_0),q_0=Q_0} + P_0 + f(Q,P,Q_0) \ .$$

Dal momento che la dipendenza da P_0 è ancora lineare possiamo rimuovere l'estensione dello spazio delle fasi ristabilendo $Q_0 = t$ e rimuovendo il termine P_0 dall'Hamiltoniana, che diventa così

$$K(Q,P,t) = H(q,p,t)\big|_{q=q(Q,P,t),\,p=p(Q,P,t)} + f(Q,P,t) \ .$$

Si osservi che la nuova Hamiltoniana non è la trasformata della vecchia: c'è un termine aggiuntivo che dobbiamo calcolare. Ciò in effetti è possibile.

---

[6] Per mettere in evidenza il ruolo particolare delle variabili q_0, p_0 userò la notazione (q,p,q_0,p_0), dove $q = (q_1,\ldots,q_n)$ e $p = (p_1,\ldots,p_n)$.

Proposizione 3.6: *Sia $q = q(Q,P,t)$, $p = p(Q,P,t)$ una trasformazione dipendente dal tempo che conserva le parentesi di Poisson fondamentali identicamente in t. Allora la trasformazione è canonica, ed esiste una funzione $F(q,p,t)$ tale che l'Hamiltoniana trasformata ha la forma*

$$K(Q,P,t) = \big[H(q,p,t) - F(q,p,t)\big]_{q=q(Q,P,t),p=p(Q,P,t)} \tag{3.21}$$

Qui occorre svolgere dei calcoli aggiuntivi per determinare la funzione $F(q,p,t)$, ma su questo punto non ci soffermiamo. Con la funzione generatrice tutto si semplifica sensibilmente. Vale infatti la

Proposizione 3.7: *Sia $S(P,q,t)$ una funzione che soddisfi la condizione*

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial P_j \partial q_k}\right) \neq 0 \ .$$

identicamente in t. Allora la trasformazione definita implicitamente dalle relazioni

$$Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j} \ , \quad p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} \ , \quad 1 \le j \le n$$

è canonica, e l'Hamiltoniana trasformata ha la forma

$$K(Q,P,t) = H(q,p,t)\Big|_{q=q(Q,P,t),p=p(Q,P,t)} + \frac{\partial S}{\partial t}(P,q,t)\Big|_{q=q(Q,P,t)} \ . \tag{3.22}$$