

4

METODI DI INTEGRAZIONE

Questo capitolo è dedicato a una breve esposizione dei metodi classici di integrazione di un sistema Hamiltoniano. Anche qui l'esposizione non è molto dettagliata, e saranno omesse quasi tutte le dimostrazioni, per le quali si rimanda ai trattati sul formalismo Hamiltoniano. I sistemi a cui si applicano con successo questi metodi vengono solitamente detti *sistemi integrabili*. Tra questi rientrano in particolare (ma non sono i soli) il problema di Keplero e la dinamica di un corpo rigido con un punto fisso.

È opportuno premettere un'osservazione su cosa si intenda per *sistemi integrabili*. Alla luce del teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali si dovrebbe dire che ogni sistema canonico la cui Hamiltoniana soddisfi le condizioni imposte da quel teorema è integrabile. Qui però si intende una proprietà più forte, corrispondente in qualche senso a saper scrivere in modo esplicito la soluzione per tutti i tempi.

Tradizionalmente si cerca la proprietà detta *integrabilità per quadrature*: si chiede di scrivere la soluzione delle equazioni in una forma che richieda un numero finito di operazioni algebriche, inclusa l'inversione di funzioni, e il calcolo di integrali di funzioni note (quest'ultima è la quadratura). Il metodo di Hamilton–Jacobi e il teorema di Liouville ci mettono a disposizione dei metodi generali per l'integrazione. Il rovescio della medaglia è che tali metodi non sono applicabili a tutti i sistemi che si vorrebbero integrare.

Attualmente si tende a porre maggiore enfasi sulla descrizione globale del flusso. Si fa riferimento in particolare alla dinamica quasi periodica (detta talvolta flusso di Kronecker sul toro): si cerca di scrivere il sistema in modo che l'Hamiltoniana dipenda solo dalle *azioni* $p \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$, che possono essere definite anche localmente, sicché si ha $H = H(p_1, \dots, p_n)$. Le coordinate coniugate sono gli angoli $q \in \mathbb{T}^n$, che evolvono uniformemente nel tempo, mentre le azioni restano costanti.¹ Questa

¹ Si pensi, nel caso planetario, alle anomalie medie dei pianeti, che per la seconda legge di Keplero evolvono uniformemente, mentre semiassi maggiori ed eccentricità restano costanti. In modo più generale, si pensi alla rappresentazione mediante epicicli, descritti appunto da angoli (o fasi) che descrivono in modo uniforme delle circonferenze i cui raggi

descrizione sembra alquanto restrittiva: ad esempio, nel caso di un punto libero la posizione evolve uniformemente su una retta, e non su un cerchio, quindi questo caso non rientrerebbe tra i sistemi integrabili! La giustificazione, a posteriori, è che i moti rettilinei vengono tipicamente eliminati fin dall'inizio grazie agli integrali primi, e non subiscono modifiche consistenti quando si considerino piccole perturbazioni.

L'esistenza di variabili d'angolo-azione per problemi classici quali il moto kepleriano e il corpo rigido con un punto fisso era nota da tempo: si tratta nel caso kepleriano delle variabili di Delaunay [32], e nel caso del corpo rigido di quelle di Andoyer [1]. È da notare anche che la costruzione di variabili d'azione ha avuto grande interesse nelle prime fasi dello sviluppo della Meccanica Quantistica: si veda ad esempio il trattato di Born [12]. Il teorema di Arnold-Jost mostra che tale situazione si verifica per tutti i sistemi integrabili, con qualche restrizione sull'Hamiltoniana che almeno nei casi più comuni si riconduce all'aver eliminato i moti non periodici quali quello del baricentro.

4.1 Il metodo di Hamilton-Jacobi

Il metodo di Hamilton-Jacobi riconduce l'integrazione di un sistema canonico, autonomo o no, alla ricerca di una soluzione di un'equazione alle derivate parziali, detta appunto *equazione di Hamilton-Jacobi*. Qui esponiamo la formulazione usuale che si trova nei trattati, e aggiungiamo una formulazione adattata al caso di sistemi autonomi.

4.1.1 La formulazione classica

Consideriamo un sistema canonico, in generale non autonomo,² con Hamiltoniana $H(q, p, t)$. Il metodo si basa sulla ricerca di una trasformazione canonica dipendente dal tempo che ponga l'Hamiltoniana in una forma particolarmente semplice. A tal fine è naturale far uso della funzione generatrice nella forma $S(P, q, t)$ della proposizione 3.6, ricordando che deve essere $p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$ per $1 \leq j \leq n$. Se $H(q, p, t)$ è l'Hamiltoniana, si

sono costanti. Da questo punto di vista si può ben dire che la nostra descrizione della dinamica dei sistemi integrabili non si discosta dallo schema usato dagli astronomi greci per descrivere il moto planetario. La differenza è che nel caso Hamiltoniano il numero delle fasi coincide col numero dei gradi di libertà del sistema, mentre nell'astronomia greca tale numero non era prefissato. Per inciso, si vede bene che nella descrizione kepleriana compaiono solo n fasi — ciascun pianeta ha il suo moto medio — mentre nello schema Hamiltoniano che per ora abbiamo solo accennato ve ne dovrebbero essere $3n$, il numero dei gradi di libertà. Vedremo più avanti che ciò è dovuto alla degenerazione del potenziale kepleriano. Le fasi mancanti sono quelle che descrivono i movimenti dei nodi e dei perielii, che nell'approssimazione kepleriana restano costanti mentre il loro movimento viene reintrodotta dalle teorie di Lagrange e Laplace.

² La considerazione di un sistema non autonomo qui è essenziale perché si ricercano $2n$ costanti del moto indipendenti, e una almeno di esse deve dipendere dal tempo. Nel caso autonomo si può far ricorso alla formulazione del paragrafo successivo.

cerca un'opportuna soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi

$$(4.1) \quad H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

il che corrisponde a cercare la funzione generatrice di una trasformazione che cambia l'Hamiltoniana $H(q, p, t)$ nell'Hamiltoniana identicamente nulla. Occorre sottolineare che non è necessario trovare la soluzione generale dell'equazione: si cerca invece una soluzione cosiddetta *completa*. Si intende con questo che la soluzione deve dipendere in modo essenziale da n parametri arbitrari, che qui sotto indichiamo con $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. L'aggettivo *essenziale* sta a indicare che deve essere soddisfatta la condizione di invertibilità specificata nell'enunciato.

Proposizione 4.1: *Data l'Hamiltoniana $H(q, p, t)$, sia $S(\alpha_1, \dots, \alpha_n; q_1, \dots, q_n, t)$ un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi (4.1), dipendente da n parametri arbitrari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, e soddisfacente la condizione*

$$(4.2) \quad \det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial q_k}\right) \neq 0.$$

Allora le soluzioni del sistema delle equazioni di Hamilton per H si scrivono

$$(4.3) \quad \beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j}, \quad p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

dove β_1, \dots, β_n sono costanti.

Dimostrazione. La funzione S soddisfa le condizioni della proposizione 3.4, e dunque $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ sono coordinate canoniche. L'Hamiltoniana trasformata, per la (4.1), è l'Hamiltoniana identicamente nulla, sicché le equazioni di Hamilton sono

$$\dot{\alpha}_j = 0, \quad \dot{\beta}_j = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Per inversione delle (4.3) si ricava allora

$$q = q(\alpha, \beta, t), \quad p = p(\alpha, \beta, t),$$

ossia le soluzioni.

Q.E.D.

Esempio 4.1: Punto libero. Dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

si ottiene l'equazione

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Procedendo col metodo di separazione delle variabili, si cerca una soluzione della forma

$$S(x, y, z, t) = X(x) + Y(y) + Z(z) + T(t),$$

e quindi l'equazione diventa

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{dX}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dY}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dZ}{dz} \right)^2 \right] + \frac{dT}{dt} = 0 ;$$

deve dunque essere

$$\frac{dX}{dx} = \alpha_x , \quad \frac{dY}{dy} = \alpha_y , \quad \frac{dZ}{dz} = \alpha_z , \quad \frac{dT}{dt} = -\frac{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2}{2m} ,$$

con $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ costanti arbitrarie. Integrando si ottiene la generatrice

$$S(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, x, y, z, t) = \alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_z z - \frac{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2}{2m} t ,$$

e la corrispondente trasformazione è

$$\begin{aligned} p_x &= \alpha_x , & p_y &= \alpha_y , & p_z &= \alpha_z \\ \beta_x &= x - \frac{\alpha_x}{m} t , & \beta_y &= y - \frac{\alpha_y}{m} t , & \beta_z &= z - \frac{\alpha_z}{m} t . \end{aligned}$$

Questa altro non è che la ben nota soluzione.

4.1.2 Formulazioni alternative

Nel caso di sistemi autonomi si può eliminare la dipendenza dal tempo richiedendo che l'Hamiltoniana trasformata dipenda solo dagli n parametri arbitrari. Una prima formulazione richiede la determinazione di una funzione generatrice $S(P, q)$ della forma presa in considerazione nella proposizione 3.4.

Proposizione 4.2: *Data l'Hamiltoniana $H(q, p)$ di un sistema autonomo, sia $S(\alpha_1, \dots, \alpha_n; q_1, \dots, q_n)$ un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi*

$$H \left(q, \frac{\partial S}{\partial q} \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n) ,$$

dipendente da n parametri arbitrari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, e soddisfacente la condizione

$$(4.4) \quad \det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial q_k} \right) \neq 0 .$$

Allora le equazioni di Hamilton per K si scrivono

$$\dot{\alpha}_j = 0 , \quad \dot{\beta}_j = \frac{\partial K}{\partial \alpha_j} ,$$

e le soluzioni sono

$$(4.5) \quad \alpha_j = \alpha_{j,0} , \quad \beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{n,0}} t + \beta_{j,0} , \quad 1 \leq j \leq n ,$$

dove

$$(4.6) \quad \beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} , \quad p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} , \quad j = 1, \dots, n$$

sono i nuovi momenti e le nuove coordinate canoniche, e $\alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{n,0}$ e $\beta_{1,0}, \dots, \beta_{n,0}$ sono i dati iniziali nelle nuove variabili.

Si vede qui che le quantità $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ integrali primi, e il flusso è lineare nelle coordinate β_1, \dots, β_n .

La dimostrazione ricalca quella della proposizione 4.1, ed è lasciata al lettore. Diamo invece una formulazione che fa uso di una funzione generatrice della forma presa in considerazione nella proposizione 3.5.

Proposizione 4.3: *Data l'Hamiltoniana $H(q, p)$ di un sistema autonomo, sia $S(\alpha_1, \dots, \alpha_n; q_1, \dots, q_n)$ un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi*

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

dipendente da n parametri arbitrari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, e soddisfacente la condizione

$$(4.7) \quad \det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial q_k}\right) \neq 0.$$

Allora le equazioni di Hamilton per K si scrivono

$$\dot{\alpha}_j = 0, \quad \dot{\beta}_j = \frac{\partial K}{\partial \alpha_j},$$

e le soluzioni sono

$$(4.8) \quad \alpha_j = \alpha_{j,0}, \quad \beta_j = -\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha_0} t + \beta_{j,0}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

dove

$$(4.9) \quad \beta_j = -\frac{\partial S}{\partial \alpha_j}, \quad p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n$$

sono le nuove coordinate e i nuovi momenti coniugati, e $\alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{n,0}$ e $\beta_{1,0}, \dots, \beta_{n,0}$ sono i dati iniziali nelle nuove variabili.

Come ben si vede, l'enunciato è quasi identico a quello della proposizione 4.2; la sola differenza sta nella form della trasformazione canonica, perché i parametri $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ hanno il ruolo delle nuove coordinate, e le nuove variabili β_1, \dots, β_n quello dei nuovi momenti. Il lettore noterà subito che in pratica si è introdotto direttamente nella forma della trasformazione uno scambio di coordinate coniugate, che è lecito perché si tratta comunque di una trasformazione canonica. L'enunciato è stato riportato per intero al solo fine di facilitare la comprensione.

4.2 Il teorema di Liouville

È ben noto che la conoscenza di integrali primi è un valido aiuto nel risolvere i sistemi di equazioni differenziali. Ciò deriva dal fatto che se un sistema di equazioni differenziali ammette un integrale primo Φ allora ogni orbita del sistema giace necessariamente su una superficie di livello di Φ , determinata ad esempio mediante il dato iniziale. In

Tavola 4.1. La parentesi di Poisson tra le componenti della quantità di moto e del momento angolare.

$\{\cdot, \cdot\}$	p_x	p_y	p_z	M_x	M_y	M_z
p_x	0	0	0	0	p_z	$-p_y$
p_y	0	0	0	$-p_z$	0	p_x
p_z	0	0	0	p_y	$-p_x$	0
M_x	0	p_z	$-p_y$	0	M_z	$-M_y$
M_y	$-p_z$	0	p_x	$-M_z$	0	M_x
M_z	p_y	$-p_x$	0	M_y	$-M_x$	0

generale, se un sistema di equazioni differenziali di ordine n ammette $n - 1$ integrali primi indipendenti allora si può integrare il sistema per quadrature. La peculiarità del caso Hamiltoniano è che un sistema a n gradi di libertà, il cui spazio delle fasi ha dimensione $2n$, è integrabile per quadrature se si conoscono n (e non $2n - 1$) integrali primi, diciamo $\Phi_1(q, p), \dots, \Phi_n(q, p)$, purché questi abbiano l'ulteriore proprietà di essere *in involuzione*, ossia che valga $\{\Phi_j, \Phi_k\} = 0$ per $j, k = 1, \dots, n$. È questo il contenuto del teorema di Liouville, di cui ci occupiamo in questo paragrafo.

4.2.1 Sistemi in involuzione

Diremo che le r funzioni Φ_1, \dots, Φ_r formano un *sistema in involuzione* se esse sono indipendenti, ossia

$$\text{rank} \left(\frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_r)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} \right) = r ,$$

e la parentesi di Poisson tra due qualunque di esse si annulla, ossia

$$\{\Phi_j, \Phi_k\} = 0 , \quad j, k = 1, \dots, r .$$

Nel caso $r = n$ diremo che abbiamo un sistema *completo* di funzioni in involuzione.

Come esempio elementare di sistema completo di funzioni in involuzione possiamo partire dalle coordinate canoniche stesse. Le coordinate q_1, \dots, q_n sono palesemente indipendenti e in involuzione, e così accade per i momenti p_1, \dots, p_n . Più in generale, si consideri una qualunque partizione dell'insieme di indici $\{1, \dots, n\}$ in due sottinsiemi J, K disgiunti; allora le n funzioni $\{q_j\}_{j \in J} \cup \{p_k\}_{k \in K}$ formano un sistema completo in involuzione.

Si possono costruire esempi di poco più elaborati considerando funzioni quali la quantità di moto e il momento angolare per un punto nello spazio. Qui però occorre un po' di attenzione. Le tre componenti della quantità di moto formano palesemente un

sistema completo in involuzione. Il momento angolare è più subdolo: le tre componenti $M_x = yp_z - zp_y$, $M_y = zp_x - xp_z$, $M_z = xp_y - yp_x$ sono palesemente indipendenti, ma non sono in involuzione: il risultato della parentesi di Poisson tra le componenti della quantità di moto e del momento angolare è riportato nella tabella 4.1. Se ne possono estrarre solo due in involuzione, scegliendo ad esempio la componente M_z e affiancandole la quantità $\Gamma^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$, che altro non è che la norma al quadrato del momento angolare stesso. Si può poi considerare una terza funzione

$$E = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(r) ,$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, e $V(r)$ è funzione regolare arbitraria. Si ottiene così un sistema completo in involuzione, nel quale il lettore non avrà difficoltà a riconoscere gli integrali primi del problema del moto centrale. Quest'ultimo esempio può riformularsi partendo da coordinate sferiche. Lo spazio delle fasi è $(0, +\infty) \times (0, \pi) \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}^3$, con coordinate canoniche $r, \vartheta, \varphi, p_r, p_\vartheta, p_\varphi$. Le tre funzioni

$$\begin{aligned} J &= p_\varphi \\ \Gamma^2 &= p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \\ E &= \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + V(r) \end{aligned}$$

formano un sistema completo in involuzione.

Come ultimo esempio, torniamo per il momento a considerare una trasformazione canonica, che scriviamo come $Q_j = \varphi_j(q, p)$, $P_j = \psi_j(q, p)$. Ricordiamo (paragrafo 3.2.2) che la trasformazione deve conservare le parentesi di Poisson fondamentali, il che significa che devono valere le relazioni

$$\{\varphi_j, \varphi_k\} = \{\psi_j, \psi_k\} = 0 \quad \{\varphi_j, \psi_k\} = \delta_{j,k} .$$

Questo significa che le n funzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ devono formare un sistema completo in involuzione, e così deve avvenire anche per le n funzioni ψ_1, \dots, ψ_n . Più in generale, sia data una qualunque partizione dell'insieme di indici $\{1, \dots, n\}$ in due sottinsiemi J, K disgiunti; allora le n funzioni $\{\varphi_j\}_{j \in J} \cup \{\psi_k\}_{k \in K}$ devono formare un sistema completo in involuzione.³

4.2.2 Gli integrali primi come momenti canonici

L'ultimo esempio ci conduce in modo naturale a porci la domanda seguente: supponiamo di conoscere n funzioni $\Phi_1(q, p), \dots, \Phi_n(q, p)$ che formino un sistema completo in involuzione. Possiamo costruire una trasformazione canonica per cui queste funzioni

³ Il lettore avrà notato che in tutti gli esempi qui elencati non accade mai che vi siano più di n funzioni indipendenti e in involuzione. In effetti ciò è impossibile, anche se la dimostrazione di quest'affermazione non è banale.

siano i nuovi momenti? Ovvero: possiamo trovare altre n funzioni $\alpha_1(q, p), \dots, \alpha_n(q, p)$ che unite alle Φ definiscano una trasformazione canonica? La risposta è nella

Proposizione 4.4: *Sia $\{\Phi_1(q, p), \dots, \Phi_n(q, p)\}$ un sistema completo in involuzione. Allora esiste una trasformazione canonica locale che definisce delle nuove coordinate canoniche α, Φ*

$$\alpha = \alpha(q, p) , \quad \Phi = \Phi(q, p) .$$

Sotto l'ipotesi non restrittiva⁴

$$(4.10) \quad \det \left(\frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{\partial(p_1, \dots, p_1)} \right) \neq 0 .$$

la trasformazione canonica si costruisce per quadrature tramite la funzione generatrice

$$(4.11) \quad S(\Phi, q) = \int \sum_j p_j(\Phi, q) dq_j ,$$

dove le $p_1(\Phi, q), \dots, p_n(\Phi, q)$ sono ottenute per inversione delle $\Phi_1(q, p), \dots, \Phi_n(q, p)$ rispetto alle p .

Corollario 4.5: *Le coordinate canoniche della proposizione 4.4 sono definite a meno di una trasformazione canonica con funzione generatrice*

$$(4.12) \quad W(\bar{\Phi}, \alpha) = \sum_j \bar{\Phi}_j \alpha_j + f(\bar{\Phi}) ,$$

dove $f(\bar{\Phi})$ è una funzione arbitraria. Equivalentemente, si può aggiungere la funzione arbitraria $f(\bar{\Phi})$ alla funzione generatrice $S(\Phi, q)$ definita dalla (4.11).

La dimostrazione del corollario è elementare, ed è lasciata al lettore. La proposizione richiede invece qualche considerazione più attenta, e quindi ne riportiamo la dimostrazione.

Dimostrazione della proposizione 4.4. In virtù della condizione (4.10) possiamo invertire le funzioni Φ_1, \dots, Φ_n rispetto a p_1, \dots, p_n , costruendo così le n funzioni $p_1 = p_1(\Phi, q), \dots, p_n = p_n(\Phi, q)$. Dimostriamo che la forma differenziale $\sum_j p_j(\Phi, q) dq_j$ è esatta. Differenziando l'identità

$$\Phi_j = \Phi_j(q, p) \Big|_{p=p(\Phi, q)}$$

rispetto a Φ, q , ossia tenendo conto che nel membro di destra p deve essere sostituito dalla sua espressione in termini di Φ, q , otteniamo

$$d\Phi_j = \sum_{k,l} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_k} \left(\frac{\partial p_k}{\partial \Phi_l} d\Phi_l + \frac{\partial p_k}{\partial q_l} dq_l \right) + \sum_l \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_l} dq_l .$$

⁴ Facendo uso di argomenti di geometria simplettica, che qui omettiamo, si può provare che la condizione può sempre essere soddisfatta premettendo una trasformazione canonica che consiste nello scambio di alcune coordinate coniugate q_j e p_j .

Confrontando i coefficienti di dq , $d\Phi$ otteniamo le identità

$$\begin{aligned}\sum_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial \Phi_l} &= \delta_{j,l} , \\ \sum_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_l} &= -\frac{\partial \Phi_j}{\partial q_l} , \quad j, l = 1, \dots, n .\end{aligned}$$

Sostituiamo ora la seconda di queste identità nella relazione $\{\Phi_j, \Phi_m\} = 0$, vera grazie all'ipotesi che le funzioni siano in involuzione. Con qualche calcolo abbiamo

$$\begin{aligned}\{\Phi_j, \Phi_m\} &= \sum_l \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial q_l} \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_l} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_l} \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_l} \right) \\ &= -\sum_{l,k} \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_l} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_l} + \sum_{l,k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_l} \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_l} \\ &= -\sum_l \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_l} \sum_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_k} \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_l} - \frac{\partial p_l}{\partial q_k} \right) = 0\end{aligned}$$

(si noti che nella seconda somma si possono scambiare gli indici l e k). Per la condizione (4.10) ciò implica

$$\frac{\partial p_k}{\partial q_l} - \frac{\partial p_l}{\partial q_k} = 0 , \quad l, k = 1, \dots, n ,$$

il che prova che la forma differenziale $\sum_j p_j dq_j$ è esatta, come affermato. Mediante integrazione costruiamo la funzione (4.11). In virtù della (4.10) questa soddisfa la condizione di invertibilità (3.18) della proposizione 3.4, e quindi definisce implicitamente la trasformazione canonica

$$\alpha_j = \frac{\partial S}{\partial \Phi_j} , \quad p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} , \quad j = 1, \dots, n ,$$

che è quella cercata.

Q.E.D.

4.2.3 Il teorema di Liouville

Veniamo ora al teorema classico sui sistemi integrabili: la conoscenza di n integrali primi che formano un sistema completo in involuzione assicura l'integrabilità per quadrature.

Teorema 4.6: *Supponiamo che un sistema canonico autonomo a n gradi di libertà con Hamiltoniana $H(q, p)$ ammetta n integrali primi $\{\Phi_1(q, p), \dots, \Phi_n(q, p)\}$ che formino un sistema completo in involuzione. Allora si può costruire per quadrature la funzione generatrice $S(\Phi, q)$ di una trasformazione canonica $(\Phi, \alpha) = \mathcal{C}(q, p)$ tale che l'Hamiltoniana trasformata dipenda solo dai nuovi momenti Φ_1, \dots, Φ_n , e le soluzioni delle equazioni di Hamilton si scrivono*

$$(4.13) \quad \Phi_j(t) = \Phi_{j,0} , \quad \alpha_j(t) = \alpha_{j,0} + t \frac{\partial H}{\partial \Phi_j} \Big|_{(\Phi_{1,0}, \dots, \Phi_{n,0})} , \quad j = 1, \dots, n ,$$

con $\alpha_{j,0}$ e $\Phi_{j,0}$ determinati dai dati iniziali.

Dimostrazione. Per la proposizione 4.4 possiamo costruire per quadrature la funzione generatrice di una trasformazione canonica

$$\alpha = \alpha(q, p), \quad \Phi = \Phi(q, p)$$

tale che Φ_1, \dots, Φ_n sono i nuovi momenti. In virtù della conservazione delle parentesi di Poisson possiamo calcolare $\{H, \Phi_j\}$ sia rispetto alle vecchie variabili q, p , sia rispetto alle nuove variabili α, Φ . Poiché Φ_1, \dots, Φ_n sono integrali primi vale $\{H, \Phi_j\} = 0$, e dunque abbiamo

$$\{H, \Phi_j\} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Questo implica che l'Hamiltoniana trasformata è indipendente dalle nuove coordinate α , ossia $H = H(\Phi)$. Ne segue ancora che le equazioni canoniche sono

$$\dot{\alpha}_j = \frac{\partial H}{\partial \Phi_j}, \quad \dot{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

che si integrano in modo elementare, ed hanno soluzioni della forma (4.13), come affermato. Questo conclude la dimostrazione. Q.E.D.

Esempio 4.2: *Sistemi a un grado di libertà.* Consideriamo l'Hamiltoniana

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x),$$

che descrive il movimento di una massa puntiforme su una retta sotto l'azione del potenziale $V(x)$. Applichiamo la proposizione 4.4. La condizione (4.10) si riduce a $\frac{\partial H}{\partial p} \neq 0$, evidentemente soddisfatta per $p \neq 0$. Poniamo $H(x, p) = E$, con E costante, e invertiamo quest'ultima relazione rispetto a p . Otteniamo

$$(4.14) \quad p = \pm \sqrt{2m[E - V(x)]}.$$

La funzione generatrice è

$$S(E, x) = \sqrt{2m} \int \sqrt{E - V(x)} dx,$$

e la trasformazione canonica in forma implicita è

$$p = \pm \sqrt{2m[E - V(x)]}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}.$$

L'Hamiltoniana trasformata è $H(E) = E$, e le soluzioni delle equazioni canoniche corrispondenti in coordinate α, E sono

$$E(t) = E_0, \quad \alpha(t) = t - t_0,$$

dove E_0 e t_0 sono i valori iniziali dell'energia e del tempo. Ora, questo modo di scrivere la soluzione sembra dirci solo che l'energia è costante e il tempo scorre uniformemente, e verrebbe da concludere che è quanto già sapevamo anche senza applicare il teorema di Liouville. In realtà, in questo modo abbiamo ricondotto la scrittura delle soluzioni

per le variabili x alle quadrature, che è quanto ci interessa. Infatti, ci basta calcolare l'integrale

$$(4.15) \quad t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{E_0 - V(\xi)}} ,$$

dove $x_0 = x(0)$ è il dato iniziale ed E_0 l'energia iniziale.

Esempio 4.3: Oscillatori armonici. Consideriamo l'Hamiltoniana

$$(4.16) \quad H = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n (y_l^2 + \omega_l^2 x_l^2)$$

dove x, y sono le variabili canoniche e $\omega_1, \dots, \omega_n$ sono costanti, che supporremo non nulle. Le quantità

$$(4.17) \quad \Phi_l = \frac{1}{2} (y_l^2 + \omega_l^2 x_l^2) , \quad 1 \leq l \leq n$$

formano un sistema completo in involuzione (la verifica è elementare). Invertendo la (4.17) rispetto a y_l troviamo

$$y_l = \sqrt{2\Phi_l - \omega_l^2 x_l^2} ,$$

e possiamo scrivere la funzione generatrice come

$$S(\Phi, x, t) = \sum_{l=1}^n F_l(\Phi_l, x_l) ,$$

dove

$$F_l(\Phi_l, x_l) = \int \sqrt{2\Phi_l - \omega_l^2 x_l^2} dx_l , \quad 1 \leq l \leq n .$$

La trasformazione canonica viene completata definendo le nuove coordinate

$$\alpha_l = \frac{\partial S}{\partial \Phi_l} = \int \frac{dx_l}{\sqrt{2\Phi_l - \omega_l^2 x_l^2}} = \frac{1}{\omega_l} \arccos \left(\frac{\omega_l x_l}{\sqrt{2\Phi_l}} \right) .$$

L'Hamiltoniana trasformata è

$$(4.18) \quad H = \sum_l \Phi_l .$$

Le equazioni canoniche

$$\dot{\Phi}_l = 0 , \quad \dot{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial \Phi_l} = 1$$

ammettono le soluzioni

$$\Phi_l(t) = \Phi_{l,0} , \quad \alpha(t) = t - t_0 ,$$

dove t_0 è l'istante iniziale, e $\Phi_{l,0}$ sono le energie dei singoli oscillatori, da calcolarsi mediante i dati iniziali. Infine, mediante inversione, si scrivono le soluzioni per le variabili x nella forma

$$x_l = \frac{\sqrt{2\Phi_{l,0}}}{\omega_l} \cos \omega_l(t - t_0) .$$

4.3 Le variabili d'angolo–azione

Il teorema di Liouville ci mette a disposizione un metodo efficace di integrazione, ma la forma della soluzione che se ne ricava non dà molte informazioni sugli aspetti qualitativi della dinamica. In particolare, non è immediatamente evidente l'esistenza di comportamenti periodici, che si rivelano solo quando si scrivono in modo esplicito le soluzioni. In effetti le coordinate $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ coniugate ai momenti Φ_1, \dots, Φ_n evolvono linearmente nel tempo, ma non riflettono necessariamente le eventuali periodicità del sistema, perché non sono coordinate angolari. Il teorema di Arnold–Jost affronta questa questione.

4.3.1 Sistemi a un grado di libertà

Nel caso di un sistema autonomo a un grado di libertà con Hamiltoniana $H(q, p)$ le orbite sul piano di fase (q, p) sono le curve definite implicitamente dall'equazione $H(q, p) = E$. Sia ora Q, P un punto estremante di $H(q, p)$; allora $q(t) = Q, p(t) = P$ è una soluzione di equilibrio per H , e sia $\bar{E} = H(Q, P)$. Per semplicità, e senza perdita di generalità, si può supporre che (Q, P) sia un punto di minimo per H . Allora esiste un intervallo aperto \mathcal{E} tale che per $E \in \mathcal{E}$ l'equazione $H(q, p) = E$ determina una curva chiusa γ_E intorno al punto (Q, P) , oltre eventualmente ad altre curve che qui non interessano; al variare di E si ha una famiglia continua di curve chiuse.

Si consideri ora un valore fissato di E ; la curva γ_E corrispondente è topologicamente simile a una circonferenza, e può dunque descriversi con una coordinata $\varphi \in \mathbb{T}$; con questa coordinata diventa agevole tener conto della periodicità della soluzione che descrive la curva γ_E . È naturale chiedersi anche se esista una coordinata canonica I coniugata a φ che parametrizza le curve γ_E .

Una coordinata I siffatta deve essere costante su ciascuna delle curve γ_E , e quindi deve essere una costante del moto per H . Non si perde di generalità se si suppone che sia $\frac{dI}{dp} \neq 0$, sicché esiste anche la funzione generatrice $S(I, q)$ di una trasformazione canonica che introduce I come coordinata, ed è

$$(4.19) \quad S(I, q) = \int p(I, q) dq .$$

Se la φ è la coordinata coniugata a I , deve valere l'eguaglianza

$$\oint_{\gamma_E} p dq = \oint_{\gamma_E} I d\varphi ;$$

ciò in virtù della proprietà delle trasformazioni canoniche di conservare l'integrale della forma differenziale $p dq$ su una curva chiusa. Poiché però I è costante su γ_E , e tenuto conto della periodicità di φ , l'integrale a destra vale $2\pi I$, e dunque deve essere

$$(4.20) \quad I = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_E} p dq .$$

La quantità I così introdotta è detta *azione*; è immediato osservare che essa rappresenta l'area racchiusa dalla curva γ_E , divisa per 2π .

Al variare di E , la (4.20) definisce I come funzione di E ; poiché sia E che I parametrizzano la stessa famiglia di curve, questa funzione deve essere invertibile, almeno localmente, sicché possiamo scrivere l'Hamiltoniana H come funzione di I . Inoltre I è una costante del moto per E , come abbiamo già osservato. Possiamo dunque applicare il teorema di Liouville, e la funzione generatrice (4.19) ci mette in grado di calcolare l'angolo φ coniugato a I .

Per l'Hamiltoniana trasformata $H(I)$ le equazioni di moto sono

$$(4.21) \quad \dot{I} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega(I),$$

dove $\omega(I) = \frac{dH}{dI}$. La soluzione corrispondente alle condizioni iniziali $I(0), \varphi(0)$, è

$$(4.22) \quad I(t) = I(0), \quad \varphi(t) = \omega^{(0)} t + \varphi(0),$$

dove $\omega^{(0)} = \omega(I(0))$. Dal momento che φ è un angolo, l'orbita è palesemente periodica di periodo $T = 2\pi/\omega^{(0)}$. È utile anche osservare che se la funzione $I(E)$ è nota, il periodo è

$$(4.23) \quad T = 2\pi \frac{dI}{dE} .$$

Infatti da $H = E$ si ha $\frac{dH}{dE} = \frac{dH}{dI} \frac{dI}{dE} = \omega(I) \frac{dI}{dE} = 1$, e d'altra parte è anche $T = 2\pi/\omega(I)$; da qui segue l'asserto.

4.3.2 Sistemi a più gradi di libertà

L'introduzione di variabili d'angolo-azione per sistemi a più gradi di libertà è tecnicamente più complessa. Nel caso di un grado di libertà è relativamente semplice individuare delle curve chiuse, o *cicli*, che rappresentano un moto strettamente periodico, e quindi calcolare l'azione come un integrale sul ciclo. Nel caso di più gradi di libertà non è evidente a priori che debbano esistere dei cicli sui quali calcolare le azioni. In certi casi, e tra questi quelli classici del moto centrale e del corpo rigido con un punto fisso, la costruzione dei cicli non è difficile. Il teorema di Arnold–Jost ne mostra l'esistenza come fatto generale per i sistemi Hamiltoniani.

Procediamo, come nel paragrafo 4.2.1, supponendo di aver costruito un sistema completo di funzioni in involuzione, che denoteremo ancora con $\Phi_1(q, p), \dots, \Phi_n(q, p)$. La domanda che ci poniamo è se si possa costruire un secondo sistema completo di funzioni in involuzione $I_1(q, p), \dots, I_n(q, p)$ che abbiano la proprietà di essere in involuzione anche con le Φ , senza esserne indipendenti, e che le variabili $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$ a

esse coniugate costruite col metodo di Liouville (proposizione 4.4), siano angoli, ossia $\vartheta \in \mathbb{T}^n$.

La proposizione che segue afferma che la risposta è positiva.

Proposizione 4.7: *Sia Φ_1, \dots, Φ_n un sistema completo di funzioni in involuzione in un dominio aperto $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, e supponiamo che la superficie di livello definita implicitamente da $\Phi_1(p, q) = \dots = \Phi_n(p, q) = 0$ contenga una componente connessa e compatta M_0 . Allora:*

- (i) M_0 è una varietà differenziabile diffeomorfa ad un toro di dimensione n ;
- (ii) in un intorno aperto $U(M_0) \subset \mathcal{D}$ si possono introdurre variabili d'angolo-azione $I \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ e $\vartheta \in \mathbb{T}^n$, dove $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto, mediante una trasformazione canonica

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathbb{T}^n \times \mathcal{G} &\rightarrow U(M_0) \\ (\vartheta, I) &\mapsto (q, p) = \mathcal{A}(\vartheta, I) \end{aligned}$$

tale che I_1, \dots, I_n dipendono solo da Φ_1, \dots, Φ_n .

La dimostrazione di questa proposizione richiede diverse pagine, e viene omessa. Il lettore interessato ne potrà trovare una dimostrazione dettagliata, ad esempio, in [61] App. A.2, oppure in [48] § 2.3. Diamo invece alcuni cenni che riassumono i punti principali.

Le orbite di un sistema integrabile nel senso di Liouville giacciono su una varietà di dimensione n determinata dall'intersezione delle superfici di livello degli integrali primi. Ora, tale varietà risulta essere diffeomorfa a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, con un $k \leq n$ da determinarsi. Ciò segue da un teorema generale di topologia, secondo il quale qualunque varietà connessa di dimensione n sulla quale siano definiti n campi vettoriali indipendenti in ogni punto, e i cui flussi commutano, deve essere diffeomorfa a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Nel caso di un sistema completo di funzioni Φ_1, \dots, Φ_n in involuzione gli n campi vettoriali sono i campi Hamiltoniani generati dalle funzioni stesse, che sono indipendenti (perché tali sono le funzioni), tangenti alla varietà stessa (perché il campo è hamiltoniano), e commutano (perché le funzioni sono in involuzione). Se poi si assume che le superfici abbiano una componente compatta, allora questa deve essere diffeomorfa a un toro \mathbb{T}^n , e quindi si possono individuare su di essa n cicli indipendenti (non riducibili l'uno all'altro mediante deformazioni continue) $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Le variabili d'azione vengono definite come

$$(4.24) \quad I_j = \frac{1}{2\pi} \sum_l \oint_{\gamma_j} p_l(q, \Phi) dq_l,$$

dove le funzioni $p_j(q, \Phi)$ si ottengono per inversione delle Φ_1, \dots, Φ_n rispetto alle p .

Pur senza entrare nei dettagli della dimostrazione, si intuisce dalla (4.24) che le azioni dipendono almeno dalla scelta dei cicli $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sulla varietà invariante definita tramite gli integrali primi. Ora, tale scelta non è unica, e pertanto ci dobbiamo attendere che non lo siano neppure le variabili d'angolo-azione. Ciò è asserito in modo formale dal seguente

Lemma 4.8: *Siano ϑ, I delle variabili d'angolo-azione. Se ne possono costruire di nuove mediante composizione delle trasformazioni canoniche seguenti:*

(i) *traslazione sulle azioni*

$$(4.25) \quad I_j = \bar{I}_j + c_j, \quad \vartheta_j = \bar{\vartheta}_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

con $c \equiv (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$;

(ii) *traslazione dell'origine degli angoli di una quantità dipendente dalle azioni stesse, ossia*

$$(4.26) \quad \vartheta_j = \bar{\vartheta}_j + \frac{\partial S}{\partial \bar{I}_j}(\bar{I}), \quad I_j = \bar{I}_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

dove $S(\bar{I})$ è funzione differenziabile arbitraria delle azioni;

(iii) *trasformazione lineare degli angoli mediante una matrice unimodulare⁵ A:*

$$(4.27) \quad \vartheta = A\bar{\vartheta}, \quad \bar{I} = A^\top I,$$

La dimostrazione è lasciata al lettore.

4.3.3 Costruzione esplicita delle variabili d'angolo-azione

L'algoritmo esplicito per la costruzione delle variabili d'angolo-azione si compone di tre passi.

- (i) Determinazione dei cicli γ_j ($j = 1, \dots, n$). Questa è la parte più difficile, perché richiede in linea di principio l'integrazione del sistema. Il modo più diretto — almeno se si vuol seguire lo schema illustrato in questo capitolo — consiste nell'applicare il metodo di Liouville sfruttando la conoscenza degli integrali primi Φ_1, \dots, Φ_n . Va da sé che un tal procedimento non è affatto agevole, e in genere è preferibile ricorrere allo studio delle varietà invarianti di dimensione n determinate dagli integrali stessi. Fortunatamente nei casi di maggior interesse, e in particolare nel caso kepleriano, la forma stessa degli integrali primi rende il calcolo agevole.
- (ii) Calcolo per quadrature delle variabili d'azione, ovvero degli integrali

$$I_j = \frac{1}{2\pi} \sum_l \oint_{\gamma_j} p_l(q, \Phi) dq_l,$$

che può rivelarsi più o meno complesso. Una via possibile consiste nel trovare degli angoli che parametrizzino i cicli, e che al tempo stesso permettano di scrivere l'integrale in forma trattabile.

- (iii) Applicazione del metodo di Liouville ai nuovi integrali primi I_1, \dots, I_n così determinati, al fine di costruire le variabili angolari $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$.

In qualche caso può rendersi necessario applicare le trasformazioni del lemma 4.8 al fine di costruire delle variabili d'angolo-azione più adatte di quelle risultanti direttamente dal procedimento. Quest'ultima operazione può rivelarsi particolarmente utile in caso

⁵ La matrice A è detta *unimodulare* se ha elementi interi e $\det A = \pm 1$. Le matrici soddisfacenti queste proprietà generano degli automorfismi del toro.

di risonanza.⁶ Un esempio notevole è proprio il caso kepleriano, che discuteremo in dettaglio più avanti.

4.4 Il teorema di Arnold–Jost e i sistemi integrabili

Stabilita l'esistenza delle variabili d'angolo–azione, possiamo procedere all'enunciato del teorema di Arnold–Jost sui sistemi integrabili. La discussione della dinamica di tali sistemi, che verrà svolta subito dopo, mostra l'utilità di tutto il lavoro fin qui svolto: la dinamica di qualunque sistema integrabile nel senso di Arnold–Jost è quasi-periodica.

Teorema 4.9: *Supponiamo che l'Hamiltoniana $H(q, p)$ sullo spazio delle fasi \mathcal{F} ammetta un sistema completo di integrali primi in involuzione Φ_1, \dots, Φ_n . Sia assegnato $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ in modo che la varietà determinata dalle equazioni $\Phi_1(q, p) = c_1, \dots, \Phi_n(q, p) = c_n$ contenga una componente connessa e compatta M_c . Allora in un intorno $U(M_c)$ di M_c si possono introdurre delle variabili canoniche d'angolo–azione $(I, \vartheta) : \mathcal{G} \times \mathbb{T}^n \rightarrow U(M_c)$, dove $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^n$ è un aperto, tali che l'Hamiltoniana trasformata dipende solo da I_1, \dots, I_n , e il flusso canonico corrispondente è*

$$\vartheta_j(t) = \vartheta_{j,0} + t\omega_j(I_{1,0}, \dots, I_{n,0}), \quad I_j(t) = I_{j,0}, \quad j = 1, \dots, n,$$

dove $\vartheta_{j,0}$ e $I_{j,0}$ sono i dati iniziali, e $\omega_j = \frac{\partial H}{\partial I_j}$.

L'Hamiltoniana così costruita è di fatto quella risultante dall'applicazione del teorema di Liouville agli integrali primi I_1, \dots, I_n .

4.5 Moti periodici e quasi periodici sul toro

Veniamo ora allo studio della dinamica di un sistema integrabile nel senso di Arnold–Jost. Per uniformità con le notazioni che useremo più avanti, torniamo alla notazione tradizionale p, q per le coordinate canoniche. Considereremo dunque lo spazio delle fasi $\mathcal{F} = \mathcal{G} \times \mathbb{T}^n$, dove $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto, $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{T}^n$ sono le variabili angolari e $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{G}$ sono le variabili d'azione. Consideriamo inoltre un'Hamiltoniana

$$(4.28) \quad H = H(p_1, \dots, p_n)$$

che dipenda solo dalle azioni p . Sappiamo che le equazioni canoniche hanno la forma particolarmente semplice

$$(4.29) \quad \dot{q}_j = \omega_j(p_1, \dots, p_n), \quad \dot{p}_j = 0, \quad 1 \leq j \leq n,$$

dove

$$(4.30) \quad \omega_j(p_1, \dots, p_n) = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

⁶ Nel trattato di Born [12] questo problema viene trattato in modo molto ampio, connettendolo alla necessità di costruire un insieme di variabili d'angolo–azione con proprietà tali da rendere significativa la quantizzazione.

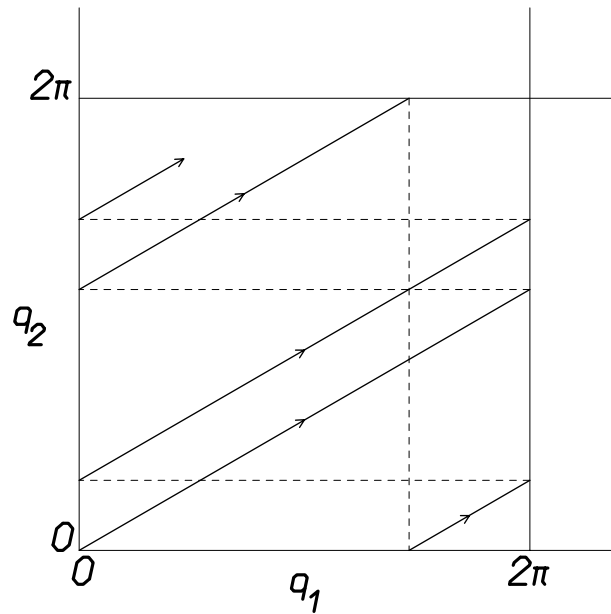


Figura 4.1. Il moto quasi periodico sul toro \mathbb{T}^2 . Il toro è rappresentato da un quadrato di lato 2π . L'orbita è una retta con coefficiente angolare ω_2/ω_1 . Tutti i segmenti interni al quadrato sono ottenuti per traslazione della retta di multipli di 2π in direzione sia orizzontale che verticale.

sono le frequenze. Sappiamo anche che le orbite nello spazio delle fasi sono descritte dalle equazioni

$$(4.31) \quad p_j(t) = p_{j,0}, \quad q_j(t) = q_{j,0} + t\omega(p_{1,0}, \dots, p_{n,0}),$$

dove $q_{1,0}, \dots, q_{n,0}, p_{1,0}, \dots, p_{n,0}$ sono i dati iniziali. Dunque, le orbite giacciono su tori di dimensione n parametrizzati dalle azioni.

4.5.1 Dinamica su un toro bidimensionale

Nel caso di un toro di dimensione 2 l'orbita si scrive

$$(4.32) \quad q_1(t) = q_{1,0} + \omega_1 t, \quad q_2(t) = q_{2,0} + \omega_2 t,$$

dove ω_1, ω_2 sono le frequenze, che sono costanti, e $q_{1,0}, q_{2,0}$ sono le fasi iniziali. Rappresentiamo il toro come un quadrato di lato 2π sul piano; in altre parole, diciamo che i punti (q_1, q_2) e (q'_1, q'_2) sul piano \mathbb{R}^2 rappresentano lo stesso punto se $q_1 - q'_1$ e $q_2 - q'_2$ sono multipli interi di 2π . Eliminando il tempo t dalle (4.32) otteniamo che l'orbita è la retta

$$\omega_2(q_1 - q_{1,0}) - \omega_1(q_2 - q_{2,0}) = 0;$$

possiamo anche semplificare la discussione ponendo $q_{1,0} = q_{2,0} = 0$, dato che ciò corrisponde a scegliere le fasi iniziali come origine degli angoli, sicché l'orbita è la retta $\omega_2 q_1 - \omega_1 q_2 = 0$. Naturalmente, occorre riportare tutti i punti della retta entro il quadrato fondamentale che rappresenta il toro: il procedimento è illustrato in figura 4.1. Si osservi che tutti i tratti di orbita sono tra loro paralleli.

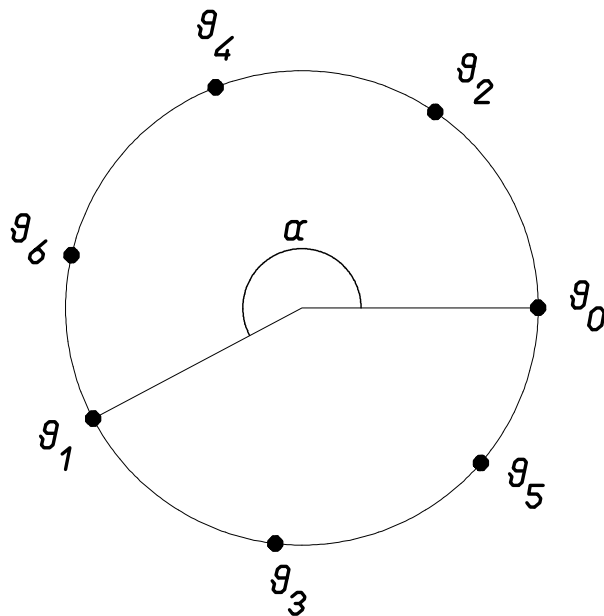


Figura 4.2. La mappa del cerchio su sé stesso definita tramite la rotazione di un angolo α . Qui è rappresentata la mappa indotta dell'orbita sul toro della figura 4.1.

Per studiare la dinamica è conveniente considerare le intersezioni successive dell'orbita con l'asse delle ordinate, o, meglio, con il segmento di quell'asse che rappresenta il lato del quadrato fondamentale, corrispondente a $q_1 = 0$. È immediato osservare che quelle intersezioni sono rappresentate dalla successione di punti

$$0, \alpha \pmod{2\pi}, 2\alpha \pmod{2\pi}, \dots, s\alpha \pmod{2\pi}, \dots,$$

con

$$(4.33) \quad \alpha = 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Ciò ci conduce a studiare il problema della traslazione angolare sul cerchio, o, equivalentemente, il comportamento della successione di punti del cerchio ottenuta per rotazioni successive di un angolo fissato α (si veda la figura 4.2).

Lemma 4.10: *La successione $\{s\alpha \pmod{2\pi}\}_{s \geq 0}$ sul cerchio è periodica se e solo se $\alpha/(2\pi)$ è un numero razionale. Se invece $\alpha/(2\pi)$ è irrazionale, allora la successione è ovunque densa sul cerchio.*

Dimostrazione. La successione è periodica se esiste un intero $s \neq 0$ tale che $s\alpha \pmod{2\pi} = 0$, ossia se vale $s\alpha = 2r\pi$ con $r \neq 0$ intero. Ciò implica $\alpha/(2\pi) = r/s$, che è un numero razionale. La condizione è chiaramente necessaria e sufficiente, e dunque la prima affermazione è dimostrata. Supponiamo ora che $\alpha/(2\pi)$ sia irrazionale. Allora i punti della successione sono tutti distinti. Poiché il cerchio è compatto, la successione deve avere almeno un punto di accumulazione. Ne segue che per ogni ε positivo esistono due interi s, r tali che $|(s\alpha - r\alpha) \pmod{2\pi}| < \varepsilon/2$. Posto $j = |s - r|$, vale anche $|k\alpha - (k+j)\alpha \pmod{2\pi}| < \varepsilon/2$ per ogni intero k . La sottosuccessione $\{j\alpha \pmod{2\pi}\}_{j \geq 0}$

è monotona, e dunque determina sul cerchio una successione infinita di intervalli contigui di lunghezza inferiore a $\varepsilon/2$. Ne segue che ogni intervallo di lunghezza ε contiene almeno un punto della successione. Essendo ε arbitrario, la sottosuccessione è densa. Q.E.D.

Applicando il lemma si conclude rapidamente che l'orbita (4.32) sul toro \mathbb{T}^2 è periodica se e solo se ω_1/ω_2 è razionale, ed è ovunque densa sul toro se ω_1/ω_2 è irrazionale.

4.5.2 Il caso di dimensione superiore a 2

Il caso $n > 2$ richiede una generalizzazione del concetto di rapporto razionale tra le frequenze; ciò si ottiene in modo naturale introducendo il concetto di modulo di risonanza.

Sia dato un vettore $\omega \in \mathbb{R}^n$. Il *modulo di risonanza* \mathcal{M}_ω associato a ω è l'insieme⁷

$$(4.34) \quad \mathcal{M}_\omega = \{k \in \mathbb{Z}^n : \langle k, \omega \rangle = 0\} ,$$

dove $\langle k, \omega \rangle = \sum_j k_j \omega_j$. Si verifica facilmente che \mathcal{M}_ω è un sottogruppo di \mathbb{Z}^n . Una relazione della forma $\langle k, \omega \rangle = 0$ viene detta *risonanza*, e il numero $\dim \mathcal{M}_\omega$ viene detto *molteplicità della risonanza*. Quest'ultimo numero rappresenta di fatto il numero di risonanze indipendenti soddisfatte da ω . I casi estremi sono $\dim \mathcal{M}_\omega = 0$, detto *non risonante*, e $\dim \mathcal{M}_\omega = n - 1$, detto *completamente risonante*.

Proposizione 4.11: *Si consideri il flusso lineare sul toro \mathbb{T}^n*

$$(4.35) \quad q(t) = q^{(0)} + \omega t \pmod{2\pi} , \quad \omega \in \mathbb{R}^n ,$$

con dato iniziale $q^{(0)}$, e sia \mathcal{M}_ω il modulo di risonanza associato al vettore delle frequenze ω . Allora l'orbita (4.35) è densa su un toro $\mathbb{T}^{n-\dim \mathcal{M}_\omega} \subset \mathbb{T}^n$.

Accenniamo a come si possa dimostrare la proposizione. Nel caso non risonante, $\dim \mathcal{M}_\omega = 0$, l'orbita è ovunque densa sul toro. Se ne può trovare una dimostrazione in [6], ch. 10, §51.

Nel caso completamente risonante, $\dim \mathcal{M}_\omega = n - 1$, l'orbita è periodica. In questo e nei casi intermedi si può dimostrare la proposizione ricorrendo a un cambiamento delle coordinate angolari sul toro. Osserviamo che il flusso lineare è generato dal sistema di equazioni differenziali

$$(4.36) \quad \dot{q} = \omega , \quad \omega \in \mathbb{R}^n .$$

Una trasformazione lineare

$$(4.37) \quad Q = Mq$$

con una matrice unimodulare M cambia il sistema (4.36) in

$$(4.38) \quad \dot{Q} = \bar{\omega} , \quad \bar{\omega} = M\omega ;$$

⁷ Geometricamente: si pensi \mathbb{Z}^n come un sottinsieme di \mathbb{R}^n , e si consideri il piano di dimensione $(n - 1)$ in \mathbb{R}^n ortogonale a ω . Il modulo di risonanza \mathcal{M}_ω è l'intersezione di quel piano con \mathbb{Z}^n .

in altre parole, il cambiamento di coordinate induce un cambiamento delle frequenze.

Lemma 4.12: *Sia dato $\omega \in \mathbb{R}^n$, e supponiamo che sia $\dim \mathcal{M}_\omega > 0$. Allora esiste una matrice unimodulare M tale che $\bar{\omega} = M\omega$ ha esattamente $\dim \mathcal{M}_\omega$ componenti nulle, mentre le restanti $n - \dim \mathcal{M}_\omega$ componenti formano un vettore non risonante.*

In virtù di questo lemma, possiamo considerare il toro \mathbb{T}^n come prodotto cartesiano $\mathbb{T}^r \times \mathbb{T}^{n-r}$, dove $r = \dim \mathcal{M}_\omega$. Il flusso su \mathbb{T}^r è banale: tutti gli angoli restano fissi, perché le frequenze corrispondenti sono nulle. Le frequenze su \mathbb{T}^{n-r} invece sono non risonanti, e dunque le orbite sono dense su quel toro.

4.5.3 Sistemi anisocroni non degeneri

Torniamo ora a occuparci della dinamica del sistema integrabile con Hamiltoniana (4.28). Abbiamo già osservato che per ogni $p \in \mathcal{G}$ vi è un toro invariante sul quale il flusso è lineare, con frequenze

$$\omega_j(p) = \frac{\partial H}{\partial p_j}(p), \quad j = 1, \dots, n.$$

Ci si attende, in generale, che cambiando il valore iniziale delle azioni p anche le frequenze subiscano un cambiamento. Se ciò accade, allora si possono avere dinamiche totalmente diverse anche su tori vicini, perché il comportamento qualitativo delle orbite dipende fortemente dalla dimensione $\dim \mathcal{M}_{\omega(p)}$ del modulo di risonanza, e questa quantità può variare in modo alquanto discontinuo al variare dei dati iniziali.

È alquanto significativo il caso in cui l'Hamiltoniana soddisfa l'ipotesi, detta di *non degenerazione*,

$$(4.39) \quad \det \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k} \right) \neq 0.$$

Si osservi che questa implica l'invertibilità (almeno locale) della relazione tra azioni p e frequenze ω , sicché si può far uso delle frequenze come coordinate al posto delle azioni. Sistemi di questo tipo vengono detti *anisocroni*, per sottolineare il fatto che le frequenze variano con l'azione, ovvero con l'ampiezza delle oscillazioni.

Proposizione 4.13: *Supponiamo che l'Hamiltoniana $H(p)$ sia non degenera, e sia $\Phi(q, p)$ un integrale primo differenziabile per H . Allora Φ deve essere indipendente dagli angoli q .*

Dimostrazione. Poiché $\Phi(q, p)$ è periodica negli angoli possiamo considerarne lo sviluppo in serie di Fourier⁸

$$\Phi(p, q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi_k(p) e^{i \langle k, q \rangle},$$

⁸ Questa espressione deve leggersi come una somma su n indici interi che possono assumere qualunque valore, ossia $\varphi_k(p) \equiv \varphi_{k_1, \dots, k_n}(p)$ e $\langle k, q \rangle = k_1 q_1 + \dots + k_n q_n$.

dove i coefficienti $\varphi_k(p)$ sono funzioni differenziabili delle sole azioni p . Essendo un integrale primo, Φ deve soddisfare

$$\{H, \Phi\} = i \sum_k \langle k, \omega(p) \rangle \varphi_k(p) e^{i\langle k, q \rangle} = 0 .$$

Dunque, per ogni $k \in \mathbb{Z}^n$ deve verificarsi almeno una delle eguaglianze $\langle k, \omega(p) \rangle = 0$, o $\varphi_k(p) = 0$, che devono valere identicamente in p . Mostriamo che in conseguenza dell'ipotesi di non degenerazione la prima eguaglianza può verificarsi solo se $k = 0$. Infatti, differenziando la relazione $\langle k, \omega(p) \rangle = 0$, otteniamo

$$\sum_{l=1}^n k_l \frac{\partial \omega_l}{\partial p_j} = 0 , \quad 1 \leq j \leq n ;$$

questa relazione può vedersi come un'equazione lineare per k , che in virtù della non degenerazione della matrice di elementi $\frac{\partial \omega_l}{\partial p_j}$ ammette la sola soluzione $k = 0$. Dobbiamo dunque concludere che deve essere $\varphi_k(p) = 0$ per $k \neq 0$, e ciò implica $\Phi = \varphi_0(p)$, ossia che Φ non dipende dagli angoli. Q.E.D.

Un esempio particolarmente semplice di sistema anisocrono, spesso usato in fisica teorica, è costituito dai cosiddetti *rotatori liberi*, descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{2} , \quad p \in \mathbb{R}^n , \quad q \in \mathbb{T}^n .$$

Il lettore non si lasci ingannare dalla somiglianza con l'Hamiltoniana del punto libero: ciò che fa la differenza è che le coordinate q devono essere degli angoli.

4.5.4 Sistemi isocroni

La condizione di non degenerazione è violata nel caso di un sistema di *oscillatori armonici*, descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j (x_j^2 + y_j^2) , \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} .$$

A tale forma si riconduce tipicamente, in prima approssimazione (o *approssimazione armonica*), l'Hamiltoniana in vicinanza di un punto di equilibrio *ellittico*.⁹ Si possono introdurre le variabili d'angolo-azione mediante la trasformazione

$$x_j = \sqrt{2p_j} \cos q_j , \quad y_j = \sqrt{2p_j} \sin q_j , \quad 1 \leq j \leq n ,$$

e l'Hamiltoniana assume la forma¹⁰

$$(4.40) \quad H = \sum_{j=1}^n \omega_j p_j , \quad p \in \mathbb{R}_+^n , \quad q \in \mathbb{T}^n .$$

⁹ Si parla di equilibrio ellittico quando gli autovalori del sistema di equazioni differenziali linearizzate nell'intorno dell'equilibrio sono tutti immaginari puri.

¹⁰ Si usa la notazione \mathbb{R}_+ per l'insieme dei numeri reali non negativi.

L'aggettivo *isocrono* attribuito a questi sistemi sottolinea il fatto che le frequenze sono indipendenti dal dato iniziale.

Proposizione 4.14: *Supponiamo che H abbia la forma (4.40), e sia $r = \dim \mathcal{M}_\omega$. Allora l'Hamiltoniana ammette $n + r$ integrali primi indipendenti, ad esempio le n azioni p_1, \dots, p_n , alle quali si aggiungono altri r integrali primi della forma $\Phi_k(q) = \cos\langle k, q \rangle$, dove k assume r valori linearmente indipendenti in \mathcal{M}_ω .*

La dimostrazione si riduce a una verifica che ogni funzione Φ_k della forma specificata nell'enunciato è un integrale primo per qualunque $k \in \mathcal{M}_\omega$. L'esistenza di integrali primi dipendenti dagli angoli è connessa al fatto che ogni toro \mathbb{T}^n ammette una foliazione descritta da una famiglia a r parametri di tori di dimensione $(n - r)$, che a loro volta hanno frequenze non risonanti.

4.6 Le variabili di Delaunay per il moto Kepleriano

Una notevole applicazione del teorema di Arnold–Jost consiste nel ricavare le variabili d'azione e angolo per il caso Kepleriano. Il sistema ammette gli integrali primi del momento angolare e dell'energia, il che vale qualunque sia il potenziale $V(r)$. Nel caso Kepleriano se ne aggiunge un altro, e precisamente

$$(4.41) \quad \mathbf{A} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{\Gamma} - \frac{km\mathbf{x}}{r},$$

dove k è la costante che compare nel potenziale kepleriano, e $\mathbf{\Gamma}$ è il momento angolare. Questo integrale primo è detto *vettore di Runge–Lenz*, benché fosse ben noto a Laplace.¹¹ Tenuto conto dei quattro integrali primi che già conosciamo si arriverebbe dunque a sette integrali primi, che non possono essere tutti indipendenti. In effetti, grazie al vettore di Runge–Lenz, si può trovare un quinto integrale primo indipendente dall'energia e dal momento angolare, sicché la superficie invariante risulta essere una curva.¹² Tra questi se ne possono scegliere 3 in involuzione, il che consente di costruire le variabili d'azione; le due rimanenti sono responsabili della degenerazione del sistema. In effetti si hanno tre frequenze eguali: la prima di esse è la frequenza di oscillazione della distanza del punto materiale dal centro; la seconda è la frequenza di oscillazione rispetto al piano x, y del riferimento assoluto, che per un generico campo di forze centrali coincide con la prima (il moto è piano); la terza è la frequenza media di rotazione dell'angolo, che nel caso Kepleriano coincide con le prime due. Il procedimento di costruzione delle variabili d'azione deve tener conto in questo caso della degenerazione, e conduce in modo naturale a introdurre le variabili canoniche di Delaunay.¹³

¹¹ Si veda la nota storica [52]

¹² Il calcolo dell'orbita facendo uso del quinto integrale primo è svolto ad esempio in [24].

¹³ Il procedimento qui seguito non è, evidentemente, quello di Delaunay, che arrivò per tentativi a introdurre le variabili che portano il suo nome. Un procedimento diverso, fondato sull'equazione di Hamilton–Jacobi, si trova in Poincaré (1892), §8.

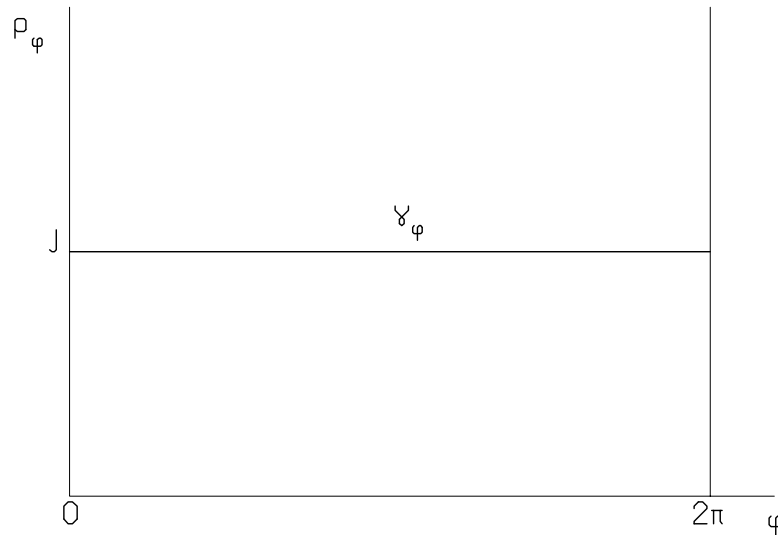


Figura 4.3. A illustrazione del ciclo γ_φ per il moto di un punto in un campo di forze centrali.

4.6.1 Costruzione dei cicli

L'Hamiltoniana per un punto in un campo di forze centrali si scrive, facendo uso di coordinate polari,

$$(4.42) \quad H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + V(r) ;$$

qui, m è la massa del punto, r, ϑ, φ sono coordinate polari rispetto al centro delle forze, $p_r, p_\vartheta, p_\varphi$ sono i momenti coniugati corrispondenti, e $V(r)$ è l'energia potenziale. Nel caso Kepleriano si dovrà porre, in particolare

$$(4.43) \quad V(r) = -\frac{k}{r}$$

dove k è una costante.

L'Hamiltoniana (4.42) ammette i due integrali primi

$$(4.44) \quad \Gamma^2 = p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} , \quad J = p_\varphi ,$$

e questi, unitamente all'Hamiltoniana stessa, formano un sistema di 3 integrali primi in involuzione.¹⁴

¹⁴ È facile verificare che Γ è il modulo del momento angolare, e J è la proiezione del momento angolare sull'asse z del sistema di riferimento. Si è già osservato che in generale esiste un'altra costante del moto (ad esempio la componente M_x del momento angolare) indipendente da queste, e in particolare nel caso Kepleriano un'altra ancora (il vettore di Runge-Lenz); queste ulteriori costanti non sono però in involuzione con le tre considerate.

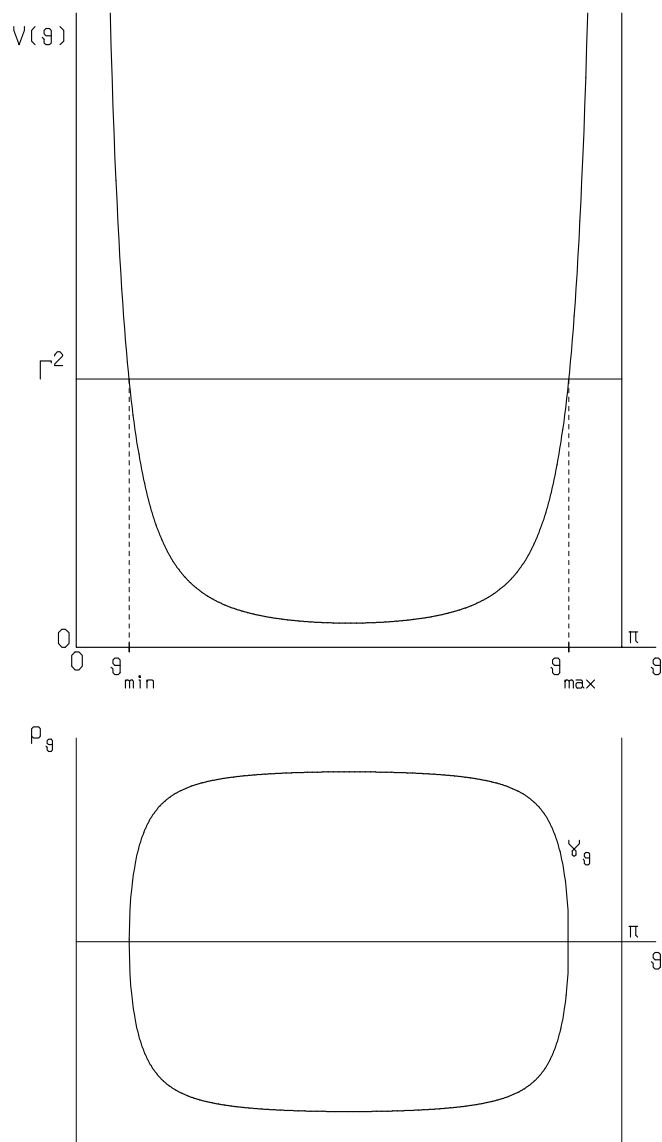


Figura 4.4. A illustrazione della costruzione del ciclo γ_θ per un punto in un campo di forze centrali.

Quanto abbiamo detto suggerisce di considerare le tre funzioni

$$(4.45) \quad J = p_\varphi, \quad \Gamma^2 = p_\theta^2 + \frac{J^2}{\sin^2 \theta}, \quad H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\Gamma^2}{2mr^2} + V(r),$$

che formano un sistema completo in involuzione. A questo sistema possiamo applicare la proposizione 4.7, sicché esiste una trasformazione canonica che introduce delle variabili d'angolo-azione. Procediamo dunque a tale costruzione, seguendo lo schema illustrato nel paragrafo 4.3.3. A tal fine dobbiamo considerare il flusso generato dai tre integrali primi, e determinare tre cicli indipendenti.

La funzione J è un'Hamiltoniana banalmente integrabile, e la variabile φ coniugata a p_φ è già un angolo; questo dà il primo ciclo, diciamo γ_φ (figura 4.3).

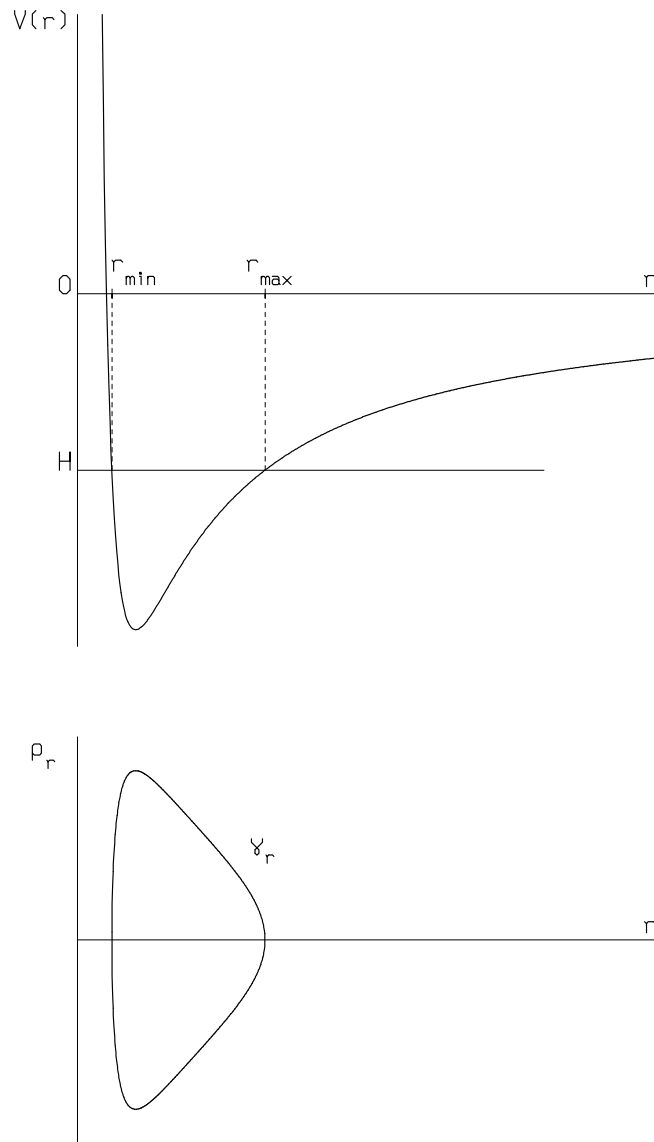


Figura 4.5. A illustrazione della costruzione del ciclo γ_r per un punto in un campo di forze centrali di tipo Kepleriano.

La funzione Γ^2 è l'Hamiltoniana di un sistema a un grado di libertà costituito da un punto sull'intervallo $(0, \pi)$, soggetto a un'energia potenziale $V(\vartheta) = J^2/\sin^2 \vartheta$. Per qualunque valore di $\Gamma^2 > \Gamma_{\min}^2 = J^2$ l'orbita nel piano ϑ, p_ϑ è una curva chiusa (figura 4.4), e questo ci dà il secondo ciclo, diciamo γ_ϑ .

La funzione H può considerarsi come l'Hamiltoniana di un sistema a un grado di libertà con energia potenziale

$$V^*(r) = \frac{\Gamma^2}{2mr^2} + V(r) .$$

Che il moto determinato da questa Hamiltoniana sia o no periodico, dipende manifestamente dalla forma di $V(r)$. Nel caso Kepleriano si ha un moto periodico (stato

legato, orbita ellittica) per $H_{\min} < H < 0$, con $H_{\min} = -mk^2/(2\Gamma^2)$, e un moto non periodico (stato d'urto, orbita iperbolica) per $H > 0$.

Nel primo caso l'orbita nel piano r, p_r è una curva chiusa, che rappresenta il terzo ciclo, diciamo γ_r (figura 4.5); la superficie M è dunque descrivibile come prodotto cartesiano dei tre cicli, $\gamma_r, \gamma_\vartheta, \gamma_\varphi$, ovvero, a patto di introdurre delle coordinate angolari su questi cicli, come un toro \mathbb{T}^3 . Nel caso $H > 0$ invece l'orbita nel piano r, p_r non è chiusa, e quindi la superficie M ha solo due cicli, $\gamma_\vartheta, \gamma_\varphi$; in questo caso si possono introdurre due variabili angolari sui cicli, e una terza coordinata (ad esempio il tempo stesso) sull'orbita del piano r, p_r , sicché la superficie M può rappresentarsi come prodotto cartesiano di un toro \mathbb{T}^2 con la retta \mathbb{R} .

4.6.2 Costruzione delle variabili d'azione

Avendo determinato i cicli, possiamo procedere alla costruzione delle variabili d'azione considerando il caso $H_{\min} < H < 0$. A tal fine si devono invertire le (4.45) rispetto a $p_r, p_\vartheta, p_\varphi$, e si ottiene

$$(4.46) \quad \begin{aligned} p_r &= \left[2m(H - V(r)) - \frac{\Gamma^2}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ p_\vartheta &= \left(\Gamma^2 - \frac{J^2}{\sin^2 \vartheta} \right)^{\frac{1}{2}} \\ p_\varphi &= J ; \end{aligned}$$

si deve poi integrare la forma differenziale $p_r dr + p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi$ sui cicli $\gamma_r, \gamma_\vartheta, \gamma_\varphi$. Tenendo conto della forma dei cicli, le variabili d'azione $I_r, I_\vartheta, I_\varphi$ sono¹⁵

$$(4.47) \quad \begin{aligned} I_\varphi &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_\varphi} p_\varphi d\varphi = J \\ I_\vartheta &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_\vartheta} p_\vartheta d\vartheta = \Gamma - |J| \\ I_r &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_r} p_r dr = -\Gamma + k\sqrt{-\frac{m}{2H}} . \end{aligned}$$

Il calcolo di I_φ è banale; questo, del resto, era da attendersi, perché φ è una variabile ciclica. Il calcolo di I_ϑ e I_r potrebbe svolgersi direttamente; tuttavia è interessante fare uso esplicito degli elementi orbitali introdotti nel capitolo 1. Ciò sarà particolarmente utile al fine di stabilire le relazioni tra variabili di Delaunay e elementi orbitali, necessarie per il calcolo delle posizioni.

Per il calcolo di I_ϑ si può anzitutto parametrizzare la curva γ_ϑ con un'opportuna variabile angolare (nel senso che deve avere periodo 2π). A tal fine si presentano due possibilità: la prima consiste nel far uso dell'angolo φ delle coordinate polari, o,

¹⁵ Il calcolo di I_ϑ, I_φ è evidentemente indipendente dalla forma del potenziale, mentre quello di I_r tiene conto in modo esplicito del potenziale Kepleriano e della condizione $H_{\min} < H < 0$, che assicura l'esistenza di orbite chiuse.

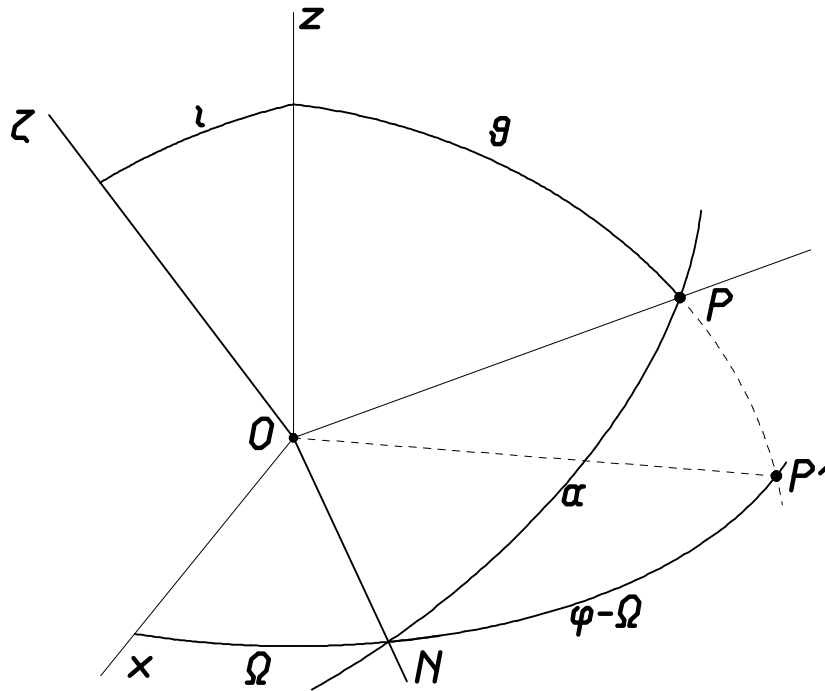


Figura 4.6. A illustrazione delle relazioni tra le coordinate sferiche φ, ϑ e l'angolo α che identifica la direzione \overline{OP} rispetto all'asse dei nodi. In questo calcolo intervengono gli elementi orbitali Ω (longitudine del nodo ascendente) e ι (inclinazione). L'angolo α è legato all'anomalia vera ψ e all'argomento del perielio ω dalla relazione $\alpha = \psi + \omega$.

meglio, dell'angolo $\varphi - \Omega$, misurato a partire dalla direzione del nodo ascendente; la seconda possibilità, che tiene conto del fatto che il moto è piano, è di riferirsi all'angolo α misurato nel piano orbitale, sempre rispetto alla direzione del nodo ascendente (figura 4.6). Serve anzitutto stabilire delle relazioni generali tra gli angoli $\vartheta, \varphi, \alpha$. Facendo riferimento a una terna cartesiana assoluta x, y, z , si identifica con l'angolo Ω , misurato nel piano x, y , la direzione del nodo ascendente. Si considerano poi due riferimenti cartesiani: il primo, N, y', z , ottenuto semplicemente ruotando il riferimento assoluto di un angolo Ω intorno all'asse z ; il secondo, ξ, η, ζ , ottenuto ruotando il riferimento N, y', z di un angolo ι attorno all'asse dei nodi, sicché l'asse ζ viene a coincidere con la direzione del momento angolare, e il piano ξ, η con il piano orbitale. Preso ora ad arbitrio un punto P nel piano ξ, η , e considerandone le componenti sulle due terne appena introdotte, si hanno le relazioni¹⁶

$$(4.48) \quad \begin{aligned} \sin \vartheta \cos(\varphi - \Omega) &= \cos \alpha \\ \sin \vartheta \sin(\varphi - \Omega) &= \sin \alpha \cos \iota \\ \cos \vartheta &= \sin \alpha \sin \iota . \end{aligned}$$

¹⁶ Si ha $x' = \sin \vartheta \cos(\varphi - \Omega)$, $y' = \sin \vartheta \sin(\varphi - \Omega)$, $z' = \cos \vartheta$ e $\xi = \cos \alpha$, $\eta = \sin \alpha$, $\zeta = 0$. D'altra parte si ha per costruzione $x' = \xi$, $y' = \eta \cos \iota$, $z' = \eta \sin \iota$, e dunque le (4.48).

La parametrizzazione del ciclo γ_ϑ mediante l'angolo α si esprime mediante le relazioni

$$(4.49) \quad \begin{aligned} \cos \vartheta &= \sin \alpha \sin \iota \\ p_\vartheta &= -\frac{\Gamma}{\sin \vartheta} \cos \alpha \sin \iota ; \end{aligned}$$

la prima altro non è che la terza delle (4.48). La seconda richiede un breve calcolo. Sostituiamo nella seconda delle (4.46) la relazione

$$(4.50) \quad J = \Gamma \cos \iota ,$$

che a sua volta segue dal fatto che il momento angolare è ortogonale al piano orbitale, e che J è la proiezione del momento angolare sull'asse z del riferimento assoluto. Facendo ancora uso delle (4.48) si ha¹⁷

$$p_\vartheta^2 = \frac{\Gamma^2}{\sin^2 \vartheta} (\sin^2 \vartheta - \cos^2 \iota) = \frac{\Gamma^2}{\sin^2 \vartheta} \cos^2 \alpha \sin^2 \iota .$$

Da qui si ricava la seconda delle (4.49). La scelta del segno negativo nella determinazione della radice si giustifica osservando che in tal modo si ha $p_\vartheta < 0$ al passaggio al nodo ascendente, $\vartheta = \pi/2$, $\alpha = 0$, consistentemente con la scelta dell'angolo α .

La parametrizzazione del ciclo γ_ϑ mediante l'angolo φ è invece espressa dalle relazioni

$$(4.51) \quad \cot \vartheta = \tan \iota \sin(\varphi - \Omega) , \quad p_\vartheta = -\Gamma \sin \iota \cos(\varphi - \Omega) ;$$

la prima si ottiene dividendo membro a membro la seconda e la terza delle (4.48), e la seconda si ottiene ancora dalla seconda delle (4.49) sostituendovi la prima delle (4.48); anche qui la scelta del segno negativo si giustifica osservando che si ha $p_\vartheta < 0$ al passaggio al nodo ascendente, $\vartheta = \pi/2$, $\varphi = \Omega$. In questo caso si deve però osservare che l'angolo φ è percorso in verso crescente per $J > 0$ e in senso decrescente per $J < 0$; il valore $J = 0$ è singolare, poiché l'angolo φ varia in maniera discontinua.

Venendo ora al calcolo dell'integrale, si osserva che si ha

$$\oint_{\gamma_\vartheta} p_\vartheta d\vartheta = \Gamma^2 \oint_{\gamma_\vartheta} \frac{d\vartheta}{p_\vartheta} - \Gamma^2 \cos^2 \iota \oint_{\gamma_\vartheta} \frac{d\vartheta}{p_\vartheta \sin^2 \vartheta} ;$$

(basta scrivere $p_\vartheta = p_\vartheta^2/p_\vartheta$, e sostituire l'espressione esplicita del numeratore). Il primo integrale si calcola facendo uso dell'angolo α mediante le (4.49); il secondo ricorrendo all'angolo φ e alle (4.51). Occorre solo ricordare che il verso dell'angolo φ cambia quando J cambia segno. Facendo uso delle relazioni

$$\begin{aligned} -\sin \vartheta d\vartheta &= \sin \iota \cos \alpha d\alpha \\ -\frac{d\vartheta}{\sin^2 \vartheta} &= \tan \iota \cos(\varphi - \Omega) d\varphi , \end{aligned}$$

¹⁷ Dalle prime due delle (4.48) si ha $\sin^2 \vartheta = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \iota$, e dunque $\sin^2 \vartheta - \cos^2 \iota = \cos^2 \alpha(1 - \cos^2 \iota) = \cos^2 \alpha(1 - \cos^2 \iota) = \cos^2 \alpha \sin^2 \iota$.

che seguono rispettivamente dalle (4.49) e (4.51), si calcola

$$I_{\vartheta} = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha - \frac{|J|}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi ;$$

da qui segue la seconda delle (4.47), e questo completa il calcolo di I_{ϑ} .

Per il calcolo di I_r si procede in modo analogo. Anzitutto si parametrizza il ciclo γ_r con due angoli opportuni; a tal fine ben si prestano l'anomalia vera ψ oppure l'anomalia eccentrica u , già introdotte nel paragrafo 1.1.2; la relazione tra ψ e l'angolo α già usato per il calcolo di I_{ϑ} è

$$(4.52) \quad \psi = \alpha - \omega ,$$

dove ω è l'argomento del perielio.

Anche qui è necessario premettere la deduzione di una relazione tra le costanti H, Γ e gli elementi orbitali a, e ; questa si ottiene osservando che gli estremi r_{\min}, r_{\max} , che sono le soluzioni dell'equazione

$$2m \left(H + \frac{k}{r} \right) - \frac{\Gamma^2}{r^2} = 0 ,$$

devono corrispondere a $a(1 - e)$ ed $a(1 + e)$, dove a è il semiasse maggiore ed e l'eccentricità dell'ellisse. Scrivendo le soluzioni nella forma

$$r_{\min, \max} = -\frac{k}{2H} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2H\Gamma^2}{mk^2}} \right)$$

si ottiene subito

$$(4.53) \quad a = -\frac{k}{2H} , \quad e = \sqrt{1 + \frac{2H\Gamma^2}{mk^2}}$$

La parametrizzazione del ciclo γ_r mediante l'anomalia eccentrica u è espressa dalle relazioni

$$(4.54) \quad \begin{aligned} r &= a(1 - e \cos u) \\ p_r &= \sqrt{\frac{mk}{a}} \frac{e \sin u}{1 - e \cos u} \end{aligned}$$

La prima relazione altro non è che l'equazione dell'ellisse nelle variabili r ed u , già dedotta nel paragrafo 1.1.2, equazione (1.3); la seconda si ricava sostituendo nell'espressione (4.46) di p_r i valori $H = -k/(2a)$ e $\Gamma^2 = mka(1 - e^2)$ ottenuti dalle (4.53), sicché si ha

$$(4.55) \quad p_r^2 = -\frac{mka}{r^2} \left[\left(\frac{r}{a} - 1 \right)^2 - e^2 \right] ,$$

e sostituendo in quest'ultima espressione il valore di r dato dalla prima delle (4.54).

La parametrizzazione di γ_r mediante l'anomalia vera ψ è invece espressa dalle relazioni

$$(4.56) \quad \begin{aligned} r &= \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \psi} \\ p_r &= \frac{\Gamma e}{a(1 - e^2)} \sin \psi . \end{aligned}$$

La prima di queste relazioni altro non è che l'equazione dell'ellisse in coordinate polari, con l'angolo ψ misurato a partire dal perielio; la seconda si ottiene per semplice sostituzione della prima di queste relazioni nella (4.55), in analogia a quanto fatto sopra.

Venendo ora al calcolo dell'integrale, e procedendo come per il calcolo di I_ϑ , si osserva che si ha

$$p_r = -\frac{mk}{ap_r} + \frac{2mk}{rp_r} - \frac{\Gamma^2}{r^2 p_r} .$$

Per integrare i primi due termini si fa uso dell'anomalia eccentrica u , mediante le (4.54); per il terzo termine si ricorre invece all'anomalia vera ψ , tramite le (4.56). Si ottiene

$$\begin{aligned} I_r &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_r} p_r dr \\ &= -\sqrt{mka} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos u) du + \frac{2\sqrt{mka}}{2\pi} \int_0^{2\pi} du - \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \\ &= \sqrt{mka} - \Gamma . \end{aligned}$$

Il risultato della (4.47) si ottiene sostituendo $a = -k/(2H)$, dato dalla (4.53), e questo completa il calcolo di I_r .

L'espressione dell'Hamiltoniana nelle variabili d'azione così calcolate si ricava direttamente dalle (4.47), ed è

$$(4.57) \quad H = -\frac{mk^2}{2(I_r + I_\vartheta + |I_\varphi|)^2} .$$

Il fatto che l'Hamiltoniana dipenda solo dalla somma delle azioni significa che il sistema è, come suol dirsi, degenere. Si intende con questo che il moto degli angoli coniugati a $I_r, I_\vartheta, I_\varphi$, diciamo $\bar{r}, \bar{\vartheta}, \bar{\varphi}$, è periodico, con periodi identici; ciò risulta in modo evidente dalle equazioni di moto, che sono

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{\vartheta}} = \dot{\bar{\varphi}} = \frac{mk^2}{(I_r + I_\vartheta + |I_\varphi|)^3} .$$

In queste condizioni è conveniente cambiare le variabili, introducendo le *variabili ca-*

noniche di Delaunay definite come

$$(4.58) \quad \begin{aligned} L &= I_r + I_\vartheta + |I_\varphi| \\ G &= I_\vartheta + |I_\varphi| \\ \Theta &= |I_\varphi| \end{aligned}$$

Si osservi che G coincide con Γ e Θ coincide con J . La matrice di trasformazione ha elementi interi e determinante 1; è quindi soddisfatta la condizione perché la trasformazione conservi i periodi. In effetti, questo corrisponde a calcolare le variabili d'azione su cicli diversi da quelli usati sopra. Nelle nuove azioni l'Hamiltoniana assume la forma

$$(4.59) \quad H = -\frac{mk^2}{2L^2} ,$$

che è la forma comunemente usata per l'Hamiltoniana del moto centrale.

4.6.3 Le variabili angolari

Per completare il calcolo occorre determinare le variabili angolari coniugate alle azioni L, G, Θ , che denoteremo rispettivamente con ℓ, g, ϑ . A tal fine occorre costruire la funzione generatrice

$$\begin{aligned} S &= \int (p_r dr + p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi) \\ &= \int \sqrt{-\frac{m^2 k^2}{L^2} + \frac{2mk}{r} - \frac{G^2}{r^2}} dr + \int \sqrt{G^2 - \frac{\Theta^2}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta + \int \Theta d\varphi ; \end{aligned}$$

derivando rispetto alle azioni si ottiene

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{\partial S}{\partial L} = \frac{m^2 k^2}{L^3} \int \frac{dr}{\sqrt{-\frac{m^2 k^2}{L^2} + \frac{2mk}{r} - \frac{G^2}{r^2}}} , \\ g &= \frac{\partial S}{\partial G} = G \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{G^2 - \frac{\Theta^2}{\sin^2 \vartheta}}} - G \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{-\frac{m^2 k^2}{L^2} + \frac{2mk}{r} - \frac{G^2}{r^2}}} , \\ h &= \frac{\partial S}{\partial \Theta} = -\Theta \int \frac{d\vartheta}{\sin^2 \vartheta \sqrt{G^2 - \frac{\Theta^2}{\sin^2 \vartheta}}} + \int d\varphi . \end{aligned}$$

Il calcolo di questi integrali è già stato svolto nel paragrafo precedente; si ha in effetti, mantenendo le stesse notazioni,

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{m^2 k^2}{L^3} \int \frac{dr}{p_r} = \int (1 - e \cos u) du = u - e \sin u , \\ g &= G \int \frac{d\vartheta}{p_\vartheta} - G \int \frac{dr}{r^2 p_r} = \int d\alpha - \int d\psi = \alpha - \psi , \\ h &= - \int d\varphi + \int d\varphi = \text{cost} . \end{aligned}$$

La prima di queste equazioni altro non è che l'equazione di Keplero, sicché ℓ è l'anomalia media; tenuto conto della relazione (4.52) tra ψ e α , l'angolo g coincide con l'argomento del perielio ω . Infine la variabile h rappresenta in pratica l'origine da cui si misura l'angolo φ ; la scelta tradizionale consiste nel definire h come la longitudine del nodo ascendente Ω .

4.6.4 Relazioni tra le variabili canoniche di Delaunay e gli elementi orbitali

Riassumendo, le variabili di Delaunay sono

$$(4.60) \quad \begin{aligned} L &= \sqrt{mka} \quad , & \ell &= n(t - \tau) \quad (\text{anomalia media}) \\ G &= L\sqrt{1 - e^2} \quad , & g &= \omega \quad (\text{argomento del perielio}) \\ \Theta &= G \cos \iota \quad , & \vartheta &= \Omega \quad (\text{longitudine del nodo}) \end{aligned}$$

Si vede dunque che la relazione tra queste variabili e gli elementi orbitali è molto stretta. Si noti che qui è stata chiamata ϑ la longitudine del nodo, che nel paragrafo precedente era stata denotata con h per evitare confusioni con la coordinata sferica ϑ ; questo cambiamento di notazione risponde all'esigenza di ristabilire la simmetria tra i simboli delle azioni e degli angoli corrispondenti.¹⁸

4.6.5 Le variabili di Delaunay modificate

Le variabili di Delaunay sono soggette all'ovvia limitazione

$$(4.61) \quad |\Theta| \leq G ;$$

Inoltre esse presentano le seguenti singolarità.

- i. Le orbite circolari, per le quali si ha $e = 0$, e dunque le variabili L e G coincidono; ciò corrisponde alla scomparsa del ciclo γ_r , e alla perdita di significato della longitudine del perielio.
- ii. Le orbite per cui $\iota = 0$ oppure $\iota = \pi$, corrispondenti a un movimento nel piano orizzontale; in questo caso si ha $G = \Theta$, e non è definita la longitudine del nodo (e di conseguenza neppure la longitudine del perielio).
- iii. Le orbite per cui $G = 0$; in questo caso si ha una collisione.

In pratica, il sistema di riferimento viene solitamente scelto in modo che ι sia più vicino a 0 che a π . In questo caso è possibile ridurre le prime due singolarità a una forma simile a quella dell'origine delle coordinate polari. A tal fine si fa uso ancora di una trasformazione canonica lineare, definita mediante una matrice unimodulare. Si introducono così le *variabili di Delaunay modificate*, definite come

$$(4.62) \quad \begin{aligned} \Lambda &= L \quad , & \lambda &= \ell + g + \vartheta \quad , \\ P &= L - G = L(1 - \sqrt{1 - e^2}) \quad , & p &= -g - \vartheta \quad , \\ Q &= G - \Theta = 2G \sin^2 \frac{\iota}{2} \quad , & q &= -\vartheta \quad . \end{aligned}$$

¹⁸ In molti testi viene usata la notazione H, h anziché Θ, ϑ . Qui ho preferito seguire la notazione di Poincaré, riservando H per l'Hamiltoniana.

Le singolarità qui diventano $P = 0$ e $Q = 0$, dove perdono significato rispettivamente gli angoli p e q .

In taluni casi queste singolarità diventano scomode. Un metodo spesso utile per eliminarle consiste nel ricorrere ancora alla trasformazione in variabili d'angolo e azione per l'oscillatore armonico

$$(4.63) \quad \begin{aligned} x_1 &= \sqrt{2P} \cos p, & y_1 &= \sqrt{2P} \sin p \\ x_2 &= \sqrt{2Q} \cos q, & y_2 &= \sqrt{2Q} \sin q \end{aligned}$$

Alle variabili (x_1, x_2, y_1, y_2) si dà il nome di *variabili di Poincaré*.¹⁹ Queste variabili sono particolarmente utili per descrivere orbite prossime a quella circolare e di piccola inclinazione, per le quali sia P che Q sono piccoli.

¹⁹ Poincaré, 1892, §12. Vi si fa uso anche delle variabili di Delaunay modificate (4.62).

