

5

IL PROBLEMA PLANETARIO E LA FUNZIONE PERTURBATRICE

Veniamo ora allo studio del moto planetario nell'ambito della teoria della gravitazione di Newton. Il problema in generale si formula come segue: *studiare la dinamica di un sistema di $n + 1$ masse puntiformi nello spazio, a due a due interagenti con una forza attrattiva descritta dalla legge gravitazionale di Newton.*

Il primo compito che si pone è la scrittura dell'Hamiltoniana e dei suoi integrali primi, che risultano essere la quantità di moto totale e il momento della quantità di moto, o momento angolare. Si procede poi all'uso degli integrali primi per ridurre il numero di gradi di libertà del sistema.

Una prima riduzione, detta comunemente *eliminazione del baricentro*, consiste nel far uso della conservazione della quantità di moto totale per ridurre di 3 il numero di gradi di libertà. Questo procedimento è relativamente semplice. Più complesso invece è l'uso della conservazione del momento angolare, che svolgeremo solo più avanti, per il problema dei tre corpi.

Per l'eliminazione del baricentro si fa ricorso a trasformazioni lineari di coordinate. Tradizionalmente si fa uso di due metodi distinti. Il primo metodo risale all'epoca di Laplace, ma si deve a Poincaré il suo utilizzo nell'ambito del formalismo Hamiltoniano. Esso consiste nel considerare la posizione delle masse $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ relativamente a \mathbf{x}_0 , la posizione del Sole. Si parla in questo caso di *coordinate eliocentriche*. Il secondo metodo, dovuto ad Jacobi, consiste nel considerare la posizione delle masse $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ relativamente al baricentro delle precedenti; la coordinata \mathbf{x}_0 viene sostituita da quella del baricentro di tutto il sistema. Si parla in questo caso di *coordinate di Jacobi*.

Effettuata la riduzione del baricentro, si scrive l'Hamiltoniana come somma di due contributi: una parte principale, o imperturbata, che descrive in buona sostanza il moto kepleriano dei singoli pianeti sotto l'azione del Sole, e una *funzione perturbatrice* che tiene conto delle interazioni tra i pianeti.

Lo sviluppo della funzione perturbatrice è uno dei problemi classici della Meccanica Celeste. Il calcolo è decisamente laborioso, e al giorno d'oggi conviene certamente svolgerlo facendo ricorso alla manipolazione algebrica al calcolatore.

5.1 Hamiltoniana e integrali primi

Denotiamo con m_0, \dots, m_n le masse degli $n + 1$ corpi. Riferendoci senz'altro al caso planetario intenderemo che l'indice 0 identifichi il Sole. Consideriamo un sistema di coordinate cartesiane solidale col cielo delle stelle fisse; denoteremo con $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n$ le posizioni delle masse e con $\mathbf{y}_0 = m_0 \dot{\mathbf{x}}_0, \dots, \mathbf{y}_n = m_n \dot{\mathbf{x}}_n$ le rispettive quantità di moto. Scriviamo direttamente l'Hamiltoniana del sistema, che assume la forma

$$(5.1) \quad H = T + V$$

dove

$$(5.2) \quad T = \sum_{j=0}^n \frac{\mathbf{y}_j^2}{2m_j}, \quad V = -\mathcal{G} \sum_{0 \leq j < k \leq n} \frac{m_j m_k}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|}$$

avendo denotato con \mathcal{G} la costante universale di gravitazione. Si tratta, come ben si vede, di un sistema a $3n + 3$ gradi di libertà.

È ben noto che questo sistema ammette gli integrali primi della quantità di moto

$$(5.3) \quad \mathbf{P} = \sum_{k=0}^n \mathbf{y}_k$$

e del momento della quantità di moto, o momento angolare,

$$(5.4) \quad \mathbf{\Gamma} = \sum_{k=0}^n \mathbf{x}_k \wedge \mathbf{y}_k .$$

5.1.1 Una particolarità delle trasformazioni lineari

Le trasformazioni lineari che introdurremo per l'eliminazione del baricentro appartengono ad una classe più vasta che ha la proprietà di mantenere invariata la forma del momento angolare.¹

Supponiamo assegnata una matrice non singolare \mathbf{A} con $(n + 1) \times (n + 1)$ elementi, che denoteremo con A_{jk} . Consideriamo la trasformazione lineare dalle coordinate $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n$ alle nuove coordinate $\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_n$

$$(5.5) \quad \mathbf{r}_k = \sum_{j=0}^n A_{kj} \mathbf{x}_j .$$

Accanto ad essa consideriamo la trasformazione inversa, che scriveremo

$$(5.6) \quad \mathbf{x}_j = \sum_{k=0}^n \tilde{A}_{jk} \mathbf{r}_k ,$$

avendo denotato con \tilde{A}_{jk} gli elementi della matrice \mathbf{A}^{-1} , inversa di \mathbf{A} , sicché vale la relazione $\sum_{j=0}^n A_{kj} \tilde{A}_{jl} = \delta_{kl}$.

¹ Tale proprietà è stata sottolineata da Poincaré ([105], Chap. II, § 23).

Si tratta evidentemente di una trasformazione puntuale, che possiamo estendere ad una trasformazione canonica seguendo la traccia dell'esempio 3.2. A tal fine, denotando con $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ i momenti coniugati alle nuove coordinate $\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_n$, scriviamo la funzione generatrice

$$S(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_{j,k=0}^n A_{jk} \mathbf{p}_j \mathbf{x}_k .$$

Ne ricaviamo subito la trasformazione sui momenti

$$(5.7) \quad \mathbf{y}_j = \sum_{k=0}^n A_{kj} \mathbf{p}_k ,$$

dove $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_n$ sono i momenti coniugati alle vecchie coordinate $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n$. Notiamo che la trasformazione è ancora lineare, con una matrice \mathbf{A}^\top che è la trasposta della matrice \mathbf{A} con cui siamo partiti. Se confrontiamo la (5.7) con la (5.6), che trasforma le coordinate nella stessa direzione, ci rendiamo conto che le matrici delle due trasformazioni sono la trasposta dell'inversa l'una dell'altra.

Quello che abbiamo messo in evidenza è un fatto generale, che possiamo tradurre in un enunciato: *se si esegue una trasformazione lineare con una matrice \mathbf{A} sulle coordinate, allora la trasformazione corrispondente sui momenti è lineare, con la matrice $(\mathbf{A}^{-1})^\top$, trasposta dell'inversa di \mathbf{A} .*

Veniamo al momento angolare. Ricordando che vale la relazione $\sum_{j=0}^n A_{kj} \tilde{A}_{jl} = \delta_{kl}$, e in virtù della linearità del prodotto vettore, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma} &= \sum_{j=0}^n \mathbf{x}_j \wedge \mathbf{y}_j = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n (A_{kj} \mathbf{r}_k) \wedge (\tilde{A}_{jl} \mathbf{p}_l) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \left(\sum_{j=0}^n A_{kj} \tilde{A}_{jl} \right) \mathbf{r}_k \wedge \mathbf{p}_l = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \delta_{kl} \mathbf{r}_k \wedge \mathbf{p}_l = \sum_{k=0}^n \mathbf{r}_k \wedge \mathbf{p}_k . \end{aligned}$$

Questo mostra che il momento angolare mantiene la stessa forma sotto una trasformazione lineare del tipo che abbiamo considerato.

5.2 Le coordinate eliocentriche

In questo procedimento si assegna un ruolo privilegiato al Sole, tenendo conto che la sua massa m_0 è sensibilmente superiore a quella dei pianeti.

5.2.1 La trasformazione di coordinate

Introduciamo le *coordinate eliocentriche* $\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_n$ mediante la trasformazione

$$(5.8) \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{x}_0 , \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0 , \quad k = 1, \dots, n .$$

Si vede subito che si tratta di una trasformazione lineare che può definirsi mediante la matrice

$$(5.9) \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice si inverte in modo elementare, essendo

$$(5.10) \quad \mathbf{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se ne ricava subito la trasformazione inversa della (5.8), che si scrive

$$(5.11) \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Come ben si vede, si tratta di una trasformazione puntuale, che possiamo estendere ai momenti come descritto nel paragrafo 5.1.1. La trasformazione sui momenti è anch'essa lineare, e si costruisce con la matrice \mathbf{L}^\top , trasposta della (5.9); abbiamo dunque

$$(5.12) \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{p}_0 - \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j, \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{p}_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Mediante la matrice $(\mathbf{L}^{-1})^\top$ si inverte subito anche la trasformazione sui momenti, ottenendo

$$(5.13) \quad \mathbf{p}_0 = \sum_{j=0}^n \mathbf{y}_j, \quad \mathbf{p}_k = \mathbf{y}_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

sicché \mathbf{p}_0 risulta essere la quantità di moto totale.

5.2.2 Trasformazione dell'Hamiltoniana

Ricordiamo che abbiamo scritto l'Hamiltoniana come $H = T + V$, ove l'energia cinetica T e l'energia potenziale V sono date dalla (5.2), che riscriviamo per comodità:

$$T = \sum_{j=0}^n \frac{\mathbf{y}_j^2}{2m_j}, \quad V = -\mathcal{G} \sum_{0 \leq j < k \leq n} \frac{m_j m_k}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|}.$$

Consideriamo anzitutto l'energia cinetica. Sostituendo le (5.13) nell'espressione di T calcoliamo

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2m_0} \left(\mathbf{p}_0 - \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j \right)^2 + \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m_j} \\ &= \frac{\mathbf{p}_0^2}{2m_0} - \frac{1}{m_0} \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_j} \right) \mathbf{p}_j^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_k}{m_0}. \end{aligned}$$

È conveniente introdurre le *masse ridotte* dei pianeti definite come

$$(5.14) \quad \mu_k = \frac{m_0 m_k}{m_0 + m_k},$$

e riscrivere l'energia cinetica come somma di tre termini, $T = \tilde{T} + T_0 + T_1$, ove

$$(5.15) \quad \tilde{T} = \frac{\mathbf{p}_0^2}{2m_0} - \frac{1}{m_0} \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_j, \quad T_0 = \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{p}_j^2}{2\mu_j}, \quad T_1 = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_k}{m_0}.$$

Veniamo ora all'energia potenziale. La sostituzione della trasformazione (5.8) nella seconda delle (5.2) è immediata. È conveniente anche qui scrivere l'energia potenziale come somma di due termini, $V = V_0 + V_1$, con

$$(5.16) \quad V_0 = -\mathcal{G} \sum_{j=1}^n \frac{(m_0 + m_j)\mu_j}{\|\mathbf{r}_j\|}, \quad V_1 = -\mathcal{G} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{m_j m_k}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\|}.$$

Osserviamo che l'energia potenziale non dipende dalla coordinata \mathbf{r}_0 . Il momento corrispondente \mathbf{p}_0 è dunque costante, il che non desta meraviglia dato che si tratta della quantità di moto totale. Di conseguenza ci è lecito assumerlo nullo, sicché il termine \tilde{T} dell'energia cinetica può rimuoversi dall'Hamiltoniana trasformata.

Scriveremo l'Hamiltoniana come somma di due contributi

$$(5.17) \quad H = H_0 + \varepsilon H_1$$

dove

$$(5.18) \quad \begin{aligned} H_0 &= T_0 + V_0 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\mathbf{p}_j^2}{2\mu_j} - \mathcal{G} \frac{(m_0 + m_j)\mu_j}{\|\mathbf{r}_j\|} \right) \\ \varepsilon H_1 &= T_1 + V_1 = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_k}{m_0} - \mathcal{G} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{m_j m_k}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\|}. \end{aligned}$$

L'Hamiltoniana che abbiamo appena scritto dipende solo dalle $2n$ coordinate canoniche $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$, il che significa che abbiamo ridotto di 3 il numero dei gradi di libertà, eliminando appunto il moto del baricentro del sistema.

Osserviamo che la parte H_0 dell'Hamiltoniana si separa in n contributi, ciascuno dei quali descrive il moto kepleriano di un singolo pianeta in interazione col Sole. Il termine H_1 contiene invece l'interazione tra i pianeti, ma il suo contributo

all'Hamiltoniana risulta essere sensibilmente più piccolo di un fattore che può rozzamente stimarsi come μ_j/m_0 , dove al posto di μ_j dovremo sostituire il massimo tra le masse dei pianeti. La piccolezza di questo contributo viene messa in evidenza anteponendo un parametro $\varepsilon \sim \max_j \mu_j/m_0$, da considerarsi piccolo. L'utilità di questo parametro si apprezza nel momento in cui si passa agli sviluppi tipici della teoria delle perturbazioni, che procedono per potenze di ε . Nel caso del nostro sistema solare tale fattore è il rapporto tra la massa di Giove e quella del Sole, che risulta essere circa 10^{-3} . Va da sé che tale approssimazione è accettabile solo se le distanze tra i pianeti non diventano troppo piccole. Ad esempio, nel caso dei satelliti la piccola distanza compensa il rapporto tra le masse, e non è più lecito considerare H_1 piccolo rispetto ad H_0 .

5.2.3 Equazioni e leggi di conservazione

Le equazioni canoniche per l'Hamiltoniana (5.18) hanno la forma

$$(5.19) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_k &= \frac{\mathbf{p}_k}{\mu_k} + \sum_{j \neq k} \frac{\mathbf{p}_j}{m_0} , \\ \dot{\mathbf{p}}_k &= -\mathcal{G}(m_0 + m_k)\mu_k \frac{\mathbf{r}_k}{\|\mathbf{r}_k\|^3} - \mathcal{G}m_k \sum_{j \neq k} m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\|^3} . \end{aligned}$$

Si nota subito che i momenti \mathbf{p}_k non sono proporzionali alle velocità $\dot{\mathbf{r}}_k$. Ciò è conseguenza del fatto che l'energia cinetica ha una forma non diagonale, una proprietà che invece valeva per le coordinate nel riferimento assoluto. Per questo motivo le coordinate eliocentriche non hanno avuto grande popolarità tra gli astronomi del passato, nonostante il fatto innegabile che la deduzione delle equazioni si presenti relativamente semplice.

È anche utile riesprimere in coordinate eliocentriche il momento della quantità di moto, o momento angolare. Qui dobbiamo rifarci al paragrafo 5.1.1, dove abbiamo visto che la forma del momento angolare viene conservata dalla trasformazione. Dobbiamo solo ricordare che abbiamo posto $\mathbf{p}_0 = 0$, sicché possiamo scrivere

$$(5.20) \quad \mathbf{\Gamma} = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \wedge \mathbf{p}_j .$$

5.3 Le coordinate di Jacobi

Denotiamo con

$$(5.21) \quad M_k = \sum_{j=0}^k m_j , \quad k = 0, \dots, n ,$$

la massa del sistema formato dai primi k corpi; si osservi in particolare che $M_0 = m_0$ e M_n è la massa totale degli $n + 1$ corpi. Si definisce anzitutto, per ricorrenza,

$$(5.22) \quad M_0 \mathbf{b}_0 = m_0 \mathbf{x}_0 , \quad M_k \mathbf{b}_k = m_k \mathbf{x}_k + M_{k-1} \mathbf{b}_{k-1} , \quad k = 1, \dots, n ,$$

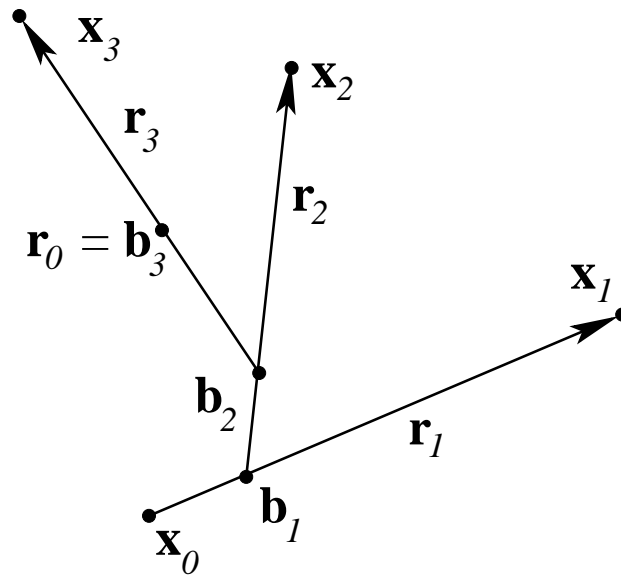


Figura 5.1. La costruzione delle coordinate di Jacobi.

sicché \mathbf{b}_0 è il baricentro del primo corpo (di fatto \mathbf{x}_0 stesso), \mathbf{b}_1 il baricentro dei primi due, e così via fino a \mathbf{b}_n che è il baricentro di tutti gli $n + 1$ corpi. Introduciamo infine le nuove coordinate $\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_n$ definendole ricorsivamente come²

$$(5.23) \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{b}_n, \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{b}_{k-1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

In tal modo \mathbf{r}_0 rappresenta il baricentro dell'intero sistema, mentre per $k > 0$ il corpo \mathbf{x}_k viene identificato dalla sua posizione relativa rispetto al baricentro dei corpi $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$, come illustrato in figura 5.1.

La trasformazione si scrive in forma più esplicita

$$(5.24) \quad \begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \frac{m_0}{M_n} \mathbf{x}_0 + \frac{m_1}{M_n} \mathbf{x}_1 + \dots + \frac{m_n}{M_n} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{r}_1 &= \mathbf{x}_1 - \frac{m_0}{M_0} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{x}_2 - \frac{m_1}{M_1} \mathbf{x}_1 - \frac{m_0}{M_1} \mathbf{x}_0 \\ &\dots \dots \\ \mathbf{r}_n &= \mathbf{x}_n - \frac{m_{n-1}}{M_{n-1}} \mathbf{x}_{n-1} - \dots - \frac{m_1}{M_{n-1}} \mathbf{x}_1 - \frac{m_0}{M_{n-1}} \mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

² Qui usiamo le stesse notazioni \mathbf{r} , \mathbf{p} che abbiamo introdotto per le coordinate eliocentriche. Naturalmente, è immediato osservare che non si tratta delle stesse coordinate. D'altra parte in tutti gli sviluppi successivi della teoria non si fa mai uso contemporaneo di ambedue i sistemi di coordinate, sicché non c'è rischio di confusione. Il lettore dovrebbe considerare questo paragrafo come del tutto indipendente dal precedente.

Si vede subito che si tratta di una trasformazione lineare, costruita mediante la matrice

$$(5.25) \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{m_0}{M_n} & \frac{m_1}{M_n} & \frac{m_2}{M_n} & \cdots & \frac{m_{n-1}}{M_n} & \frac{m_n}{M_n} \\ -\frac{m_0}{M_0} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{m_0}{M_1} & -\frac{m_1}{M_1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{m_0}{M_{n-2}} & -\frac{m_1}{M_{n-2}} & -\frac{m_2}{M_{n-2}} & \cdots & 1 & 0 \\ -\frac{m_0}{M_{n-1}} & -\frac{m_1}{M_{n-1}} & -\frac{m_2}{M_{n-1}} & \cdots & -\frac{m_{n-1}}{M_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} .$$

L'inversione della trasformazione richiede qualche calcolo. Si inizia col ricavare dalle (5.22) e (5.23) le relazioni tra le coordinate \mathbf{r}_k e i baricentri \mathbf{b}_k . L'equazione per \mathbf{r}_0 è banale. Per $k = 1, \dots, n$ si calcola

$$m_k \mathbf{r}_k = m_k \mathbf{x}_k - m_k \mathbf{b}_{k-1} = M_k \mathbf{b}_k - M_{k-1} \mathbf{b}_{k-1} - m_k \mathbf{b}_{k-1} .$$

Ricordando che $M_{k-1} + m_k = M_k$ si ottengono le relazioni

$$(5.26) \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{b}_n, \quad m_k \mathbf{r}_k = M_k (\mathbf{b}_k - \mathbf{b}_{k-1}), \quad k = 1, \dots, n .$$

Occorre ora invertire queste relazioni. Riscrivendo la seconda come

$$\mathbf{b}_{k-1} = \mathbf{b}_k - \frac{m_k}{M_k} \mathbf{r}_k$$

e procedendo per indici decrescenti si ricava facilmente

$$(5.27) \quad \begin{aligned} \mathbf{b}_n &= \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{b}_{n-1} &= \mathbf{r}_0 - \frac{m_n}{M_n} \mathbf{r}_n \\ \mathbf{b}_{n-2} &= \mathbf{r}_0 - \frac{m_{n-1}}{M_{n-1}} \mathbf{r}_{n-1} - \frac{m_n}{M_n} \mathbf{r}_n \\ &\dots \dots \\ \mathbf{b}_0 &= \mathbf{r}_0 - \frac{m_1}{M_1} \mathbf{r}_1 - \dots - \frac{m_{n-1}}{M_{n-1}} \mathbf{r}_{n-1} - \frac{m_n}{M_n} \mathbf{r}_n \end{aligned}$$

Sostituiamo ora queste ultime relazioni nella (5.22), che riscriviamo come

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_0, \quad m_k \mathbf{x}_k = M_k \mathbf{b}_k - M_{k-1} \mathbf{b}_{k-1}, \quad k = 1, \dots, n .$$

Dalla prima ricaviamo immediatamente

$$(5.28) \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{r}_0 - \frac{m_1}{M_1} \mathbf{r}_1 - \frac{m_2}{M_2} \mathbf{r}_2 - \dots - \frac{m_n}{M_n} \mathbf{r}_n .$$

Dalla seconda calcoliamo

$$\begin{aligned}
 m_k \mathbf{x}_k &= M_k \left(\mathbf{r}_0 - \frac{m_{k+1}}{M_{k+1}} \mathbf{r}_{k+1} - \dots - \frac{m_{n-1}}{M_{n-1}} \mathbf{r}_{n-1} - \frac{m_n}{M_n} \mathbf{r}_n \right) \\
 &\quad - M_{k-1} \left(\mathbf{r}_0 - \frac{m_k}{M_k} \mathbf{r}_{k+1} - \dots - \frac{m_{n-1}}{M_{n-1}} \mathbf{r}_{n-1} - \frac{m_n}{M_n} \mathbf{r}_n \right) \\
 &= (M_k - M_{k-1}) \mathbf{r}_0 + \frac{M_{k-1} m_k}{M_k} \mathbf{r}_k \\
 &\quad - \frac{(M_k - M_{k-1}) m_{k+1}}{M_{k+1}} \mathbf{r}_{k+1} - \dots - \frac{(M_k - M_{k-1}) m_n}{M_n} \mathbf{r}_n ,
 \end{aligned}$$

e ricordando che vale $M_k - M_{k-1} = m_k$ concludiamo

$$(5.29) \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{r}_0 + \frac{M_{k-1}}{M_k} \mathbf{r}_k - \frac{m_{k+1}}{M_{k+1}} \mathbf{r}_{k+1} - \dots - \frac{m_{n-1}}{M_{n-1}} \mathbf{r}_{n-1} - \frac{m_n}{M_n} \mathbf{r}_n ,$$

valida per $k = 1, \dots, n$. Grazie a quest'ultima formula ed alla (5.28) possiamo scrivere l'inversa della matrice \mathbf{J} :

$$(5.30) \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{m_1}{M_1} & -\frac{m_2}{M_2} & \dots & -\frac{m_{n-1}}{M_{n-1}} & -\frac{m_n}{M_n} \\ 1 & \frac{M_0}{M_1} & -\frac{m_2}{M_2} & \dots & -\frac{m_{n-1}}{M_{n-1}} & -\frac{m_n}{M_n} \\ 1 & 0 & \frac{M_1}{M_2} & \dots & -\frac{m_{n-1}}{M_{n-1}} & -\frac{m_n}{M_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \frac{M_{n-2}}{M_{n-1}} & -\frac{m_n}{M_n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{M_{n-1}}{M_n} \end{pmatrix} .$$

Ricordando il procedimento esposto nel paragrafo 5.1.1 scriviamo la trasformazione sui momenti mediante la matrice \mathbf{J}^\top , trasposta della (5.25), e otteniamo

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_0 &= \frac{m_0}{M_n} \mathbf{p}_0 - \frac{m_0}{M_0} \mathbf{p}_1 - \frac{m_0}{M_1} \mathbf{p}_2 - \dots - \frac{m_0}{M_{n-1}} \mathbf{p}_n , \\
 \mathbf{y}_1 &= \frac{m_1}{M_n} \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 - \frac{m_1}{M_1} \mathbf{p}_2 - \dots - \frac{m_1}{M_{n-1}} \mathbf{p}_n , \\
 \mathbf{y}_2 &= \frac{m_2}{M_n} \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_2 - \frac{m_2}{M_2} \mathbf{p}_3 - \dots - \frac{m_2}{M_{n-1}} \mathbf{p}_n , \\
 &\dots \dots \\
 \mathbf{y}_n &= \frac{m_n}{M_n} \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_n ,
 \end{aligned}$$

dove $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ sono i nuovi momenti, coniugati alle nuove coordinate $\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_n$. La trasformazione inversa si costruisce con la matrice $(\mathbf{J}^{-1})^\top$, trasposta della (5.30). Ai fini del calcolo che segue possiamo limitarci ad osservare che risulta

$$(5.32) \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{y}_0 + \dots + \mathbf{y}_n ,$$

sicché \mathbf{p}_0 è la quantità di moto totale.

5.3.1 Trasformazione dell'energia cinetica

L'energia cinetica in coordinate cartesiane in un sistema solidale con le stelle fisse è data dalla (5.2). Vogliamo scriverla nelle coordinate di Jacobi. A tal fine conviene riscrivere la trasformazione sui momenti nella forma più compatta

$$(5.33) \quad \begin{aligned} \mathbf{y}_0 &= \frac{m_0}{M_n} \mathbf{p}_0 - m_0 \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{p}_j}{M_{j-1}}, \\ \mathbf{y}_k &= \frac{m_k}{M_n} \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_k - m_k \sum_{j=k+1}^n \frac{\mathbf{p}_j}{M_{j-1}}, \quad k = 1, \dots, n; \end{aligned}$$

qui l'ultima somma si intende vuota quando $k = n$. L'energia cinetica si scrive dunque

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2m_0} \left(\frac{m_0}{M_n} \mathbf{p}_0 - m_0 \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{p}_j}{M_{j-1}} \right)^2 \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2m_k} \left(\frac{m_k}{M_n} \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_k - m_k \sum_{j=k+1}^n \frac{\mathbf{p}_j}{M_{j-1}} \right)^2. \end{aligned}$$

Spezziamo ora l'espressione dell'energia cinetica in tre parti scrivendo $T = \tilde{T} + T_0 + T_1$, raccogliendo in \tilde{T} i termini che dipendono da \mathbf{p}_0 , in T_0 i termini indipendenti da \mathbf{p}_0 ma in forma diagonale, e in T_1 i termini restanti. Vedremo poi che T_1 si annulla. Per la parte dipendente da \mathbf{p}_0 abbiamo

$$(5.34) \quad \tilde{T} = \frac{\mathbf{p}_0^2}{2M_n} - \sum_{k=0}^n \frac{m_k}{M_n} \sum_{j=k+1}^n \frac{\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_j}{M_{j-1}} + \frac{1}{M_n} \sum_{k=1}^n \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_k.$$

Per la parte diagonale abbiamo

$$T_0 = \sum_{k=0}^n \frac{m_k}{2} \sum_{j=k+1}^n \frac{\mathbf{p}_j^2}{M_{j-1}^2} + \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{p}_k^2}{2m_k}.$$

Il primo addendo del secondo membro si semplifica scambiando le somme, e si trova

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{m_k}{2} \right) \frac{\mathbf{p}_j^2}{M_{j-1}^2} = \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{p}_j^2}{2M_{j-1}}.$$

Sostituendolo nell'espressione di T_0 riportata sopra ed aggiungendo la seconda sommatoria si ottiene infine

$$(5.35) \quad T_0 = \sum_{j=1}^n \frac{M_j}{2m_j M_{j-1}} \mathbf{p}_j^2.$$

Raccogliamo ora i termini restanti, e abbiamo

$$T_1 = \sum_{k=0}^n m_k \sum_{j=k+1}^n \sum_{l=j+1}^n \frac{\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_l}{M_{j-1} M_{l-1}} - \sum_{k=1}^n \sum_{j=k+1}^n \frac{\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{p}_j}{M_{j-1}}.$$

Il primo addendo al secondo membro si rielabora con uno scambio di somme, e dà

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=0}^{j-1} m_k \right) \sum_{l=j+1}^n \frac{\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_l}{M_{j-1} M_{l-1}} = \sum_{j=1}^n \sum_{l=j+1}^n \frac{\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_l}{M_{l-1}},$$

e quest'ultima espressione si compensa col secondo addendo nell'espressione di T_1 , sicché si conclude $T_1 = 0$.

5.3.2 Lo sviluppo dell'energia potenziale

Veniamo ora al calcolo dell'energia potenziale, riferendoci alla formula (5.2) che riscriviamo per comodità

$$V = -\mathcal{G} \sum_{0 \leq j < k \leq n} \frac{m_j m_k}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|}.$$

Qui occorre esprimere le posizioni relative $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k$ in funzione delle coordinate di Jacobi. A tal fine conviene scrivere le (5.28) e (5.29) nella forma più compatta

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \mathbf{r}_0 - \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{M_j} \mathbf{r}_j \\ \mathbf{x}_k &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_k - \sum_{j=k}^n \frac{m_j}{M_j} \mathbf{r}_j, \quad k = 1, \dots, n \end{aligned}$$

(si noti che nella seconda riga è stato aggiunto e sottratto $m_k \mathbf{r}_k / M_k$). Si calcola allora facilmente

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0 &= \mathbf{r}_k + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{m_j}{M_j} \mathbf{r}_j, \quad 1 \leq k \leq n, \\ \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j &= \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j + \sum_{l=j}^{k-1} \frac{m_l}{M_l} \mathbf{r}_l, \quad 1 \leq j < k \leq n. \end{aligned} \tag{5.36}$$

L'energia potenziale si scrive sostituendo queste ultime espressioni nella (5.2) che abbiamo richiamato poco sopra. Si osserva immediatamente che nessuna di queste espressioni coinvolge \mathbf{r}_0 . Ne segue che \mathbf{r}_0 non compare nell'energia potenziale, e neppure nell'Hamiltoniana. Possiamo subito dedurre che \mathbf{p}_0 è costante del moto, il che non sorprende se si ricorda che esso altro non è che la quantità di moto totale. Di conseguenza nella scrittura dell'Hamiltoniana possiamo porre $\mathbf{p}_0 = 0$, ignorando così il termine \tilde{T} . In virtù di queste osservazioni possiamo affermare fin d'ora che l'Hamiltoniana avrà la forma $H = T_0 + V$, dove T_0 è data dalla (5.35), e V si ottiene sostituendo le (5.36) nella seconda delle (5.2). Si vede così che eliminando il baricentro \mathbf{r}_0 si è ridotto di 3 il numero di gradi di libertà.

Sarebbe ora utile isolare nell'energia potenziale una parte che descriva il solo moto kepleriano, così come abbiamo fatto in modo naturale per le coordinate eliocentriche. Ciò non è immediato, perché le posizioni reciproche dei pianeti, date dalle (5.36), non si scrivono semplicemente come differenze tra le coordinate di Jacobi. Si deve

ricorrere ad un procedimento un po' complesso, che richiede uno sviluppo nelle masse. Mostriamo come si possa ottenere tale sviluppo, calcolando esplicitamente i primi termini in funzione delle coordinate di Jacobi.

Prima di procedere al calcolo è opportuno sottolineare che quanto diremo da qui in avanti vale nell'ipotesi che m_0 sia preponderante rispetto alle altre masse m_1, \dots, m_n , e che le distanze tra i pianeti non diventino troppo piccole. La seconda condizione risulta vera nel caso del sistema solare quando si prendano in considerazione solo i pianeti, ignorando i satelliti.

Iniziamo col riscrivere le (5.36) nella forma generale

$$\Delta = \mathbf{R} + \mathbf{h} ,$$

dove Δ , \mathbf{R} e \mathbf{h} assumono volta per volta una forma appropriata: per la prima equazione si pone

$$\Delta = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0 , \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}_k , \quad \mathbf{h} = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{m_l}{M_l} \mathbf{r}_l ,$$

e per la seconda

$$\Delta = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j , \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j , \quad \mathbf{h} = \sum_{l=j}^{k-1} \frac{m_l}{M_l} \mathbf{r}_l .$$

La notazione che abbiamo introdotto vuole mettere in evidenza il fatto che nel caso planetario vale $\|\mathbf{h}\| \ll \|\mathbf{R}\|$. In effetti, ricordando che m_0 è la massa del Sole, si ha $M_j \simeq m_0$, sicché il rapporto m_j/M_j che compare a fattore di tutti i termini dell'espressione di \mathbf{h} risulta essere piccolo. Metteremo in evidenza questo fatto scrivendo

$$\frac{\|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{R}\|} \simeq \varepsilon \ll 1 .$$

Sotto questa ipotesi calcoliamo

$$\frac{1}{\|\Delta\|} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{R}^2 + 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h}^2}} = \frac{1}{\|\mathbf{R}\| \sqrt{1 + \frac{2\mathbf{R} \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{R}\|^2} + \frac{\mathbf{h}^2}{\|\mathbf{R}\|^2}}} .$$

Ricorriamo ora allo sviluppo dell'inverso della radice quadrata, che richiamiamo:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots ,$$

valido per $|x| < 1$ ed effettivamente utile per $|x| \ll 1$. Osservando che

$$\frac{2\mathbf{R} \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{R}\|^2} = O(\varepsilon) , \quad \frac{\mathbf{h}^2}{\|\mathbf{R}\|^2} = O(\varepsilon^2)$$

abbiamo

$$(5.37) \quad \frac{1}{\|\Delta\|} = \frac{1}{\|\mathbf{R}\|} \left[1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{R}\|^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{h}^2}{\|\mathbf{R}\|^2} - \frac{3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{h})^2}{\|\mathbf{R}\|^4} \right) + O(\varepsilon^3) \right] ,$$

dove abbiamo raccolto tra parentesi tonde i termini di ordine $O(\varepsilon^2)$. Scriviamo ora l'energia potenziale separando i termini che coinvolgono \mathbf{x}_0 dagli altri, e abbiamo

$$V = -\mathcal{G} \sum_{k=1}^n \frac{m_0 m_k}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\|} - \mathcal{G} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \frac{m_j m_k}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j\|} .$$

Da qui risulta subito evidente che il secondo addendo è $O(\varepsilon)$ rispetto al primo, dal momento che contiene il prodotto $m_j m_k$ di due masse piccole. Sostituiamo ora gli sviluppi (5.37) in quest'ultima espressione, assegnando a $\mathbf{\Delta}$, \mathbf{R} e \mathbf{h} delle espressioni appropriate, come spiegato poco sopra. Riordinando i termini per ordini di grandezza in ε otterremo uno sviluppo della forma $V = V_0 + V_1 + V_2 + \dots$, dove

$$\begin{aligned} V_0 &= -\mathcal{G} \sum_{k=1}^n \frac{m_0 m_k}{\|\mathbf{r}_k\|} , \\ V_1 &= -\mathcal{G} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \frac{m_j m_k}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\|} + \mathcal{G} \sum_{k=1}^n \frac{m_0 m_k}{\|\mathbf{r}_k\|^3} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{m_l}{M_l} \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_l , \\ V_2 &= \mathcal{G} \sum_{k=1}^n \frac{m_0 m_k}{2\|\mathbf{r}_k\|^3} \left[\left(\sum_{l=1}^{k-1} \frac{m_l}{M_l} \mathbf{r}_l \right)^2 - \frac{3}{\|\mathbf{r}_k\|^2} \left(\sum_{l=1}^{k-1} \frac{m_l}{M_l} \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_l \right)^2 \right] \\ &\quad + \mathcal{G} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \frac{m_j m_k}{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\|^3} \sum_{l=j}^{k-1} \frac{m_l}{M_l} (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{r}_l . \end{aligned} \tag{5.38}$$

e risulta $V_j = O(\varepsilon^j)$, nel senso spiegato sopra. Il calcolo svolto per ricavare i primi due termini mostra con evidenza quanto possa essere disagevole continuare lo sviluppo. In effetti, nella maggior parte dei casi ci si ferma a considerare il solo termine V_1 .

5.3.3 L'Hamiltoniana in coordinate di Jacobi

Seguendo un procedimento abituale in Meccanica Celeste possiamo infine scrivere l'espressione dell'Hamiltoniana nella forma

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots \tag{5.39}$$

dove

$$H_0 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{M_j}{2m_j M_{j-1}} \mathbf{p}_j^2 - \mathcal{G} \frac{m_0 m_j}{\|\mathbf{r}_j\|} \right) , \quad \varepsilon H_1 = V_1 , \quad \varepsilon^2 H_2 = V_2 , \quad \dots \tag{5.40}$$

Si vede bene che H_0 ha la forma di un'Hamiltoniana imperturbata che descrive l'approssimazione kepleriana del moto di n pianeti intorno ad un centro delle forze,³

³ In realtà si dovrebbe parlare di moto di ciascun pianeta rispetto al baricentro dei precedenti, nell'ordine in cui sono stati etichettati nell'assegnare le coordinate nel riferimento assoluto. Non si può dunque nemmeno affermare che il centro sia lo stesso per tutti i pianeti, anche se ciò resta vero nell'approssimazione in cui le masse dei pianeti possano considerarsi trascurabili.

mentre i termini restanti rappresentano la perturbazione sviluppata nelle masse. È d'uso includere il fattore ε con potenze crescenti, non solo per mettere ben in evidenza i vari ordini perturbativi, ma anche perché la stragrande maggioranza delle trattazioni classiche procede per serie sviluppate in serie di potenze del parametro ε .

Nello scrivere l'Hamiltoniana abbiamo rimosso il contributo \tilde{T} , assumendo il baricentro fisso e quindi $\mathbf{p}_0 = 0$. Vediamo così che il contributo dell'energia cinetica si riduce al solo termine diagonale T_0 . Si elimina dunque quel neo che rendeva particolarmente sgradite agli astronomi le coordinate eliocentriche.

In compenso, l'energia potenziale assume una forma sensibilmente più complessa: per scriverla in modo completo occorre uno sviluppo in serie delle masse, non necessario per le coordinate eliocentriche.

Tralasciamo la scrittura delle equazioni, in quanto non serviranno nel resto di queste note. Osserviamo invece che, grazie a quanto esposto nel paragrafo 5.1.1, anche in questo caso l'espressione del momento angolare resta

$$\mathbf{\Gamma} = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \wedge \mathbf{p}_j .$$

5.4 L'approssimazione kepleriana e la funzione perturbatrice

Le due forme che abbiamo dato all'Hamiltoniana dopo l'eliminazione del baricentro costituiscono un buon punto di partenza per lo sviluppo della teoria dei moti planetari. A ben vedere, questa affermazione non trova grande giustificazione nello sviluppo storico delle nostre conoscenze: Lagrange e Laplace hanno fatto uso degli elementi orbitali, senza alcun riferimento al formalismo canonico.⁴ Il loro metodo è rimasto nella tradizione della Meccanica Celeste: se ne fa uso ad esempio nel trattato classico di Tisserand^[123], o anche nel trattato più recente di Brouwer e Clemence^[15]. Lo stesso Poincaré del resto, pur facendo del formalismo hamiltoniano lo strumento principe dei suoi lavori, dedica alcuni paragrafi delle *Leçons de Mécanique céleste* proprio alla scrittura delle equazioni per gli elementi orbitali.

Il primo problema che si pone è di dare alla funzione perturbatrice una forma adatta alla ricerca delle soluzioni: si tratta in pratica di scriverne lo sviluppo in variabili adatte. È appena il caso di sottolineare che non esiste una forma unica per questi sviluppi: se ne possono trovare numerosissime varianti, ed è impossibile elencarle tutte, anche perché ciascuna di esse richiederebbe un buon numero di pagine. Si deve anche aggiungere che l'epoca dei calcolatori ha segnato anche in questo campo una piccola rivoluzione: quegli sviluppi che in passato occupavano una parte considerevole del tempo di matematici particolarmente abili nel calcolo algebrico e dotati di costanza

⁴ In realtà le equazioni nella forma che oggi chiamiamo canonica compaiono già nella *Mécanique analytique* di Lagrange ([79], seconde partie, cinquième section; si veda anche [119]). Ciò che mancava era il contesto formale che sarebbe stato sviluppato mezzo secolo dopo.

e determinazione sono diventati oggi accessibili a chi abbia la pazienza di mettere a punto algoritmi appropriati, spesso ispirati direttamente ai metodi tradizionali, e tradurli in programmi che eseguano gli sviluppi al calcolatore.

5.4.1 Il moto imperturbato

Esaminiamo anzitutto il problema imperturbato, ove abbiamo

$$(5.41) \quad H_0 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\mathbf{p}_j^2}{2\mu_j} - \mathcal{G} \frac{(m_0 + m_j)\mu_j}{\|\mathbf{r}_j\|} \right)$$

nel caso delle variabili eliocentriche, oppure

$$(5.42) \quad H_0 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{M_j}{2m_j M_{j-1}} \mathbf{p}_j^2 - \mathcal{G} \frac{m_0 m_j}{\|\mathbf{r}_j\|} \right)$$

nel caso delle coordinate di Jacobi.

Come ben si vede, la differenza formale tra i due casi si riduce unicamente a delle costanti che dipendono dalle masse. In particolare il termine di energia potenziale è di fatto lo stesso in ambedue i casi, mentre il coefficiente della parte cinetica nel caso delle variabili eliocentriche può scriversi $\frac{M_{j-1}+m_j}{M_{j-1}m_j}$, che è in pratica la massa ridotta del j -esimo pianeta calcolata rispetto alla massa totale M_j invece che rispetto ad m_0 . L'aspetto geometrico è più nascosto. Nel caso delle variabili eliocentriche \mathbf{r}_j rappresenta la posizione del pianeta rispetto al Sole, quindi i centri delle orbite, visti nelle coordinate di un sistema di riferimento solidale con le stelle fisse, coincidono. Nel caso delle coordinate di Jacobi \mathbf{r}_j rappresenta la posizione del pianeta j -esimo rispetto al baricentro del Sole e dei $j-1$ pianeti che lo precedono nella numerazione che abbiamo scelto, e quindi i centri delle orbite si trovano in punti diversi nel riferimento delle stelle fisse. Ciò appare un po' sgradevole e confuso, ma non dimentichiamo che si tratta di differenze di ordine ε , che possiamo ben accettare.

Convieni qui rendere uniformi le notazioni, riscrivendo l'Hamiltoniana per il moto kepleriano come

$$(5.43) \quad H_{\text{Kep}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{Km}{r}, \quad r = \|\mathbf{r}\|.$$

Nel caso delle coordinate eliocentriche potremo ritrovare la (5.41) sostituendo m e K rispettivamente con

$$(5.44) \quad m \rightarrow \mu_j, \quad K \rightarrow \mathcal{G}(m_0 + m_j).$$

Nel caso delle coordinate di Jacobi la sostituzione diventa

$$(5.45) \quad m \rightarrow \frac{m_j M_{j-1}}{M_j}, \quad K \rightarrow \mathcal{G}m_0.$$

Richiamiamo ora le variabili di Delaunay, che abbiamo dedotto nel paragrafo 4.6,

scritte con le costanti m , K :

$$(5.46) \quad \begin{aligned} L &= m\sqrt{Ka} \quad , & \ell &= n(t - \tau) \quad (\text{anomalia media}) \quad , \\ G &= L\sqrt{1 - e^2} \quad , & g &= \omega \quad (\text{argomento del perielio}) \quad , \\ \Theta &= G \cos \iota \quad , & \vartheta &= \Omega \quad (\text{longitudine del nodo}) \quad . \end{aligned}$$

Richiamiamo anche gli elementi orbitali

$$(5.47) \quad \begin{aligned} a & \quad \text{semiasse maggiore} \quad , & \ell & \quad \text{anomalia media} \quad , \\ e & \quad \text{eccentricità} \quad , & \omega & \quad \text{argomento del perielio} \quad , \\ \iota & \quad \text{inclinazione} \quad , & \Omega & \quad \text{longitudine del nodo} \quad . \end{aligned}$$

A tutte queste variabili, così come alle costanti m e K , aggiungeremo un indice j quando faremo riferimento al pianeta j -esimo.

Ricordiamo infine che nelle variabili di Delaunay l'Hamiltoniana imperturbata assume la forma particolarmente semplice

$$(5.48) \quad H_0 = - \sum_{j=1}^n \frac{m_j K_j^2}{2L_j^2} .$$

Le equazioni di moto corrispondenti sono

$$(5.49) \quad \begin{aligned} \dot{\ell}_j &= \frac{m_j K_j^2}{L_j^3} \quad , & \dot{L}_j &= 0 \quad , \\ \dot{g}_j &= 0 \quad , & \dot{G}_j &= 0 \quad , \\ \dot{\vartheta}_j &= 0 \quad , & \dot{\Theta}_j &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Per ricavare il movimento nelle variabili originarie occorre svolgere ancora un po' di calcoli.

- (i) Ricavare gli elementi orbitali invertendo le relazioni (5.46); ciò non implica particolari difficoltà, tenuto conto che ℓ è proprio uno degli elementi orbitali, e che tutti gli altri risultano essere comunque costanti.
- (ii) Ricavare l'anomalia eccentrica u tramite l'anomalia media. A tale scopo un metodo classico consiste nel far uso degli sviluppi in eccentricità che abbiamo discusso, ad esempio, nei paragrafi 1.3.4 o 1.3.5.
- (iii) Dette ξ_j , η_j le coordinate cartesiane del pianeta nel piano dell'orbita, con l'asse ξ_j allineato col perielio (e quindi ignorando per il momento gli elementi ι , ω , Ω), calcolarle come funzioni degli elementi orbitali a , e , ℓ . A tale scopo occorre ricondursi alle formule che abbiamo ricavato nel paragrafo 1.4.1, e che qui richiamiamo:

$$(5.50) \quad \begin{aligned} \xi_j &= a_j(\cos u_j - e_j) \quad , & \dot{\xi}_j &= -\frac{2\pi\sqrt{K_j m_j a_j}}{r} \sin u_j \quad , \\ \eta_j &= a_j\sqrt{1 - e_j^2} \sin u_j \quad , & \dot{\eta}_j &= \frac{2\pi\sqrt{K_j m_j a_j(1 - e_j^2)}}{r_j} \cos u_j \quad , \end{aligned}$$

dove

$$(5.51) \quad r_j = a_j(1 - e_j \cos u_j) .$$

(iv) Applicare la rotazione che tiene conto degli elementi orbitali ι, ω, Ω , come descritto nel paragrafo 1.4.3, in modo da calcolare le coordinate \mathbf{r}_j .

(v) Applicare la trasformazione (5.11) per le coordinate eliocentriche, oppure la (5.29) per le coordinate di Jacobi.

Come ben si vede, si tratta di un procedimento abbastanza laborioso, ma non particolarmente difficile.

5.4.2 Cenni allo sviluppo della funzione perturbatrice

Diamo qui solo alcuni cenni generali. Il problema che si pone è scrivere la funzione perturbatrice non solo in variabili più adatte di quelle cartesiane (ad esempio quelle di Delaunay), ma anche in una forma che ne consenta l'utilizzo per il calcolo effettivo di soluzioni almeno approssimate delle equazioni di moto. A questo scopo è più utile far uso delle variabili di Delaunay modificate oppure di quelle di Poincaré. Richiamiamo qui le formule che abbiamo introdotto nel paragrafo 4.6.5. Le variabili di Delaunay modificate sono

$$(5.52) \quad \begin{aligned} \Lambda_j &= L_j , & \lambda_j &= \ell_j + g_j + \vartheta_j , \\ P_j &= L_j - G_j = L_j \left(1 - \sqrt{1 - e_j^2} \right) , & p_j &= -g_j - \vartheta_j , \\ Q_j &= G_j - \Theta_j = 2G_j \sin^2 \frac{\iota_j}{2} , & q_j &= -\vartheta_j . \end{aligned}$$

Gli angoli sono ancora periodici con periodo 2π . Il nuovo angolo λ che sostituisce l'anomalia media viene chiamato *longitudine media*; l'angolo p che sostituisce l'argomento del perielio viene detto *longitudine del perielio*. Le variabili di Poincaré ξ, η sostituiscono le P, p, Q, q , e sono definite come

$$(5.53) \quad \begin{aligned} \xi_j &= \sqrt{2P_j} \cos p_j , & \eta_j &= \sqrt{2P_j} \sin p_j \\ \xi_{j+n} &= \sqrt{2Q_j} \cos q_j , & \eta_{j+n} &= \sqrt{2Q_j} \sin q_j \end{aligned}$$

Si noti che le variabili ξ, η sono $2n$. Va da sé che l'Hamiltoniana imperturbata in variabili di Delaunay modificate o in variabili di Poincaré ha ancora la forma (5.48), salvo l'ovvia sostituzione di L con Λ .

L'ovvia osservazione è che ci si attende che la funzione perturbatrice risulti essere funzione periodica degli angoli λ, p, q . In linea di principio dunque dovrebbe essere possibile darne lo sviluppo in serie di Fourier degli angoli stessi. Di fatto si può fare di più:

- (i) *la funzione perturbatrice risulta essere olomorfa sia nelle variabili di Delaunay modificate che in quelle di Poincaré;*
- (ii) *in variabili di Delaunay modificate la funzione perturbatrice risulta essere una serie di Fourier degli angoli λ, p, q , con coefficienti che sono polinomiali in $P^{1/2}, Q^{1/2}$, mentre la dipendenza da Λ rimane generica;*

- (iii) *in variabili di Poincaré la funzione perturbatrice risulta essere una serie di Fourier negli angoli λ , con coefficienti polinomiali in ξ, η , mentre la dipendenza da Λ rimane generica.*

Per la discussione di queste proprietà rimandiamo alle *Leçons de Mécanique céleste* di Poincaré ([105], ch. III, § 64–73 e ch. IV, § 83–88).

Le proprietà enunciate sopra possono esprimersi in formule, in modo alquanto sintetico, come segue. Denotiamo con $\mathbf{\alpha}, \mathbf{\beta} \in \mathbb{Z}_+^n$ dei vettori a componenti intere non negative (gli esponenti dei monomi), e con $\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^n$ dei vettori a componenti intere. Usiamo inoltre la notazione multindice

$$\mathbf{P}^{\mathbf{\alpha}/2} = P_1^{\alpha_1/2} \cdot \dots \cdot P_n^{\alpha_n/2}, \quad \mathbf{Q}^{\mathbf{\beta}/2} = Q_1^{\beta_1/2} \cdot \dots \cdot Q_n^{\beta_n/2}$$

e la notazione, ad esempio,

$$\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n$$

per la combinazione a coefficienti interi di angoli.

In variabili di Delaunay modificate la funzione perturbatrice ha la forma

$$(5.54) \quad H_1 = \sum_{\mathbf{\alpha}, \mathbf{\beta} \in \mathbb{Z}_+^n} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{\alpha}, \mathbf{\beta}, \mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s}}(\boldsymbol{\Lambda}) \mathbf{P}^{\mathbf{\alpha}/2} \mathbf{Q}^{\mathbf{\beta}/2} \exp(i\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda} \rangle + i\langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle + i\langle \mathbf{s}, \mathbf{q} \rangle) .$$

In variabili di Poincaré la funzione perturbatrice ha la forma (con notazioni analoghe e a questo punto ovvie)

$$(5.55) \quad H_1 = \sum_{\mathbf{\alpha}, \mathbf{\beta} \in \mathbb{Z}_+^{2n}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{\alpha}, \mathbf{\beta}, \mathbf{k}}(\boldsymbol{\Lambda}) \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{\alpha}} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{\beta}} \exp(i\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda} \rangle) .$$

Le funzioni $c_{\mathbf{\alpha}, \mathbf{\beta}, \mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s}}(\boldsymbol{\Lambda})$ o, rispettivamente, $c_{\mathbf{\alpha}, \mathbf{\beta}, \mathbf{k}}(\boldsymbol{\Lambda})$ si devono determinare col calcolo. Le serie sono uniformemente convergenti per tutti i valori degli angoli, per P, Q, ξ, η in un intorno dell'origine, e per Λ in un opportuno dominio da determinarsi.

Aggiungiamo, come ulteriore osservazione, che nel caso delle coordinate di Jacobi si ha anche uno sviluppo in potenze del piccolo parametro ε , benché questo venga tipicamente trascurato.

5.4.3 Le caratteristiche di D'Alembert

A parziale consolazione degli astronomi, le serie trigonometriche risultanti dagli sviluppi non contengono tutte le possibili combinazioni di angoli: queste sono soggette a regole di selezione che vengono comunemente dette *caratteristiche di D'Alembert*. Passiamo ad enunciarle.

- (i) *Nella (5.54) (variabili di Delaunay modificate) valgono le proprietà:*
- (i.a) *I coefficienti $c_{\mathbf{\alpha}, \mathbf{\beta}, \mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s}}(\boldsymbol{\Lambda})$ sono reali, ed inoltre soddisfano le proprietà $c_{\mathbf{\alpha}, \mathbf{\beta}, \mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s}}(\boldsymbol{\Lambda}) = c_{\mathbf{\alpha}, \mathbf{\beta}, -\mathbf{k}, -\mathbf{m}, -\mathbf{s}}(\boldsymbol{\Lambda})$; pertanto gli sviluppi contengono solo coseni degli angoli.*
 - (i.b) $\sum_{j=1}^n (k_j - m_j - s_j) = 0$;
 - (i.c) *la somma $\beta_1 + \dots + \beta_n$ è un numero pari;*

- (i.d) per $j = 1, \dots, n$ vale $|m_j| \leq \alpha_j$ e $|s_j| \leq \beta_j$, e inoltre m_j ha la stessa parità di α_j e s_j ha la stessa parità di β_j ; in altre parole, m_j può assumere solo i valori $-\alpha_j, -\alpha_j + 2, \dots, \alpha_j - 2, \alpha_j$, e analogamente s_j può assumere solo i valori $-\beta_j, -\beta_j + 2, \dots, \beta_j - 2, \beta_j$.
- (ii) Nella (5.55) (variabili di Poincaré) valgono le proprietà:
- (ii.a) I coefficienti $c_{\alpha, \beta, \mathbf{k}}(\Lambda)$ sono complessi, e inoltre soddisfano le proprietà $c_{\alpha, \beta, \mathbf{k}}(\Lambda) = c_{\alpha, \beta, -\mathbf{k}}^*(\Lambda)$; pertanto i termini con $|\beta|$ dispari contengono seni degli angoli, e quelli con $|\beta|$ pari contengono i coseni.
- (ii.b) la somma $\alpha_{n+1} + \dots + \alpha_{2n} + \beta_{n+1} + \dots + \beta_{2n}$ è un numero pari;
- (ii.c) la somma $k_1 + \dots + k_n$ non supera $\alpha_1 + \dots + \alpha_{2n} + \beta_1 + \dots + \beta_{2n}$, e le due somme hanno la stessa parità.

Veniamo alla dimostrazione di queste proprietà, rimandando per una discussione completa ai paragrafi delle *Leçons de mécanique céleste* di Poincaré citati poco sopra.

La proprietà (i.d) richiederebbe una discussione piuttosto lunga. Si tratta in effetti di dimostrare che la funzione perturbatrice può svilupparsi in serie di potenze della variabili ξ, η in un intorno di $\xi = \eta = 0$. Omettiamo questa parte della dimostrazione, rimandando al trattato di Poincaré. Accettato questo punto, occorre rendersi conto che un monomio nelle variabili ξ, η sotto la trasformazione (5.53) diventa un'espressione in P, p, Q, q che soddisfa la (i.d), e viceversa. Ciò si verifica facilmente considerando una sola variabile. Infatti, consideriamo i monomi $\xi_1^{\alpha_1}$ e $\eta_1^{\beta_1}$, e applichiamo la trasformazione (5.53). Otterremo

$$\xi_1^{\alpha_1} = 2^{\alpha_1/2} P_1^{\alpha_1/2} \cos^{\alpha_1} p_1, \quad \eta_1^{\beta_1} = 2^{\beta_1/2} P_1^{\beta_1/2} \sin^{\beta_1} p_1.$$

Ora, è noto dalla trigonometria che le potenze $\cos^k \vartheta$ e $\sin^k \vartheta$ possono esprimersi come somme del tipo⁵

$$a_{-k} \frac{\cos}{\sin}(-k\vartheta) + a_{-k+2} \frac{\cos}{\sin}(-k+2)\vartheta + \dots + a_{k-2} \frac{\cos}{\sin}(k-2)\vartheta + a_k \frac{\cos}{\sin} k\vartheta,$$

⁵ Per verificarlo basta espandere le potenze nelle espressioni $\cos^n \vartheta = 2^{-n}(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta})^n$ e $\cos^n \vartheta = (2i)^{-n}(e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta})^n$, e riscrivere il risultato in termini di funzioni trigonometriche. Si ricavano così le formule

$$\sin^{2n} \vartheta = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \binom{2n}{k} \cos 2(n-k)\vartheta$$

$$\sin^{2n-1} \vartheta = \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+k-1} \binom{2n-1}{k} \sin(2n-2k-1)\vartheta$$

$$\cos^{2n} \vartheta = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cos 2(n-k)\vartheta$$

$$\cos^{2n-1} \vartheta = \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} \cos(2n-2k-1)\vartheta$$

con opportuni coefficienti a_{-k}, \dots, a_k e con opportune scelte delle funzioni seno e coseno. Si vede dunque che la proprietà (i.d) vale per monomi di questo genere. Per il prodotto $\xi^\alpha \eta^\beta$ di monomi dello stesso tipo basta applicare le formule trigonometriche di somma e si verifica rapidamente che la proprietà continua a valere. Viceversa, con argomenti simili si mostra che espressioni del tipo $P_1^{\alpha_1/2} \cos k_1 p_1$ o $P_1^{\beta_1/2} \sin k_1 p_1$ dove α_1, β_1 e k_1 soddisfano la proprietà (i.d) possono esprimersi come polinomi in ξ_1, η_1 , e che lo stesso vale per prodotti di espressioni di questo tipo. La verifica completa è laboriosa, ma non difficile.

Le proprietà (i.a), (i.b), (i.c), (ii.a) e (ii.b) si deducono da considerazioni di simmetria, che passiamo a discutere.

Osserviamo innanzitutto che l'Hamiltoniana deve essere una funzione reale. Di conseguenza, isolando i termini $\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s}$ e $-\mathbf{k}, -\mathbf{m}, -\mathbf{s}$ nello sviluppo (5.54) della funzione perturbatrice la quantità

$$c_{\alpha, \beta, \mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s}}(\Lambda) \exp(i\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda} \rangle + i\langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle + i\langle \mathbf{s}, \mathbf{q} \rangle) \\ + c_{\alpha, \beta, -\mathbf{k}, -\mathbf{m}, -\mathbf{s}}(\Lambda) \exp(-i\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda} \rangle - i\langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle - i\langle \mathbf{s}, \mathbf{q} \rangle)$$

deve essere reale. Separando le parti reali e immaginarie riscriviamo quest'ultima espressione come

$$[\operatorname{Re} c_{\alpha, \beta, \mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s}}(\Lambda) + \operatorname{Re} c_{\alpha, \beta, -\mathbf{k}, -\mathbf{m}, -\mathbf{s}}(\Lambda)] \cos(\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda} \rangle + \langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{s}, \mathbf{q} \rangle) \\ - [\operatorname{Im} c_{\alpha, \beta, \mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s}}(\Lambda) - \operatorname{Im} c_{\alpha, \beta, -\mathbf{k}, -\mathbf{m}, -\mathbf{s}}(\Lambda)] \sin(\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda} \rangle + \langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{s}, \mathbf{q} \rangle) \\ + i [\operatorname{Re} c_{\alpha, \beta, \mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s}}(\Lambda) - \operatorname{Re} c_{\alpha, \beta, -\mathbf{k}, -\mathbf{m}, -\mathbf{s}}(\Lambda)] \sin(\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda} \rangle + \langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{s}, \mathbf{q} \rangle) \\ + i [\operatorname{Im} c_{\alpha, \beta, \mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s}}(\Lambda) + \operatorname{Im} c_{\alpha, \beta, -\mathbf{k}, -\mathbf{m}, -\mathbf{s}}(\Lambda)] \cos(\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda} \rangle + \langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{s}, \mathbf{q} \rangle) ,$$

e imponendo che la parte immaginaria si annulli otteniamo

$$\operatorname{Re} c_{\alpha, \beta, \mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s}}(\Lambda) - \operatorname{Re} c_{\alpha, \beta, -\mathbf{k}, -\mathbf{m}, -\mathbf{s}}(\Lambda) = 0 \\ \operatorname{Im} c_{\alpha, \beta, \mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s}}(\Lambda) + \operatorname{Im} c_{\alpha, \beta, -\mathbf{k}, -\mathbf{m}, -\mathbf{s}}(\Lambda) = 0 ,$$

ovvero, in forma più compatta e denotando con un asterisco il complesso coniugato,

$$(5.56) \quad c_{\alpha, \beta, -\mathbf{k}, -\mathbf{m}, -\mathbf{s}}(\Lambda) = c_{\alpha, \beta, \mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{s}}^*(\Lambda) .$$

Per le funzioni $c_{\alpha, \beta, \mathbf{k}}(\Lambda)$ si applica lo stesso argomento, e si ottiene

$$(5.57) \quad c_{\alpha, \beta, -\mathbf{k}}(\Lambda) = c_{\alpha, \beta, \mathbf{k}}^*(\Lambda) .$$

Quest'ultima formula è la proprietà (ii.a).

Consideriamo ora le orbite kepleriane degli n pianeti descritte dall'Hamiltoniana imperturbata. Consideriamo poi un sistema di riferimento cartesiano x, y, z solidale con le stelle fisse.⁶

⁶ La scelta comune consiste nel prendere il piano dell'eclittica come piano x, y . Ciò solleva qualche problema perché questo piano si muove lentamente rispetto alle stelle fisse, dal momento che l'inclinazione dell'orbita terrestre non è costante. A questo si rimedia facendo riferimento al piano ad una data fissata. Un'altra scelta possibile consiste nel prendere l'asse z diretto come il momento angolare, e il piano x, y ortogonale ad esso.

Supponiamo di ruotare le orbite di un angolo δ arbitrario rispetto all'asse z . Una tale operazione lascia invariante l'Hamiltoniana, dal momento che essa dipende solo dalle norme e dai prodotti scalari dei vettori che identificano le posizioni e le velocità dei pianeti. Notiamo che una tale operazione incrementa di δ la longitudine del nodo Ω , lasciando invariati sia l'argomento del perielio ω che l'anomalia media ℓ . Venendo agli angoli nelle variabili di Delaunay, incluse quelle modificate, e richiamando le (5.46) e (5.52), abbiamo

$$\begin{aligned} \ell &\rightarrow \ell, & g &\rightarrow g, & \vartheta &\rightarrow \vartheta + \delta, \\ \lambda &\rightarrow \lambda + \delta, & p &\rightarrow p - \delta, & q &\rightarrow q - \delta. \end{aligned}$$

Perché l'Hamiltoniana in variabili di Delaunay modificate resti invariante occorre che nell'espressione (5.54) della funzione perturbatrice si abbia

$$(k_1 + \dots + k_n)\delta - (m_1 + \dots + m_n)\delta - (s_1 + \dots + s_n)\delta = 0$$

qualunque sia δ , e questo implica $\sum_{j=1}^n (k_j - m_j - s_j) = 0$, come affermato dalla proprietà (i.b).

Supponiamo ora di applicare a tutte le orbite una riflessione rispetto al piano x, z , sicché le coordinate di ciascun pianeta cambiano, con ovvie notazioni, da $(r_{j,x}, r_{j,y}, r_{j,z})$ a $(r_{j,x}, -r_{j,y}, r_{j,z})$. Anche questa trasformazione lascia invariata l'Hamiltoniana. Con un attimo di riflessione si comprende che questa operazione cambia il segno degli angoli Ω, ω, ℓ , e procedendo come sopra abbiamo

$$\begin{aligned} \ell &\rightarrow -\ell, & g &\rightarrow -g, & \vartheta &\rightarrow -\vartheta, \\ \lambda &\rightarrow -\lambda, & p &\rightarrow -p, & q &\rightarrow -q. \end{aligned}$$

In virtù dell'invarianza dell'Hamiltoniana, quando si riordinano i termini delle (5.54) e (5.55) in modo da far comparire le funzioni trigonometriche degli angoli, come abbiamo fatto poco sopra, si devono ottenere espressioni che non mutano cambiando di segno di tutti gli angoli, e dunque devono apparire solo coseni delle combinazioni di angoli. Di conseguenza nelle (5.56) e (5.57) si devono annullare le parti immaginarie dei coefficienti $c_{\alpha, \beta, k, m, s}$. Questo è quanto affermato dalla proprietà (i.a).

Supponiamo infine di applicare a tutte le orbite una riflessione rispetto al piano x, y , sicché le coordinate di ciascun pianeta cambiano, con ovvie notazioni, da $(r_{j,x}, r_{j,y}, r_{j,z})$ a $(r_{j,x}, r_{j,y}, -r_{j,z})$. Anche questa trasformazione lascia invariata l'Hamiltoniana. Con un attimo di riflessione si comprende che questa operazione scambia il nodo ascendente dell'orbita con quello discendente, il che significa che Ω deve essere sostituito con $\Omega + \pi$, e di conseguenza ω deve essere sostituito con $\omega + \pi$, mentre ℓ resta invariato. In variabili canoniche abbiamo

$$\begin{aligned} \ell &\rightarrow \ell, & g &\rightarrow g - \pi, & \vartheta &\rightarrow \vartheta + \pi, \\ \lambda &\rightarrow \lambda, & p &\rightarrow p, & q &\rightarrow q - \pi. \end{aligned}$$

In virtù dell'invarianza dell'Hamiltoniana, nella (5.54) si deve avere

$$(s_1 + \dots + s_n)\pi = 0 \pmod{2\pi},$$

Il pregio di questo riferimento è che resta fisso; il difetto è che non è facile identificarlo sulla sfera celeste, se non riferendosi ad esempio al piano dell'eclittica.

e quindi la somma $s_1 + \dots + s_n$ deve essere pari. Per la proprietà (i.d) allora anche la somma $\beta_1 + \dots + \beta_n$ deve essere pari, dovendo avere la stessa parità di $s_1 + \dots + s_n$. Eseguendo la trasformazione alle variabili di Poincaré si trova che deve valere anche la proprietà (ii.b).

Infine la proprietà (ii.c) segue direttamente dalle (i.b) e (i.d).

5.4.4 Integrali primi

Sappiamo che l'Hamiltoniana deve ammettere l'integrale primo del momento angolare. Nel seguito sarà utile averne l'espressione nei vari sistemi di coordinate che stiamo considerando. Per trovare tali espressioni partiamo dalle variabili di Delaunay, e consideriamo un sistema di riferimento solidale con le stelle fisse. Denotiamo con $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z)$ le componenti del momento angolare in tale sistema di riferimento. Riferiamoci per il momento ad un solo pianeta: in seguito ci basterà aggiungere un indice alle varie quantità e sommare, ove richiesto.

Dalla costruzione delle variabili di Delaunay si ricava direttamente

$$(5.58) \quad \Gamma_x = G \sin \iota \sin \vartheta, \quad \Gamma_y = -G \sin \iota \cos \vartheta, \quad \Gamma_z = G \cos \iota.$$

Ciò segue ricordando che per costruzione $G = \|\mathbf{\Gamma}\|$ è il modulo del momento angolare, e che il piano dell'orbita è perpendicolare a $\mathbf{\Gamma}$. L'angolo tra $\mathbf{\Gamma}$ e l'asse z è l'inclinazione ι , e da qui segue l'espressione di Γ_z . Inoltre l'angolo ϑ delle variabili di Delaunay è la longitudine del nodo, e l'asse dei nodi è ortogonale sia a $\mathbf{\Gamma}$ che all'asse z . Dunque la proiezione del momento angolare sul piano x, y del riferimento assoluto è ortogonale all'asse dei nodi, e da qui si ricava l'espressione delle componenti Γ_x, Γ_y . Per scrivere il momento angolare in variabili di Delaunay dobbiamo solo osservare che $\cos \iota = \Theta/G$, ed otteniamo facilmente

$$(5.59) \quad \Gamma_x = \sqrt{G^2 - \Theta^2} \sin \vartheta, \quad \Gamma_y = -\sqrt{G^2 - \Theta^2} \cos \vartheta, \quad \Gamma_z = \Theta.$$

Per passare alle variabili di Delaunay modificate occorre invertire le relazioni (5.52), ottenendo

$$\begin{aligned} L &= \Lambda, & \ell &= \lambda + p, \\ G &= \Lambda - P, & g &= -p + q, \\ \Theta &= \Lambda - P - Q, & \vartheta &= -q. \end{aligned}$$

Per sostituzione nelle (5.59) si ricava

$$(5.60) \quad \begin{aligned} \Gamma_x &= -\sqrt{2Q} \sin q \sqrt{\Lambda - P - \frac{Q}{2}}, \\ \Gamma_y &= -\sqrt{2Q} \cos q \sqrt{\Lambda - P - \frac{Q}{2}}, \\ \Gamma_z &= \Lambda - P - Q. \end{aligned}$$

Quest'ultima formula si riscrive facilmente in variabili di Poincaré.

5.4.5 Le orbite osculatrici

Veniamo ora al problema di determinare il moto perturbato. Il procedimento che illustriamo è dovuto, in sostanza, a Lagrange, e si ricollega al metodo della variazione delle costanti.

Il problema è descrivere il movimento determinato dalle equazioni complete. Riferendoci ad esempio al caso delle variabili eliocentriche, si nota subito che le equazioni corrette, che abbiamo scritto nella (5.19), non possono descrivere un'orbita kepleriana. Si osserva però che il termine che tiene conto dell'interazione tra i pianeti, nelle ipotesi che abbiamo assunto, risulta essere piccolo. Del resto, abbiamo già fatto uso di questa informazione per affermare, sia pure appellandoci più all'intuizione che al rigore matematico, che il moto reale sarà presumibilmente distinguibile da quello kepleriano solo sulla base di osservazioni condotte per tempi dell'ordine di secoli: quanto infatti è storicamente avvenuto. Ci proponiamo ora di rendere più precisa la nostra analisi.

Nella trattazione classica si introduce il concetto di *ellisse osculatrice*.⁷ Supponiamo che ad un dato istante t_0 si possano spegnere improvvisamente tutte le interazioni tra i pianeti, sicché l'Hamiltoniana del nostro sistema si riduce al solo termine H_0 . Da quel momento in poi ciascun pianeta si muoverà su un'orbita kepleriana, alla quale corrispondono degli elementi orbitali $a_j(t_0)$, $e_j(t_0)$, &c in linea di principio ben definiti, e che siamo in grado di calcolare se conosciamo posizione e velocità istantanee di ciascun pianeta. L'ellisse percorsa dal pianeta a partire da quel momento viene detta appunto *ellisse osculatrice* all'istante t_0 . Il moto reale di un pianeta ben si guarderà dal seguire quell'ellisse, ma se pensiamo di ripetere il procedimento ad un istante $t_1 = t_0 + \tau$, considerando τ come un piccolo incremento di tempo, otterremo dei nuovi elementi orbitali $a_j(t_1)$, $e_j(t_1)$, &c diversi dai precedenti, che descrivono una nuova ellisse osculatrice. Quanto abbiamo detto del resto corrisponde alla pratica: le tavole delle effemeridi riportano proprio gli elementi orbitali a tempi assegnati, e di tanto in tanto devono essere aggiornate proprio per tener conto delle piccole variazioni delle orbite.⁸

⁷ L'aggettivo *osculatore*, dal latino *osculare* che significa baciare, è spesso usato in geometria per descrivere la tangenza tra curve o superfici, o in qualche modo una proprietà che rende due curve o superfici localmente molto vicine, sì da poterle praticamente identificare.

⁸ Il lettore osserverà che il concetto di ellisse osculatrice non è certo definito in modo intrinseco, in quanto dipende dalle coordinate. In altre parole, se si riportano in un riferimento solidale con le stelle fisse l'ellisse osculatrice ricavata in coordinate eliocentriche e quella ricavata in coordinate di Jacobi le due figure non coincidono. In effetti, l'approssimazione del moto imperturbato in coordinate eliocentriche è un'ellisse con fuoco nel Sole; in coordinate di Jacobi invece si ha un'ellisse con fuoco nel baricentro di un sottosistema formato dal Sole e da alcuni pianeti, che non coincide col Sole. Questa osservazione condurrebbe in modo naturale a preferire il sistema di coordinate eliocentrico, dal momento che gli elementi che vengono pubblicati nelle tavole delle effemeridi sono riferiti al Sole. Non si capirebbe dunque perchè gli astronomi del passato abbiano sistematicamente preferito le coordinate di Jacobi. Il motivo è da ricercarsi in un'osservazione

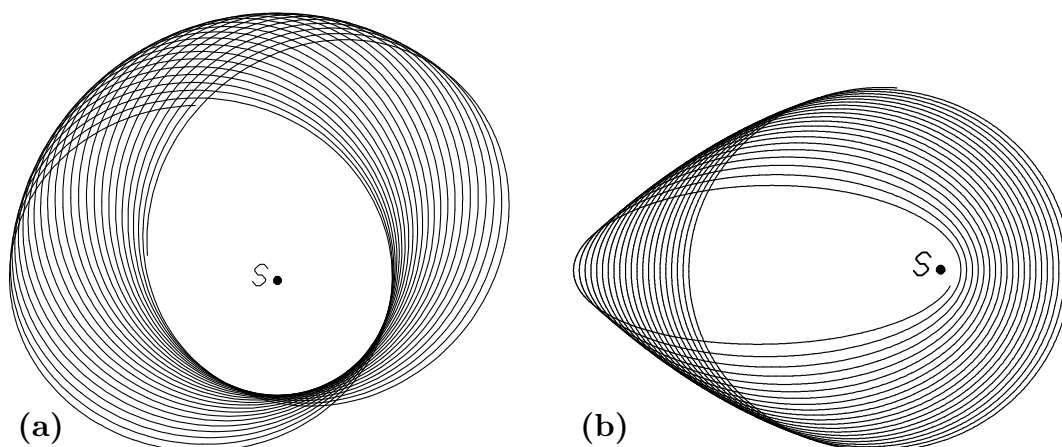


Figura 5.2. L'orbita di un pianeta nel caso di variazioni sistematiche ed uniformi nel tempo dell'argomento del perielio o dell'eccentricità. **(a)** L'incremento regolare dell'argomento del perielio si traduce in un moto di precessione, come se l'ellisse ruotasse lentamente. Tale fenomeno si verifica effettivamente per i pianeti. **(b)** L'incremento regolare dell'eccentricità rende l'orbita sempre più schiacciata, e allontana sempre più il fuoco (la posizione del Sole, denotata con S) dal centro dell'ellisse, sicché il pianeta finirebbe per cadere sul Sole. Fortunatamente questo non accade per i pianeti: le variazioni di eccentricità ci sono, ma sono limitate. Naturalmente la velocità della variazione degli elementi orbitali è stata esagerata al fine di produrre una figura comprensibile: nella realtà le variazioni sono molto più lente.

I procedimenti perturbativi si fondano sulla congettura che le variazioni delle ellissi osculatrici siano lente e regolari. In altre parole, si descrive il movimento dei pianeti pensando a delle ellissi i cui parametri variano lentamente nel tempo. Ad esempio, una variazione lenta ma sistematica del solo argomento del perielio, mantenendo costanti gli altri elementi, produrrebbe un'orbita effettiva del tipo riportato nel riquadro (a) della figura 5.2. Analogamente, una variazione sistematica della sola eccentricità potrebbe produrre un'orbita del tipo rappresentato nel riquadro (b) della figura 5.2.

che abbiamo già fatto, ma che in questo contesto diventa più comprensibile. I momenti nel sistema eliocentrico non sono proporzionali alle derivate temporali delle coordinate, e quindi l'ellisse osculatrice definita tramite quelle coordinate non è tangente all'orbita reale, ma forma con essa un angolo piccolissimo, di ordine almeno ε . Le coordinate di Jacobi non presentano questo neo, e apparentemente gli astronomi classici tolleravano meglio il fatto che il fuoco delle ellissi non fosse esattamente nel Sole. Ma, nota Poincaré ([105], chap. IV, § 77), non bisogna esagerare l'importanza di queste osservazioni: lo stesso spezzamento dell'Hamiltoniana in una parte imperturbata ed una perturbazione è in una certa misura arbitrario, e del resto la stessa definizione delle coordinate di Jacobi dipende dall'ordine in cui vengono numerati i pianeti (è più ragionevole assegnare l'indice 1 a Mercurio, che è il pianeta più vicino al Sole, o a Giove, che è quello con massa maggiore?). Le ellissi osculatrici che si ottengono seguendo procedimenti diversi di eliminazione del baricentro differiscono tra loro di una quantità di ordine almeno ε .

In termini matematici più precisi, si suppone che gli elementi orbitali siano funzioni $a(t)$, $e(t)$, $\iota(t)$, $\omega(t)$, $\Omega(t)$ le cui derivate siano almeno di ordine $O(\varepsilon)$. La *teoria delle perturbazioni secolari*, iniziata con i lavori di Lagrange e Laplace, cerca di rispondere a questa domanda. Entreremo più avanti nel dettaglio del calcolo.

