

8

IL PROBLEMA GENERALE DEI TRE CORPI

Nella sua forma più generale il *problema dei tre corpi*, definito da Whittaker “*the most celebrated of all dynamical problems*”, si enuncia come segue:

Tre masse puntiformi, libere di muoversi nello spazio, si attraggono reciprocamente secondo la legge newtoniana di gravitazione. Si chiede di determinarne il movimento per qualunque configurazione e velocità iniziale.

Rispetto al modello ristretto trattato nel capitolo 7 si supera l'approssimazione in cui si ignora l'azione del più piccolo dei tre corpi sui due primari.

Il primo enunciato del problema dei tre corpi si trova nei *Principia* di Newton (Liber I, Prop. LXVI, Theor. XXVI). Qui Newton prende in esame il caso di due corpi che orbitano intorno a uno di massa maggiore. Newton riprende l'argomento nel libro terzo (Prop. XXV–XXXV), dove cerca di determinare le deviazioni dal moto ellittico dell'orbita lunare.

Nel secolo XVIII il problema posto da Newton venne ripreso e riformulato in termini di equazioni differenziali. Nel 1747 Alexis Clairaut e Jean le Rond D'Alembert presentarono all'Académie Royale des Science due memorie intese a calcolare la precessione dell'apogeo lunare [23] [30]. Ambedue, pur lavorando ciascuno all'insaputa dell'altro (questo almeno è quanto ambedue precisano accuratamente), danno praticamente la stessa valutazione, che però non concorda con i dati astronomici. Da qui una lunga discussione di Clairaut sull'opportunità di modificare leggermente la legge di gravitazione di Newton introducendo termini correttivi, ad esempio dipendenti dall'inverso del cubo o della quarta potenza della distanza, la cui influenza sia significativa in vicinanza del corpo attrattore e diventi trascurabile a grandi distanze. Ma l'impresa di trovare questi termini presentava difficoltà insormontabili, e non venne portata a termine.

Diversi anni dopo, in due brevi memorie presentate nel 1763 all'Accademia di S. Pietroburgo [37] e nel 1765 all'Accademia di Berlino [38] Eulero prese in esame un modello semplificato assumendo che il moto fosse rettilineo. Le soluzioni collineari del problema dei tre corpi sono descritte in quelle memorie. Pur riconoscendo che si

trattava di un problema privo di applicazione pratica, egli sottolineò la sua rilevanza come primo passo verso la ricerca di una soluzione generale. La sua conclusione fu che una tale soluzione era ancora al di fuori della portata dei metodi da lui sviluppati, e richiedeva idee nuove.

La prima memoria di ampio respiro è dovuta a Lagrange [75], pubblicata nel 1772. Egli vi affrontò il problema nella forma più generale scrivendo delle equazioni per le distanze mutue dei corpi, e trovandone delle soluzioni particolari. Tra queste si trovano le soluzioni triangolari. A proposito di queste ultime egli annota che si tratta di una pura curiosità, ma comunque meritevole di essere menzionata vista la difficoltà di risolvere il problema in modo completo. La storia si è incaricata di mostrare che si tratta invece di soluzioni che hanno una rilevanza non banale nella dinamica degli asteroidi detti *Troiani*, che si trovano appunto in librazione in prossimità dei punti triangolari Lagrangiani del sistema Sole–Giove. Le soluzioni di Eulero e Lagrange saranno oggetto di discussione in questo capitolo.

La non esistenza di integrali primi del problema dei tre corpi diversi da quelli classici (quantità di moto totale, momento della quantità di moto ed energia) è stata stabilita alla fine del secolo XIX da Bruns [16] e Poincaré [103]. Nella memoria del 1889 il problema dei tre corpi costituisce la motivazione per uno studio ampio e profondamente innovativo della dinamica di sistemi Hamiltoniani. Il numero impressionante di nuovi risultati ivi raccolti valse a Poincaré il premio bandito per il 60–mo compleanno del Re di Svezia Oscar II.¹ Il contenuto della memoria venne poi ripreso e ampliato considerevolmente dallo stesso Poincaré nei tre volumi del trattato *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste* [104].

I teoremi di Poincaré e Bruns portano a concludere che il problema dei tre corpi non è integrabile. L'affermazione però è ambigua e, in un certo senso, discutibile. Ancora una volta, bisogna accordarsi sul significato dell'aggettivo *integrabile*. Se lo interpretiamo nel senso di Arnold–Jost dobbiamo stabilire l'esistenza di variabili d'angolo–azione; da qui seguirebbe l'affermazione che la dinamica è quasi periodica e le orbite giacciono su tori invarianti, come descritto nel paragrafo 4.5. Un tal risultato è escluso da Poincaré: nella memoria [103] e in forma più ampia nei tre volumi [104] si mostra l'esistenza di *orbite asintotiche*, non esprimibili come combinazioni di moti periodici. Ancor più rilevante (e decisamente sorprendente per l'epoca in cui furono pubblicati quegli studi) è l'esistenza di *intersezioni omocline* che generano una dinamica caotica.

Se invece si estende il significato di *integrabile* alla possibilità di scrivere le soluzioni come funzioni analitiche allora diventa rilevante il lavoro di Sundman: vi si dimostra la possibilità di scrivere le soluzioni sotto forma di serie convergenti, valide per tutti i tempi. Non si tratta però di soluzioni quasi periodiche: si ammette anche la possibilità di collisioni che vengono gestite grazie ai metodi di regolarizzazione di Levi–Civita. Il capitolo presente, dopo la discussione generale delle soluzioni di Eulero e Lagrange, è dedicato a una prima analisi del fenomeno della collisione. I risultati di Levi–Civita e Sundman saranno esposti nel prossimo capitolo.

¹ Per un'ampia ricostruzione storica della vicenda del premio si veda [7]. Un'esposizione alquanto breve è riportata in [49].

8.1 Gli equilibri di Eulero e Lagrange

Prima di procedere, fissiamo alcune notazioni che verranno usate nel resto del capitolo. Denotiamo con A, B, C le posizioni dei tre corpi nello spazio e con m_A, m_B, m_C le loro masse. Denotiamo inoltre con $M = m_A + m_B + m_C$ la massa totale del sistema.

Il primo passo consiste nel mostrare che le soluzioni collineari e triangolari che abbiamo visto esistere nel caso del problema ristretto esistono anche nel caso generale. La discussione di questo paragrafo mostra come l'interesse per tali soluzioni non si limiti al caso di una forza di tipo Newtoniano.² Consideriamo il problema seguente:

Supponiamo che i tre corpi interagiscano tra loro a due a due mediante una forza di tipo attrattivo proporzionale al prodotto delle masse e decrescente in modo monotono con la distanza. Si chiede se esistano soluzioni per cui la posizione relativa dei tre corpi resti fissa.

In termini più precisi, denotando con $r > 0$ la distanza tra due corpi di massa m e m' , assumeremo che l'intensità della forza possa scriversi come $mm'\varphi(r)$, con una funzione $\varphi(r)$ a valori reali positivi, continua e decrescente in modo monotono al crescere di r . Non è strettamente richiesto che la forza si annulli per $r \rightarrow +\infty$, né che diventi infinita per $r \rightarrow 0^+$, come accade nel caso della forza gravitazionale.³

Sappiamo dai teoremi generali sulla Meccanica che il baricentro del sistema si muove di moto uniforme, e possiamo sempre scegliere un sistema di coordinate solidale con esso. È inoltre evidente, per ovvie ragioni di simmetria, che soluzioni di equilibrio relativo come quelle cercate siano necessariamente tali che i tre corpi occupino posizioni fisse in un sistema di riferimento ruotante uniformemente attorno al baricentro sicché il moto risulta essere piano. Si vede bene che si tratta di movimenti del tutto simili a quelli che abbiamo visto nel caso del problema circolare ristretto.

8.1.1 Gli equilibri collineari di Eulero

Cominciamo a discutere gli equilibri collineari. Disponiamo i tre corpi sulla retta, come in figura 8.1. Sia O il baricentro del sistema, che assumiamo come origine della retta, e denotiamo con x_A, x_B, x_C le coordinate dei punti. Notiamo fin d'ora che la

² Il lettore osserverà che in questo paragrafo si fa ampio uso di metodi geometrici classici. Trovo interessante il fatto che risultati eleganti come quelli di Eulero e Lagrange possano ricavarsi con metodi simili a quelli che si trovano nei testi classici di Copernico, Keplero, Galileo, Newton, oltre che dei loro predecessori e contemporanei. Nel seguito, a partire dal paragrafo 8.2, tornerò a far uso di metodi analitici o algebrici, certamente più familiari al giorno d'oggi. Gli equilibri relativi trattati in questo paragrafo appariranno come casi particolari di soluzioni omografiche.

³ Molti dei risultati in questo paragrafo valgono in realtà anche se si assumono ipotesi più generali sulla funzione $\varphi(r)$, ad esempio di una forza non strettamente decrescente con la distanza, o anche crescente. Tuttavia le ipotesi fatte qui, oltre a essere naturali se si vuole studiare un modello che descriva la dinamica di un sistema di punti materiali, semplificano la discussione in alcuni punti, in particolare riguardo all'unicità delle soluzioni trovate. Il lettore non avrà difficoltà a studiare altri casi, se lo desidera.

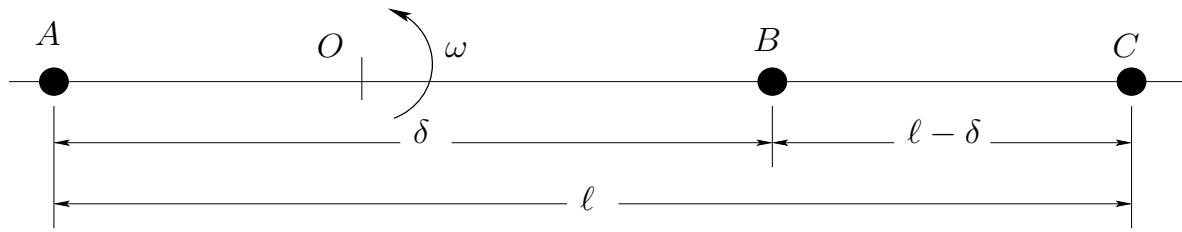


Figura 8.1. Il caso degli equilibri collineari. I tre corpi sono ordinati sulla retta. L'origine è fissata nel baricentro O . Le distanze rilevanti sono $|AB| = \delta$ e $|AC| = \ell$, da cui segue $|BC| = \ell - \delta$. Si assume che la retta ruoti intorno al baricentro a velocità angolare ω costante, e si cerca una soluzione tale che δ , ℓ , e quindi anche $\ell - \delta$, restino costanti.

disposizione dei punti è del tutto arbitraria, e possiamo permutarli arbitrariamente con un banale cambio di etichette. È conveniente anche introdurre le quantità positive

$$(8.1) \quad \ell = x_C - x_A, \quad \delta = x_B - x_A, \quad \ell - \delta = x_C - x_B.$$

Dal momento che i corpi sono allineati sia le forze attrattive che le forze centrifughe sono parallele, quindi possono equilibrarsi a condizione che le distanze $\delta = |AB|$, $\ell = |AC|$ e $\ell - \delta = |BC|$ e la velocità angolare ω soddisfino opportune relazioni, che dobbiamo stabilire.

Dobbiamo premettere l'equazione del baricentro, che si scrive

$$(8.2) \quad m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C = 0.$$

La condizione di equilibrio si scrive annullando la somma della forza centrifuga e della forza di interazione agenti su ciascun corpo. Scriviamo così il sistema di tre equazioni

$$(8.3) \quad \begin{aligned} \omega^2 x_A + m_B \varphi(\delta) + m_C \varphi(\ell) &= 0 \\ \omega^2 x_B - m_A \varphi(\delta) + m_C \varphi(\ell - \delta) &= 0 \\ \omega^2 x_C - m_A \varphi(\ell) - m_B \varphi(\ell - \delta) &= 0. \end{aligned}$$

Queste tre equazioni non sono indipendenti, perché deve valere l'equazione del baricentro (8.2), che possiamo sostituire a una di esse. Meglio, le possiamo ricondurre a un sistema di due sole equazioni sottraendo la prima dalla seconda e la seconda dalla terza, così da rimuovere la dipendenza da x_A , x_B , x_C e mantenere le sole distanze realmente significative. Abbiamo così il sistema di due equazioni

$$(8.4) \quad \begin{aligned} \omega^2 \delta &= (m_A + m_B) \varphi(\delta) - m_C [\varphi(\ell - \delta) - \varphi(\ell)] \\ \omega^2 (\ell - \delta) &= (m_B + m_C) \varphi(\ell - \delta) - m_A [\varphi(\delta) - \varphi(\ell)], \end{aligned}$$

Qui le incognite sono le tre quantità ω , δ , ℓ . Possiamo eliminare ω moltiplicando la prima equazione per $\ell - \delta$ e la seconda per δ , e sottraendo membro a membro. Abbiamo così

$$\begin{aligned} (m_A + m_B)(\ell - \delta) \varphi(\delta) - m_C (\ell - \delta) [\varphi(\ell - \delta) - \varphi(\ell)] \\ = (m_B + m_C) \delta \varphi(\ell - \delta) - m_A \delta [\varphi(\delta) - \varphi(\ell)], \end{aligned}$$

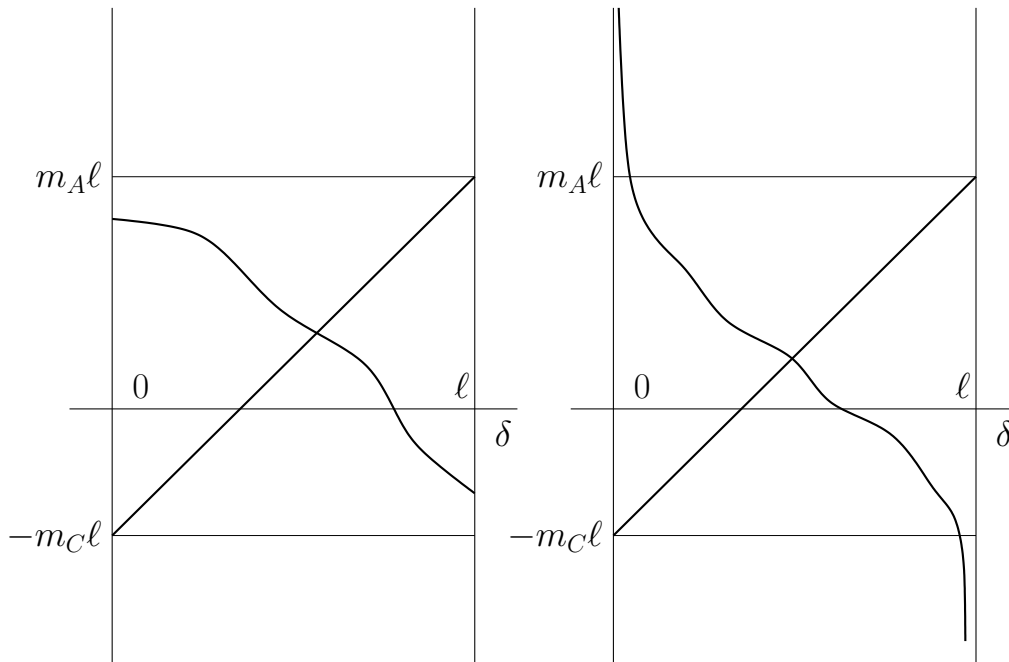


Figura 8.2. A illustrazione della ricerca della soluzione dell'equazione (8.5) per le soluzioni collineari. A sinistra: il caso di una forza la cui intensità tende a un valore finito quando si annulla la distanza tra i corpi. A destra il caso di una forza che diventa infinita all'annullarsi della distanza.

ovvero, riordinando i termini in modo da portare tutte le funzioni φ a sinistra,

$$(8.5) \quad \frac{[m_A \ell + m_B(\ell - \delta)]\varphi(\delta) - (m_B \delta + m_C \ell)\varphi(\ell - \delta)}{\varphi(\ell)} = m_A \delta - m_C(\ell - \delta).$$

Mostriamo che per ℓ fissato questa equazione ammette un'unica soluzione nell'intervallo $0 < \delta < \ell$, sicché possiamo determinare δ come funzione di ℓ . Facciamo riferimento alla figura 8.2. Il grafico del membro di destra è una retta che agli estremi dell'intervallo $[0, \ell]$ assume i valori $-m_C \ell$ e $m_A \ell$. Vediamo ora il comportamento qualitativo della funzione a sinistra, ricordando che abbiamo assunto come ipotesi che $\varphi(r)$ per $r > 0$ sia una funzione continua e monotona decrescente. Con una breve riflessione si mettono in evidenza i fatti seguenti.⁴

- (i) La funzione $[m_A \ell + m_B(\ell - \delta)]\varphi(\delta)$ è continua e monotona decrescente in δ ; per $\delta \rightarrow 0^+$ tende a un valore positivo, eventualmente $+\infty$, e in $\delta = \ell$ assume il valore $m_A \ell \varphi(\ell)$.
- (ii) La funzione $(m_B \delta + m_C \ell)\varphi(\ell - \delta)$ è continua e monotona crescente in δ ; per $\delta \rightarrow \ell^-$ tende a un valore positivo, eventualmente $+\infty$, e in $\delta = 0$ assume il valore $m_C \ell \varphi(\ell)$. Notiamo però che questa funzione compare con segno negativo al numeratore, e viene sottratta da quella del punto (i).
- (iii) Il membro di sinistra della (8.5) è una funzione monotona decrescente di δ che

⁴ Qui si fa uso dell'ipotesi che la forza decresce in modo monotono con la distanza.

per $\delta \rightarrow 0^+$ tende a un valore maggiore di $-m_C\ell$, e per $\delta \rightarrow \ell^-$ tende a un valore minore di $m_A\ell$, e pertanto interseca la retta del membro di destra in un unico punto, come illustrato in figura 8.2.

Avendo così determinato δ come funzione di ℓ possiamo calcolare ω mediante una delle (8.4), oppure mediante l'equazione

$$(8.6) \quad \omega^2\ell = m_B[\varphi(\delta) + \varphi(\ell - \delta)] + (m_A + m_C)\varphi(\ell),$$

ottenuta sommando membro a membro le due equazioni (8.4). Se ci interessa anche trovare le coordinate x_A, x_B, x_C rispetto al baricentro come funzioni di δ, ℓ possiamo far uso della relazione del baricentro. Ricordando che $m_A + m_B + m_C = M$, basta sommare e sottrarre a quell'equazione, rispettivamente, $(m_B + m_C)x_A, (m_A + m_C)x_B$ e $(m_A + m_B)x_C$, e otteniamo

$$(8.7) \quad Mx_A = -m_B\delta - m_C\ell, \quad Mx_B = m_A\delta - m_C(\ell - \delta), \quad Mx_C = m_B\ell + m_C(\ell - \delta).$$

Permutando ciclicamente⁵ le posizioni relative dei tre corpi concludiamo che:

Esistono tre famiglie di configurazioni di equilibrio relativo in cui i tre corpi sono allineati su una retta che ruota a velocità angolare uniforme attorno al baricentro, e mantengono costanti le distanze mutue.

Ciascuna delle tre famiglie è parametrizzata dalla distanza ℓ tra i due corpi esterni. Le distanze δ e $\ell - \delta$ tra i due corpi esterni e il corpo centrale sono date dalla soluzione dell'equazione (8.5), e la velocità angolare ω di rotazione del riferimento è determinata a meno del segno dalla (8.6).

8.1.2 Gli equilibri triangolari di Lagrange

Supponiamo ora che i corpi non siano allineati. Se i tre corpi sono in equilibrio relativo ciascuno di essi è soggetto alla forza attrattiva degli altri due e alla forza centrifuga, e queste forze devono equilibrarsi. Si noti che non c'è contributo dovuto al termine di Coriolis dell'accelerazione, perché i corpi sono fermi nel sistema rotante.

Mostriamo anzitutto che se esiste una configurazione di equilibrio relativo allora i tre corpi devono trovarsi ai vertici di un triangolo equilatero. Poi determineremo la relazione tra la velocità angolare di rotazione del sistema e il lato ℓ del triangolo che effettivamente realizzano l'equilibrio cercato.

Consideriamo la forza centrifuga \mathbf{G} che agisce sul punto C . Riferendoci alla figura 8.3, mostriamo che le componenti g_A e g_B della forza centrifuga \mathbf{G} nelle direzioni dei lati AC a BC soddisfano la relazione

$$(8.8) \quad \frac{g_A}{g_B} = \frac{m_A}{m_B} \cdot \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Sia O il baricentro dell'intero sistema, e sia D il baricentro dei due corpi A, B . Conduciamo per D le rette DE e DF , parallele rispettivamente ai lati BC e AC del

⁵ Le permutazioni possibili sono 6, ma le tre apparentemente mancanti si ottengono ruotando il sistema di un angolo π nel piano delle orbite, sicché ciascuna di esse è riconducibile a una delle tre permutazioni cicliche.

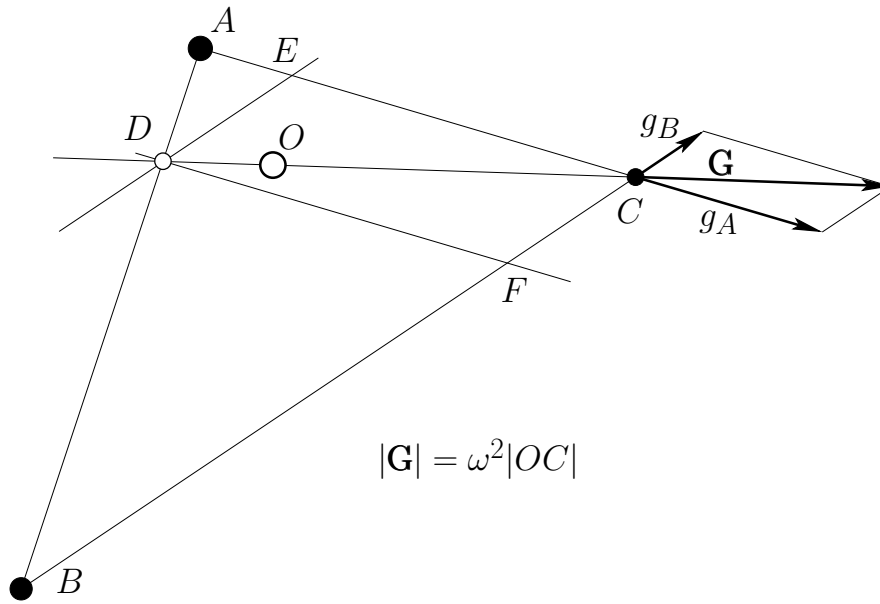


Figura 8.3. La forza centrifuga in una configurazione triangolare qualsiasi. Il punto O rappresenta il baricentro del sistema, e il punto D rappresenta il baricentro dei corpi A, B . Se l'intero sistema ruota con velocità angolare ω intorno al baricentro la forza centrifuga agente sul corpo C ha intensità $|\mathbf{G}| = \omega^2 |OC|$, ed è diretta con la retta DC . Le componenti di \mathbf{G} lungo le direzioni dei lati AC e BC sono proporzionali rispettivamente a $|DF|$ e $|DE|$, per la similitudine tra parallelogrammi che segue direttamente dalla costruzione.

triangolo. In tal modo abbiamo costruito i triangoli BDF e DAE che sono simili al triangolo ABC , avendo i lati a due a due paralleli. Mostriamo che questo implica che valga la relazione

$$(8.9) \quad \frac{|DF|}{|DE|} = \frac{|DB|}{|DA|} \cdot \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Infatti, per la similitudine dei triangoli si ricavano subito le relazioni

$$\frac{|DF|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|AB|}, \quad \frac{|DE|}{|DA|} = \frac{|BC|}{|AB|}.$$

Dividendo membro a membro e spostando opportunamente i fattori si ottiene la (8.9). Osserviamo poi che, essendo D il baricentro dei corpi A, B , per la definizione stessa di baricentro si ha $m_A |DA| = m_B |DB|$, sicché la relazione (8.9) può riscriversi come

$$\frac{|DF|}{|DE|} = \frac{m_A}{m_B} \cdot \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Osserviamo infine che le componenti g_A e g_B della forza centrifuga \mathbf{G} nelle direzioni dei lati AC e BC sono rispettivamente proporzionali a $|DF|$ e $|DE|$, sicché esse soddisfano la relazione (8.8), come asserito. Permutando ciclicamente i simboli si ricavano direttamente relazioni analoghe anche per la forza centrifuga agente sui punti A e B .

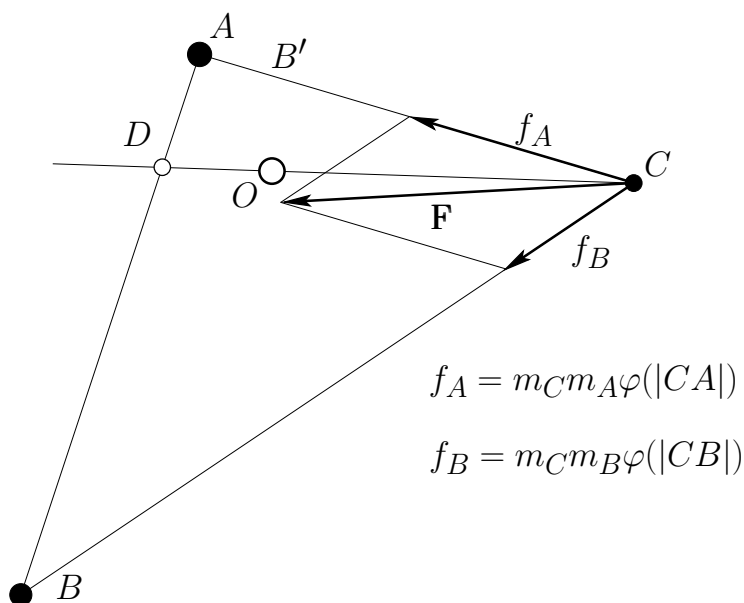


Figura 8.4. La forza attrattiva in una configurazione angolare qualsiasi. Sul corpo C agiscono le componenti di intensità $f_A = m_C m_A \varphi(|CA|)$ e $f_B = m_C m_B \varphi(|CB|)$, dirette rispettivamente verso i corpi A e B . La composizione dà una forza che in generale non è diretta verso il baricentro.

Veniamo ora alla forza di attrazione esercitata dai corpi A , B su C , rappresentata in figura 8.4. Per le ipotesi fatte, le componenti della forza \mathbf{F} nelle direzioni dei lati AC e BC hanno rispettivamente intensità $f_A = m_C m_A \varphi(|AC|)$ e $f_B = m_C m_B \varphi(|BC|)$, e quindi stanno nel rapporto

$$\frac{f_A}{f_B} = \frac{m_A}{m_B} \cdot \frac{\varphi(|AC|)}{\varphi(|BC|)}.$$

Ora, perché la forza attrattiva \mathbf{F} possa equilibrare la forza centrifuga \mathbf{G} è necessario che \mathbf{F} e \mathbf{G} siano paralleli, e dunque, ricordando la (8.8), deve valere l'eguaglianza

$$\frac{\varphi(|AC|)}{\varphi(|BC|)} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Avendo assunto per ipotesi che l'intensità della forza sia funzione strettamente monotona decrescente della distanza questo può verificarsi solo se $|AC| = |BC|$. Infatti, supponendo $|AC| < |BC|$ si ha $\varphi(|AC|) > \varphi(|BC|)$, mentre se $|AC| > |BC|$ si ha $\varphi(|AC|) < \varphi(|BC|)$. Poiché l'argomento si applica tale e quale permutando ciclicamente i punti, concludiamo che una configurazione di equilibrio relativo può esistere solo se il triangolo ABC è equilatero.

Dobbiamo ora verificare che tale soluzione esiste effettivamente. A tal fine dobbiamo trovare la relazione tra il lato ℓ del triangolo equilatero formato dai tre corpi e la velocità angolare ω .

Denotiamo con \mathbf{G}_A , \mathbf{G}_B , \mathbf{G}_C la forza centrifuga agente su ciascuno dei tre corpi A , B , C e con \mathbf{F}_A , \mathbf{F}_B , \mathbf{F}_C la forza attrattiva totale. Osserviamo che devono valere le

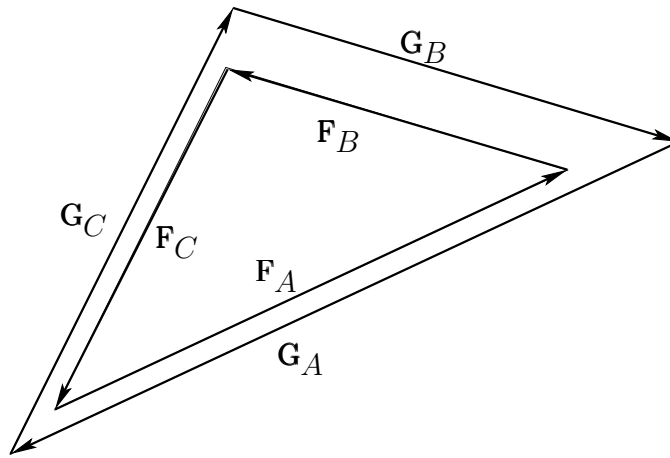


Figura 8.5. Le forze centrifughe e le forze attrattive agenti sui tre corpi formano due triangoli simili.

relazioni

$$\mathbf{G}_A + \mathbf{G}_B + \mathbf{G}_C = 0, \quad \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C = 0,$$

e anche

$$\mathbf{G}_A \parallel \mathbf{F}_A, \quad \mathbf{G}_B \parallel \mathbf{F}_B, \quad \mathbf{G}_C \parallel \mathbf{F}_C.$$

Possiamo interpretare queste relazioni geometriche dicendo che i vettori $\mathbf{G}_A, \mathbf{G}_B, \mathbf{G}_C$ possono disporsi in modo da formare i lati di un triangolo, e lo stesso vale per i vettori $\mathbf{F}_A, \mathbf{F}_B, \mathbf{F}_C$, e che i due triangoli così costruiti sono simili, come rappresentato in figura 8.5. Ne seguono le relazioni di proporzionalità

$$(8.10) \quad \frac{|\mathbf{F}_A|}{|\mathbf{G}_A|} = \frac{|\mathbf{F}_B|}{|\mathbf{G}_B|} = \frac{|\mathbf{F}_C|}{|\mathbf{G}_C|}.$$

Perché esista una configurazione di equilibrio triangolare occorre che siano soddisfatte le eguaglianze

$$|\mathbf{F}_A| = |\mathbf{G}_A|, \quad |\mathbf{F}_B| = |\mathbf{G}_B|, \quad |\mathbf{F}_C| = |\mathbf{G}_C|,$$

ma in virtù della (8.10) basta che sia soddisfatta una di esse perché lo siano automaticamente anche le altre. Prendiamo in considerazione la terza eguaglianza facendo riferimento alla figura 8.6. Ricordiamo che le componenti della forza attrattiva \mathbf{F}_C nelle direzioni dei lati AC e BC hanno intensità $f_A = m_A m_C \varphi(\ell)$ e $f_B = m_B m_C \varphi(\ell)$, dove ℓ è il lato del triangolo. Grazie alla formula di Carnot abbiamo

$$(8.11) \quad |\mathbf{F}_C| = m_C \varphi(\ell) \sqrt{m_A^2 + m_B^2 + m_A m_B}.$$

Mostriamo che per la forza centrifuga abbiamo

$$(8.12) \quad |\mathbf{G}_C| = \frac{m_C \omega^2 \ell}{M} \sqrt{m_A^2 + m_B^2 + m_A m_B}, \quad M = m_A + m_B + m_C.$$

La verifica richiede un breve calcolo. Partiamo dalla formula nota

$$|\mathbf{G}_C| = m_C \omega^2 |OC|,$$

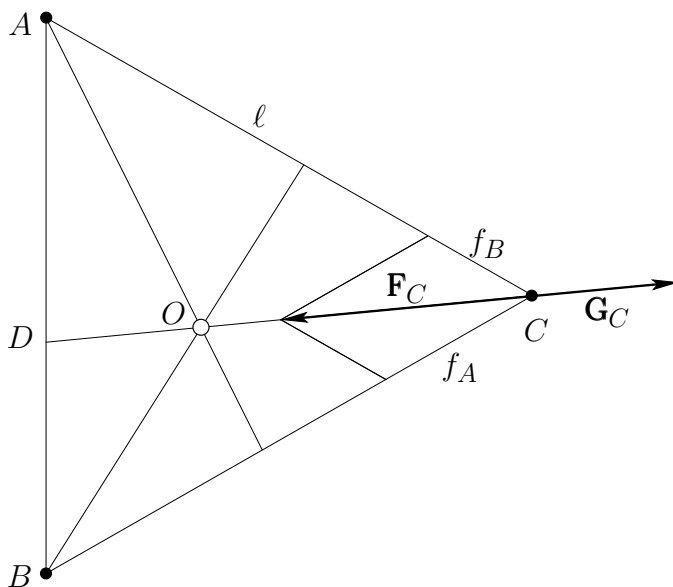


Figura 8.6. Se i corpi A, B, C sono collocati ai vertici di un triangolo equilatero allora la forza attrattiva e la forza centrifuga sono parallele. Il punto O rappresenta il baricentro dei tre corpi, e il punto D il baricentro dei corpi A, B . L'intensità della forza attrattiva \mathbf{F}_C si calcola combinando con la formula di Carnot le componenti di intensità f_A, f_B , calcolate come in figura 8.4. Per il calcolo della forza centrifuga occorre conoscere la distanza $|OC|$. A tal fine si determina $|DC|$ applicando la formula di Carnot al triangolo BCD ; poi si calcola $|OC|$ grazie al fatto che O è il baricentro di un sistema fittizio con ambedue le masse A, B collocate nel loro baricentro D e la massa C mantenuta al suo posto.

dove dobbiamo calcolare $|OC|$. Se in figura 8.6 indichiamo con D il baricentro dei corpi A, B abbiamo

$$|BD| = \frac{m_A}{m_A + m_B} \ell, \quad |OC| = \frac{m_A + m_B}{m_A + m_B + m_C} |DC|.$$

D'altra parte, per la formula di Carnot, abbiamo

$$\begin{aligned} |DC|^2 &= |BD|^2 + |BC|^2 - |BD| \cdot |BC| \\ &= \left(1 + \frac{m_A^2}{(m_A + m_B)^2} - \frac{m_A}{m_A + m_B} \right) \ell^2 \\ &= \frac{m_A^2 + m_B^2 + m_A m_B}{(m_A + m_B)^2} \ell^2, \end{aligned}$$

e quindi

$$|OC| = \frac{\ell}{M} \sqrt{m_A^2 + m_B^2 + m_A m_B}.$$

Sostituendo nell'espressione di $|\mathbf{G}_C|$ data sopra si ottiene la (8.12), come asserito.

Infine, eguagliando le intensità della forza centrifuga e di quella attrattiva, dalle (8.11) e (8.12) otteniamo

$$(8.13) \quad \omega^2 = M \frac{\varphi(\ell)}{\ell},$$

che è la relazione cercata. Concludiamo che:

Esiste una famiglia di configurazioni di equilibrio relativo in cui i tre corpi occupano i vertici di un triangolo equilatero che ruota uniformemente. La famiglia è parametrizzata dal lato ℓ del triangolo equilatero, e la velocità angolare di rotazione ω è determinata a meno del segno dalla (8.13).

8.1.3 Il caso della forza Newtoniana

Il caso che maggiormente ci interessa è quello della forza gravitazionale di Newton, ossia

$$(8.14) \quad \varphi(r) = \frac{\mathcal{G}}{r^2}$$

Per la ricerca delle soluzioni collineari è comodo introdurre una nuova variabile $\sigma = \ell\delta$, ricordando che ℓ è la distanza tra i due punti esterni. In tal caso la (8.5) diventa

$$(8.15) \quad \frac{m_A + m_B(1 - \sigma)}{\sigma^2} - \frac{m_C + m_B\sigma}{(1 - \sigma)^2} = m_A\sigma - m_C(1 - \sigma).$$

Si tratta, di fatto, di risolvere l'equazione di quinto grado⁶

$$(m_C + m_A)\sigma^5 - (3m_C + 2m_A)\sigma^4 + (3m_C + 2m_B + m_A)\sigma^3 - (3m_B + m_A)\sigma^2 + (3m_B + 2m_A)\sigma - m_A - m_B = 0$$

L'esistenza di una soluzione è garantita grazie al risultato generale del paragrafo 8.1.1, e per il calcolo effettivo ormai si può ricorrere in modo efficace a metodi numerici.

Per le soluzioni triangolari il problema risulta decisamente più semplice: basta sostituire la funzione $\varphi(r)$ nella (8.13), e otteniamo

$$(8.16) \quad \omega^2 = \frac{\mathcal{G}M}{\ell^3},$$

che si risolve immediatamente.

Esercizio 8.1: Determinare le soluzioni di equilibrio relativo nel caso di una forza inversamente proporzionale alla distanza, $\varphi(r) = k/r$, con k costante.

Esercizio 8.2: Studiare l'esistenza di soluzioni di equilibrio relativo nel caso di una forza di tipo armonico, $\varphi(r) = kr$, con k costante.

⁶ L'equazione è analoga a quella scritta da Eulero nelle memorie [37], [38]. Il lettore che volesse confrontarle troverà però che si tratta di due equazioni all'apparenza diverse. Questo perché Eulero usa come incognita il rapporto $\sigma/(1 - \sigma)$.

Esercizio 8.3: Studiare l'esistenza di soluzioni di equilibrio relativo nel caso di una forza attrattiva della forma $\varphi(r) = Cr^k$, con C costante, al variare di k .

8.2 Le soluzioni omografiche di Lagrange

Veniamo ora a stabilire l'esistenza di soluzioni un poco più generali, in cui i corpi si trovano in una configurazione geometrica che varia nel tempo mantenendo la similitudine. Queste soluzioni sono la generalizzazione di quelle che abbiamo visto esistere per il problema ristretto dei tre corpi nel caso ellittico.

Molte delle considerazioni sviluppate in questo paragrafo si applicano anche in generale al sistema di $N \geq 2$ corpi. Pertanto parte della discussione verrà svolta in ambito generale, anche se non ci addentreremo nel problema della ricerca di soluzioni omografiche per più di tre corpi.⁷

8.2.1 Formulazione generale per il problema di N corpi

Denotiamo genericamente con P_1, \dots, P_N gli N corpi, senza far riferimento a un particolare sistema di coordinate. In assenza di forze esterne al sistema valgono le leggi di conservazione della quantità di moto totale e del momento della quantità di moto totale (o conservazione del momento angolare, o legge delle aree). È quindi del tutto naturale scegliere un sistema di riferimento con origine nel baricentro, che possiamo assumere come fisso. Scriviamo direttamente le equazioni per gli N corpi nella forma

$$(8.17) \quad \ddot{\mathbf{x}}_j = - \sum_{k \neq j} m_k \varphi(r_{j,k}) \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k}{r_{j,k}}, \quad j = 1, \dots, N,$$

dove $r_{j,k} = \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|$. Supponiamo che la funzione $\varphi(r)$ sia regolare e monotona, ossia soddisfi le ipotesi che abbiamo enunciato all'inizio del paragrafo 8.1. Ricordiamo anche le espressioni degli integrali primi classici:

(i) equazione del baricentro

$$(8.18) \quad \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0};$$

⁷ La ricerca di soluzioni omografiche e di soluzioni periodiche più elaborate, quali le *configurazioni di tipo centrale* o le cosiddette *coreografie* costituiscono un capitolo alquanto interessante e ricco di risultati matematici di notevole eleganza. La sola ragione per cui ne ometto la trattazione — con un po' di rammarico — è che esula dagli scopi di queste note, e richiederebbe un numero di pagine troppo elevato. Mi limito a dare alcune indicazioni bibliografiche, rimandando ai lavori citati per ampliare l'elenco. Per le configurazioni di tipo centrale si veda, ad esempio, [18], [112], [92], [89] e [131]. Per le coreografie si veda, ad esempio, [19], [117] e [56]. Sulla pagina web https://en.wikipedia.org/wiki/N-body_choreography si possono trovare anche collegamenti a rappresentazioni animate di alcune orbite.

- (ii) conservazione della quantità di moto totale, che si annulla in virtù dell'equazione del baricentro:

$$(8.19) \quad \sum_{j=1}^N m_j \dot{\mathbf{x}}_j = 0 ;$$

- (iii) legge delle aree, o conservazione del momento angolare:

$$(8.20) \quad \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{x}_j \wedge \dot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{\Gamma} ,$$

dove $\mathbf{\Gamma}$ è un vettore costante.

Restringiamo ora la ricerca alle soluzioni omografiche, ossia soluzioni complanari che mantengono la similitudine. Dal momento che le orbite devono essere complanari i corpi si muovono nel piano ortogonale al vettore $\mathbf{\Gamma}$, sicché in un sistema di riferimento cartesiano con asse z parallelo al momento angolare $\mathbf{\Gamma}$ le posizioni dei corpi sono determinate dalle sole coordinate x, y , essendo $z = 0$. Possiamo quindi pensare ai vettori \mathbf{x}_j che determinano la posizione dei corpi come appartenenti a \mathbb{R}^2 .

Fissiamo dei vettori ξ_1, \dots, ξ_N nel piano x, y che soddisfino l'equazione del baricentro $\sum_j m_j \xi_j = 0$, e cerchiamo soluzioni della forma

$$(8.21) \quad \mathbf{x}_j = \varrho R_\vartheta \xi_j , \quad R_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

dove $\varrho(t), \vartheta(t)$ sono funzioni incognite del tempo. Al fine di stabilire l'esistenza di tali soluzioni cominciamo a imporre che esse soddisfino le leggi di conservazione, iniziando con la legge delle aree.

Lemma 8.1: *In conseguenza della conservazione del momento angolare deve essere*

$$(8.22) \quad \frac{d}{dt} \varrho^2 \dot{\vartheta} = 0 , \quad \dot{\vartheta} = \frac{L}{\varrho^2} ,$$

dove L è una costante. Inoltre si ha anche

$$(8.23) \quad \ddot{\mathbf{x}}_j = (\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\vartheta}^2) R_\vartheta \xi_j .$$

Dimostrazione. Premettiamo un breve calcolo tecnico per la matrice di rotazione R_ϑ . Derivando rispetto al tempo abbiamo

$$\dot{R}_\vartheta = \dot{\vartheta} R'_\vartheta , \quad R'_\vartheta = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta & -\cos \vartheta \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta \end{pmatrix} ,$$

e derivando R'_ϑ ricaviamo

$$\dot{R}'_\vartheta = \ddot{\vartheta} R'_\vartheta - \dot{\vartheta}^2 R_\vartheta .$$

Derivando rispetto al tempo la (8.21) e osservando che $\frac{d}{dt} \varrho^2 \dot{\vartheta} = \varrho(\varrho \ddot{\vartheta} + 2\dot{\varrho} \dot{\vartheta})$ otteniamo

$$(8.24) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_j &= \dot{\varrho} R_\vartheta \xi_j + \varrho \dot{\vartheta} R'_\vartheta \xi_j , \\ \ddot{\mathbf{x}}_j &= (\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\vartheta}^2) R_\vartheta \xi_j + \left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d}{dt} \varrho^2 \dot{\vartheta} \right) R'_\vartheta \xi_j . \end{aligned}$$

Veniamo alla legge delle aree (8.20), che tenendo conto della (8.21) si riscrive come

$$(8.25) \quad \Gamma = \varrho^2 \dot{\vartheta} \sum_{j=1}^N m_j \boldsymbol{\gamma}_j, \quad \boldsymbol{\gamma}_j = (\mathbf{R}_\vartheta \boldsymbol{\xi}_j) \wedge (\mathbf{R}'_\vartheta \boldsymbol{\xi}_j).$$

Dal momento che i vettori $\boldsymbol{\xi}_j$ sono costanti, anche i vettori $\boldsymbol{\gamma}_j$ hanno norma costante, che del resto si calcola facilmente come

$$\|(\mathbf{R}_\vartheta \boldsymbol{\xi}_j) \wedge (\mathbf{R}'_\vartheta \boldsymbol{\xi}_j)\| = \|\mathbf{R}_\vartheta \boldsymbol{\xi}_j\| \|\mathbf{R}'_\vartheta \boldsymbol{\xi}_j\| = \|\boldsymbol{\xi}_j\|^2.$$

Quest'ultima relazione segue dal fatto che i vettori $\boldsymbol{\xi}_j$ e i loro ruotati con \mathbf{R}_ϑ e \mathbf{R}'_ϑ sono complanari, e inoltre $\mathbf{R}_\vartheta \boldsymbol{\xi}_j \perp \mathbf{R}'_\vartheta \boldsymbol{\xi}_j$, come si verifica in modo elementare. Ne segue che nella (8.25) la somma $\sum_{j=1}^N m_j \boldsymbol{\gamma}_j$ è costante, e se ne ricava la (8.22). Sostituendo la prima delle (8.22) nella seconda delle (8.24) si ottiene la (8.23). *Q.E.D.*

Lemma 8.2: *Le orbite omografiche che cerchiamo devono soddisfare il sistema di equazioni, per $j = 1, \dots, N$,*

$$(8.26) \quad \left(\ddot{\varrho} - \frac{L^2}{\varrho^3} \right) \boldsymbol{\xi}_j = - \sum_{k \neq j} m_k \varphi(\varrho r_{j,k}) \frac{\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_k}{r_{j,k}}, \quad r_{j,k} = \|\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_k\|.$$

Inoltre le distanze $r_{j,k}$ devono essere tali che per $j = 1, \dots, N$ valgano le relazioni

$$(8.27) \quad \psi(\varrho) \boldsymbol{\xi}_j = - \sum_{k \neq j} m_k \varphi(\varrho r_{j,k}) \frac{\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_k}{r_{j,k}}$$

con una stessa funzione $\psi(\varrho)$ per tutti i j .

Dimostrazione. Sostituiamo la (8.23) del lemma 8.1 nelle equazioni (8.17), e troviamo

$$(\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\vartheta}^2) \mathbf{R}_\vartheta \boldsymbol{\xi}_j = \mathbf{R}_\vartheta \sum_{k \neq j} m_k \varphi(\varrho r_{j,k}) \frac{\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_k}{r_{j,k}}, \quad r_{j,k} = \|\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_k\|,$$

dove dobbiamo ricordare che $r_{j,k}$ è indipendente dal tempo. Sostituendo $\dot{\vartheta}$ dato dalla (8.22) e moltiplicando ambo i membri per $\mathbf{R}_\vartheta^{-1}$ si trova l'equazione (8.26). La condizione (8.27) è imposta dalla forma particolare del membro di sinistra delle equazioni (8.26), che è $\boldsymbol{\xi}_j$ moltiplicato per un fattore indipendente dall'indice j . *Q.E.D.*

Moltiplicando ciascuna equazione per m_j e sommando membro a membro per $j = 1, \dots, N$ si vede subito che l'equazione del baricentro è soddisfatta.

Osservazione. Le equazioni del lemma 8.2 determinano la sola direzione dei vettori $\boldsymbol{\xi}_j$. Si possono dunque riscalarare tutti i vettori con un fattore comune, che si applicherà anche alle distanze mutue $r_{j,k}$. Per consistenza, si dovrà riscalarare anche ϱ dividendolo per lo stesso fattore.

Fin qui le considerazioni generali. Per continuare la discussione diventa indispensabile introdurre qualche informazione aggiuntiva, ad esempio qualche restrizione su N , o qualche ipotesi sulla funzione $\varphi(r)$ che caratterizza la forza.

Esempio 8.1: *Il problema dei due corpi.* Nel caso $N = 2$ tutte le orbite sono evidentemente omografiche, perché i due corpi sono ovviamente allineati su una retta passante per il baricentro. Ci attendiamo pertanto che le equazioni (8.26) descrivano tutte le soluzioni del problema dei due corpi, ossia quelle che abbiamo trovato nel capitolo 2. Per verificarlo scriviamo esplicitamente le due equazioni

$$\begin{aligned} \left(\ddot{\varrho} - \frac{L^2}{\varrho^3} \right) \boldsymbol{\xi}_1 &= -m_2 \varphi(\varrho r) \cdot \frac{\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2}{r} \\ \left(\ddot{\varrho} - \frac{L^2}{\varrho^3} \right) \boldsymbol{\xi}_2 &= -m_1 \varphi(\varrho r) \cdot \frac{\boldsymbol{\xi}_2 - \boldsymbol{\xi}_1}{r} \end{aligned}$$

dove $r = \|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\|$. Possiamo poi normalizzare i vettori $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ in modo che valga $r = 1$, a patto di riscalarlo ϱ . Sottraendo membro a membro otteniamo l'equazione

$$\left(\ddot{\varrho} - \frac{L^2}{\varrho^3} \right) (\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2) = -(m_1 + m_2) \varphi(\varrho) (\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2) ,$$

che prende il posto della (8.27). Qui possiamo introdurre l'energia potenziale $V(\varrho)$ imponendo la solita relazione $V'(\varrho) = -\varphi(\varrho)$, e siamo ricondotti a risolvere l'equazione

$$\ddot{\varrho} - \frac{L^2}{\varrho^3} + V'(\varrho) = 0 .$$

Ritroviamo così l'equazione radiale per il moto centrale, che ammette l'integrale primo

$$(8.28) \quad \frac{1}{2} \dot{\varrho}^2 + \frac{L^2}{2\varrho^2} + V(\varrho) = E ,$$

coincidente con quello dato dalla (2.23), fatto salvo qualche riallineamento delle costanti. Non occorre aggiungere altro alla discussione del capitolo 2

8.2.2 Le soluzioni triangolari per il problema dei tre corpi

Passiamo a considerare il caso $N = 3$, per cui conosciamo già le soluzioni stazionarie del paragrafo 8.1. Se osserviamo che le soluzioni stazionarie sono un caso particolare di soluzioni omografiche (quelle per cui $\varrho(t) = \varrho_0$ resta costante) è naturale attenderci che possano esistere soluzioni che generalizzano quelle che conosciamo. La più curiosa è certamente quella triangolare, e da questa iniziamo la discussione in questo paragrafo. Cerchiamo dunque soluzioni omografiche per cui i tre corpi formino sempre un triangolo equilatero.

Tenendo conto dell'osservazione che i vettori $\boldsymbol{\xi}_j$ sono determinati a meno di un fattore di scala è naturale porre $r_{j,k} = 1$ nelle equazioni (8.26), eventualmente riscalandolo ϱ . Ciò consente di determinare i vettori $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$, in modo che formino tra loro angoli fissati, che dipendono dalle masse, tenendo come sola arbitrarietà la direzione di uno di essi. La norma è fissata in modo che il triangolo equilatero abbia lato unitario. Possiamo così riscrivere l'equazione (8.26) nella forma più semplice

$$(8.29) \quad \left(\ddot{\varrho} - \frac{L^2}{\varrho^3} \right) \boldsymbol{\xi}_j = -\varphi(\varrho) \boldsymbol{\xi}_j , \quad j = 1, 2, 3 .$$

Si ricava quest'ultima equazione con un calcolo elementare, perché dall'equazione del baricentro $\sum_{j=1}^3 m_k \xi_k = 0$ si ricava subito che $\sum_{k \neq j} m_k \xi_k = -m_j \xi_j$, da qui si ottiene $\sum_{k \neq j} m_k (\xi_j - \xi_k) = M \xi_j$ essendo $M = \sum_j m_j$ la massa totale del sistema. Poiché $\xi_j \neq 0$ otteniamo l'equazione per ϱ

$$(8.30) \quad \left(\ddot{\varrho} - \frac{L^2}{\varrho^3} \right) + M\varphi(\varrho) = 0$$

Questa è l'equazione radiale per il problema del moto centrale, che abbiamo ampiamente discusso nel capitolo 2. Sappiamo che $\varrho(t)$ viene determinata mediante una quadratura, e che con una seconda quadratura possiamo risolvere l'equazione (8.22) per $\vartheta(t)$. Dalla discussione qualitativa del paragrafo 2.5 sappiamo che possono esistere soluzioni con $\varrho = \varrho^*$ costante, stati legati con ϱ che oscilla tra due estremi, oppure stati di scattering o caduta sul centro. Una discussione più completa richiede la conoscenza della forza (o, equivalentemente, del potenziale). L'evoluzione dell'angolo ϑ viene calcolata per quadratura dall'equazione (8.22), ossia $\dot{\vartheta} = \frac{L}{m\varrho^2}$.

Concludiamo che:

Esistono delle famiglie di soluzioni omografiche per cui i tre corpi si trovano sempre ai vertici di un triangolo equilatero. Ciascuno dei tre punti si muove rispetto al baricentro seguendo l'orbita del moto centrale con la stessa forza attrattiva che agisce tra i corpi.

Si possono aggiungere le osservazioni che seguono.

- (i) Per $L = 0$ il moto avviene lungo le rette identificate dai vettori ξ_j (ponendo $\vartheta = 0$), e si possono avere collisioni triple, nel senso che i tre corpi entrano in collisione allo stesso istante. Il tempo necessario per la collisione può essere finito o infinito a seconda della dipendenza della forza dalla distanza (si veda la discussione nel paragrafo 2.5.3).
- (ii) Per $L \neq 0$ il triangolo ruota attorno al baricentro con una velocità angolare $\dot{\vartheta}$ data dall'equazione (8.22). La dipendenza $\vartheta(t)$ si ottiene per quadratura da quell'equazione.
- (iii) Le soluzioni di equilibrio della (8.30), se ve ne sono, corrispondono alle soluzioni triangolari stazionarie già trovate da Lagrange [75], che abbiamo ricavato nel paragrafo 8.1.

8.2.3 Le soluzioni collineari del problema dei tre corpi

Il caso dei punti collineari è più delicato, in quanto non possiamo fattorizzare la funzione $\varphi(r_{j,k})$ perché le distanze devono necessariamente essere diverse. Riacciandoci al procedimento del paragrafo 8.1.1, etichettiamo i tre corpi come A, B, C , anziché con degli interi, e supponiamo che siano allineati sulla retta da sinistra a destra, come

in figura 8.1. Riscriviamo il sistema di equazioni (8.26), con notazioni ovvie, come

$$(8.31) \quad \begin{aligned} \left(\ddot{\varrho} - \frac{L^2}{\varrho^3} \right) \xi_A &= -m_B \varphi(\varrho r_{AB}) \frac{\xi_A - \xi_B}{r_{AB}} - m_C \varphi(\varrho r_{AC}) \frac{\xi_A - \xi_C}{r_{AC}} \\ \left(\ddot{\varrho} - \frac{L^2}{\varrho^3} \right) \xi_B &= -m_C \varphi(\varrho r_{BC}) \frac{\xi_B - \xi_C}{r_{BC}} - m_A \varphi(\varrho r_{AB}) \frac{\xi_B - \xi_A}{r_{AB}} \\ \left(\ddot{\varrho} - \frac{L^2}{\varrho^3} \right) \xi_C &= -m_A \varphi(\varrho r_{AC}) \frac{\xi_C - \xi_A}{r_{AC}} - m_B \varphi(\varrho r_{BC}) \frac{\xi_C - \xi_B}{r_{BC}} . \end{aligned}$$

Osservando ancora una volta che i vettori ξ_A, ξ_B, ξ_C sono determinati a meno di un fattore di scala scegliamoli in modo che valgano le relazioni

$$r_{AC} = 1, \quad r_{AB} = \delta, \quad r_{BC} = 1 - \delta, \quad 0 < \delta < 1 .$$

Ricordiamo che i vettori ξ_A, ξ_B, ξ_C sono paralleli, e dunque possiamo sostituire anche le differenze $\xi_B - \xi_A, \xi_C - \xi_B$ e $\xi_C - \xi_A$ rispettivamente con $\delta, 1 - \delta$ e 1 . Qui conviene far comparire nelle equazioni solo le differenze tra i vettori ξ , cosa che possiamo facilmente ottenere sottraendo la prima delle (8.31) dalla seconda e la seconda dalla terza. Esprimendo le differenze in funzione di δ secondo le formule appena scritte otteniamo il sistema di due equazioni indipendenti

$$(8.32) \quad \begin{aligned} \left(\ddot{\varrho} - \frac{L^2}{\varrho^3} \right) &= -\frac{(m_A + m_B) \varphi(\varrho\delta) + m_C [\varphi(\varrho) - \varphi(\varrho(1 - \delta))]}{\delta} \\ \left(\ddot{\varrho} - \frac{L^2}{\varrho^3} \right) &= -\frac{(m_B + m_C) \varphi(\varrho(1 - \delta)) + m_A [\varphi(\varrho) - \varphi(\varrho\delta)]}{1 - \delta} . \end{aligned}$$

Perché esista la soluzione omografica che cerchiamo dobbiamo ottenere in ambo i casi la stessa equazione per ϱ , e dunque dobbiamo eguagliare i secondi membri. Moltiplicando ambedue le equazioni per $\delta(1 - \delta)$ otteniamo la condizione

$$\begin{aligned} (m_A + m_B)(1 - \delta) \varphi(\varrho\delta) + m_C(1 - \delta) [\varphi(\varrho) - \varphi(\varrho(1 - \delta))] \\ = (m_B + m_C)\delta \varphi(\varrho(1 - \delta)) + m_A\delta [\varphi(\varrho) - \varphi(\varrho\delta)] . \end{aligned}$$

Riordinando i termini in modo da portare tutte le funzioni φ a sinistra otteniamo

$$(8.33) \quad \frac{[m_A + m_B(1 - \delta)] \varphi(\varrho\delta) - (m_B\delta + m_C) \varphi(\varrho(1 - \delta))}{\varphi(\varrho)} = m_A\delta - m_C(1 - \delta) ,$$

Questa equazione coincide di fatto con la (8.5): occorre solo qualche riallineamento di simboli. Possiamo dunque applicare l'argomento usato in quel caso, e concludiamo che per ogni $\varrho > 0$ esiste una soluzione unica $\delta(\varrho)$ dell'equazione (8.33). Se richiediamo che ϱ resti costante nel tempo allora ritroviamo gli equilibri collineari del paragrafo 8.1.1. Se invece ammettiamo che ϱ possa variare nel tempo allora, in generale, non troviamo soluzioni omografiche, perché i rapporti tra le distanze mutue non possono restare costanti, essendo descritti dalla funzione $\delta(\varrho)$ di cui abbiamo appena stabilito l'esistenza.

La domanda spontanea è se vi siano casi in cui si hanno effettivamente delle soluzioni omografiche. Ciò risulta vero se si assume per la forza la forma particolare⁸

$$(8.34) \quad \varphi(\varrho) = \frac{1}{\varrho^\alpha}, \quad \alpha > 0$$

eventualmente moltiplicandola per una costante positiva che qui non ha rilevanza. Tra queste forze rientra il caso Newtoniano, con $\alpha = 2$. Con un rapido calcolo si verifica che l'equazione (8.33) diventa

$$(8.35) \quad \frac{m_A + m_B(1 - \delta)}{\delta^\alpha} - \frac{m_B\delta + m_C}{(1 - \delta)^\alpha} = m_A\delta - m_C(1 - \delta),$$

e la soluzione δ risulta essere indipendente da ϱ . Pertanto la (8.36) si riscrive

$$(8.36) \quad \ddot{\varrho} - \frac{L^2}{\varrho^3} = -\frac{K}{\varrho^\alpha}, \quad K = \frac{m_A + m_B}{\delta^{1+\alpha}} - \frac{m_C}{\delta} \left(1 - \frac{1}{(1 - \delta)^\alpha} \right).$$

La costante K risulta essere comunque positiva, perché il termine noto deve mantenere il segno del membro di destra delle equazioni (8.32), che è certamente negativo dal momento che δ è soluzione della (8.35). Concludiamo dunque:

Per le forze attrattive che variano come una potenza inversa della distanza esistono tre famiglie di soluzioni omografiche per cui i corpi restano allineati su una retta e mantengono invarianti i rapporti mutui tra le distanze.

Anche in questo caso il moto di ciascuno dei corpi corrisponde a quello del moto centrale con la stessa forza attrattiva che agisce tra i corpi.

8.3 Regolarità delle orbite e collisioni

In questo paragrafo tratteremo il caso generale di un sistema di N corpi. Il problema che viene affrontato è la regolarità delle soluzioni. Faremo uso del teorema di esistenza e unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali nel caso di campi vettoriali olomorfi. In questo caso il teorema di Cauchy garantisce che le soluzioni sono localmente olomorfe. Riferendoci al caso dei tre corpi, Painlevé ha dimostrato che le soluzioni sono prolungabili e restano olomorfe fin che non si verifica una collisione a due o più corpi, o eventualmente una collisione generale tra tutti i corpi.

8.3.1 Il teorema di Cauchy

Richiamiamo il teorema di esistenza e unicità di Cauchy per le soluzioni di equazioni differenziali in ambito analitico. Consideriamo anzitutto l'aspetto locale, restringendoci a un polidisco $\Delta_\varrho(\zeta)$ di raggio $\varrho > 0$ con centro in $\zeta \in \mathbb{C}^n$; formalmente

$$(8.37) \quad \Delta_\varrho(\zeta) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - \zeta_j| \leq \varrho, j = 1, \dots, n\}.$$

⁸ La scelta $\alpha > 0$ è giustificata in quanto la forza risulta essere sempre attrattiva e decrescente con la distanza. L'argomento però si applica anche al caso $\varphi(\varrho) = k\varrho^\beta$ con $\beta > 0$, con le dovute cautele messe in evidenza dagli esercizi 8.1–8.3. La discussione di questi casi è lasciata al lettore.

Supponiamo definito su Δ_ϱ un campo vettoriale (e dunque complesso) $X(z)$ che sia limitato sul polidisco chiuso e olomorfo al suo interno. Definiamo la norma uniforme del campo (o norma di Chebyshev, o più familiarmente norma sup) come

$$(8.38) \quad |X_j|_\varrho = \sup_{z \in \Delta_\varrho} |X_j(z)|, \quad |X|_\varrho = \max_{1 \leq j \leq n} |X_j|_\varrho.$$

Vogliamo studiare l'esistenza in Δ_ϱ di una soluzione olomorfa del sistema di equazioni differenziali

$$(8.39) \quad \dot{z}_j = X_j(z), \quad j = 1, \dots, n$$

con dato iniziale $z(0) = \zeta$, almeno su un intervallo $|t| \leq \tau$ con qualche $\tau > 0$. Dal momento che consideriamo sistemi complessi è naturale considerare anche t come variabile complessa, anche se in seguito saremo interessati a t reale.

Teorema 8.3: *Supponiamo che $|X|_\varrho$ sia finito. Allora esiste $\tau > 0$ tale che la soluzione $z(t)$ con dato iniziale $z(0)$ è olomorfa nel disco $|t| < \tau$, e si ha*

$$(8.40) \quad |z_j(\tau) - \zeta_j| < \varrho.$$

Un valore stimato per τ è

$$(8.41) \quad \tau = \frac{\varrho}{(e+2)|X|_\varrho}.$$

Corollario 8.4: *Con τ dato dalla (8.41), il campo vettoriale $X(z)$ resta olomorfo nel punto $z(\tau)$, e la soluzione $z(t)$ può prolungarsi in un intorno di τ , restando olomorfa.*

Corollario 8.5: *Se il campo X è analitico reale, allora la soluzione $z(t)$ con dato iniziale $\zeta \in \mathbb{R}^n$ è analitica reale nell'intervallo $|t| \leq \tau$, e resta analitica reale in un intorno di τ .*

Il teorema è materia standard nella teoria delle equazioni differenziali. Tuttavia, ai fini della discussione che seguirà, potrà essere utile richiamarne brevemente la dimostrazione.⁹ Si scrive la soluzione come sviluppo in serie di potenze di t nella forma

$$(8.42) \quad z_j(t) = \zeta_j + \sum_{s>0} \frac{t^s}{s!} L_X^{s-1} X_j \Big|_\zeta, \quad L_X = \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

⁹ La dimostrazione che si può trovare su molti testi fa uso del metodo delle maggioranti di Cauchy (si veda, ad esempio, [104] o [116]). Qui ho preferito ricorrere al formalismo delle serie di Lie. Per una discussione più completa si può vedere [55], oppure le note del corso di Sistemi Dinamici 1, §1.5, reperibili all'indirizzo web http://www.mat.unimi.it/users/antonio/sisdin/Sisdin_1.pdf. I due metodi sono sostanzialmente equivalenti, e la scelta è questione di gusto. Le varie dimostrazioni differiscono solitamente per il valore stimato di τ , quando viene valutato in modo esplicito. Si trova tipicamente una costante diversa da $e+2$ a denominatore, a volte introducendo una dipendenza dalla dimensione n . È appena il caso di osservare che ciò non ha grande rilevanza nel seguito.

dove L_X è la derivata di Lie lungo il flusso del campo vettoriale X , e i secondi membri devono essere valutati nel punto iniziale ζ . Facendo ricorso alla disuguaglianza di Cauchy per la derivata di una funzione olomorfa troviamo che per le componenti X_j del campo vettoriale, che sono funzioni olomorfe e limitate in $\Delta_\varrho(\zeta)$, vale la disuguaglianza

$$\left| \frac{\partial X_j}{\partial z_k}(\zeta) \right| \leq \frac{|X_j|_\varrho}{\varrho}$$

Con un po' di pazienza si trova la disuguaglianza più generale, valida per derivate di Lie di qualunque ordine s ,

$$(8.43) \quad |L_X^s X_j(\zeta)| \leq s! \left(\frac{e|X|_\varrho}{\varrho} \right)^s |X_j|_\varrho;$$

questo richiede qualche calcolo tecnico lasciato al lettore. Grazie alla disuguaglianza ottenuta si può dare una stima di convergenza della serie (8.42) calcolando

$$|z_j(t) - \zeta_j| \leq \sum_{s>0} \frac{t^s}{s} \left(\frac{e|X|_\varrho}{\varrho} \right)^{s-1} |X_j|_\varrho.$$

La serie del membro di destra rappresenta una funzione analitica nel disco aperto

$$|t| < \frac{\varrho}{e|X|_\varrho}.$$

Inoltre scegliendo $\tau = \frac{\varrho}{(e+2)|X|_\varrho}$ come nella (8.41) otteniamo (con qualche semplificazione)

$$|z_j(\tau) - \zeta_j| \leq \tau |X_j|_\varrho \sum_{s \geq 0} \left(\frac{\tau e |X|_\varrho}{\varrho} \right)^s < \frac{\varrho}{e+2} \sum_{s \geq 0} \left(\frac{e}{e+2} \right)^s = \frac{\varrho}{2}.$$

Questo dimostra la proposizione.

In virtù dell'ultima disuguaglianza abbiamo anche $z(\tau) \in \Delta_\varrho(\zeta)$. Di conseguenza il campo vettoriale X è olomorfo in un polidisco con centro nel punto $z(\tau)$, in quel polidisco si può ancora applicare il teorema, sicché la soluzione può prolungarsi oltre il tempo τ restando olomorfa. Questo dimostra il corollario 8.4. Il corollario 8.5 segue immediatamente dalla forma (8.42) della soluzione, dato che i coefficienti della serie sono evidentemente reali. A sua volta, il teorema si applica in un intorno del punto iniziale in quanto il campo, essendo analitico reale, è sviluppabile in serie di potenze convergente in un intorno complesso del punto iniziale ζ . Tenuto conto del corollario 8.5 possiamo limitarci a considerare solo orbite reali, che è precisamente ciò a cui siamo interessati nello studio del problema degli N corpi.

8.3.2 Intervalli di regolarità delle soluzioni

Veniamo ora all'applicazione del teorema di Cauchy al problema degli N corpi. Useremo spesso, per brevità, le notazioni $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ per le posizioni e $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ per le velocità $\mathbf{v}_j = \dot{\mathbf{x}}_j$. Qui ci restringiamo senz'altro al caso

del potenziale Kepleriano. Scegliamo anche le unità di misura in modo che la costante gravitazionale diventi $\mathcal{G} = 1$. Scriveremo dunque il potenziale come

$$(8.44) \quad V(\mathbf{x}) = - \sum_{j < k} \frac{m_j m_k}{r_{j,k}}, \quad r_{j,k} = \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|.$$

Scriveremo poi le equazioni di Newton nella forma

$$(8.45) \quad \ddot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{F}_j(\mathbf{x}) = - \sum_{k \neq j} \frac{m_k}{r_{j,k}^2} \cdot \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)}{r_{j,k}}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Ai fini dell'applicazione del teorema di Cauchy è conveniente riscrivere le equazioni nella forma

$$(8.46) \quad \dot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{v}_j, \quad \dot{\mathbf{v}}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}).$$

Seguendo Lagrange, prestiamo particolare attenzione alle distanze mutue $r_{j,k}$. A tal fine introduciamo la distanza minima tra i corpi

$$(8.47) \quad r = \min_{j < k} r_{j,k}.$$

Va da sé che la distanza minima r si annulla solo in caso di collisione tra due o più corpi.

Scegliamo ora un dato iniziale $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ e fissiamo l'istante iniziale t_0 . Di conseguenza sono fissati anche i valori $E = T + V$ dell'energia, della quantità di moto totale e del momento della quantità di moto totale. Supporremo anche che sia $r > 0$, ovvero che i corpi siano collocati in posizioni distinte, e che le velocità siano finite. Qui, per semplicità, prenderemo in considerazione l'evoluzione nel futuro, ossia per $t > t_0$, ma tutto quanto diremo si applica anche ai tempi $t < t_0$, grazie alla reversibilità delle orbite Newtoniane. Il risultato rilevante è dovuto a Painlevé ([101], pag. 585).

Proposizione 8.6: *Sia $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{v}(t_0) = \boldsymbol{\eta}$ il dato iniziale al tempo t_0 , con i corpi in posizioni distinte sicché la distanza minima tra due di essi sia positiva, e sia l'energia $E < +\infty$ arbitraria ma fissata. Se la soluzione $\mathbf{x}(t)$ è olomorfa per $t_0 \leq t \leq t_c$ ma diventa singolare al tempo t_c allora:*

- (i) *l'energia potenziale $V(\mathbf{x}(t))$ tende a $-\infty$ per $t \rightarrow t_c$;*
- (ii) *la distanza minima r tende a zero per $t \rightarrow t_c$.*

In linguaggio informale: le soluzioni diventano singolari solo in caso di collisione tra due o più corpi; un'orbita priva di collisioni resta olomorfa per tutti i tempi.

Ai fini dell'applicazione del teorema di Cauchy dobbiamo determinare un polidisco complesso $\Delta_\rho(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ in cui il campo vettoriale $X = (\mathbf{v}, \mathbf{F})$ delle equazioni (8.46) sia olomorfo e limitato. L'estensione al complesso richiede qualche considerazione aggiuntiva, sia pure non particolarmente sorprendente.

Lemma 8.7: *Sia $V(\boldsymbol{\xi}) \geq \bar{V}$ con una costante $-\infty < \bar{V} < 0$, e sia E l'energia, arbitraria ma fissata. Allora:*

(i) la distanza minima tra i corpi è positiva, e si ha

$$r = \min_{j \neq k} \|\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_k\| \geq \frac{\mu^2}{|\bar{V}|}, \quad \mu = \min_j m_j;$$

(ii) nel polidisco complesso $\Delta_\varrho(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \subset \mathbb{C}^{6N}$ con $\varrho = \frac{r}{8}$ le distanze tra i corpi sono inferiormente limitate da

$$r_{j,k} = \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\| > \frac{1}{2} r, \quad 1 \leq j \leq N;$$

(iii) nello stesso polidisco si ha

$$|V|_\varrho < \frac{M^2}{r}, \quad |T|_\varrho < E + \frac{M^2}{r}, \quad M = \sum_{j=1}^N m_j;$$

(iv) nello stesso polidisco il campo vettoriale $X = (\mathbf{v}, \mathbf{F})$ in (8.46) è olomorfo e limitato; e si ha

$$|X|_\varrho < \max \left\{ \frac{4M}{r^2}, \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E + \frac{M^2}{r} \right)} \right\}.$$

Dimostrazione. Osserviamo subito che deve essere $\bar{V} < 0$.

(i) Che la distanza minima sia positiva è conseguenza dell'ipotesi $V(\boldsymbol{\xi}) \geq \bar{V}$. Infatti, se così non fosse, si avrebbe immediatamente $V(\boldsymbol{\xi}) = -\infty$. Diamo una valutazione esplicita. Dato che il potenziale $V(\boldsymbol{\xi})$ è espresso da una somma di termini tutti negativi, considerando il solo termine per cui la distanza è quella minima abbiamo

$$-\frac{\mu^2}{r} \geq V(\boldsymbol{\xi}) \geq \bar{V}, \quad r \geq -\frac{\mu^2}{\bar{V}};$$

la seconda disuguaglianza segue immediatamente dalla prima, ed è quella riportata nell'enunciato.

(ii) Qui occorre tener conto delle singole componenti delle coordinate dei corpi. Useremo la notazione $\mathbf{x}_j = (x_j, y_j, z_j) \in \mathbb{C}^3$ oppure $\boldsymbol{\xi}_j = (\xi_j, \eta_j, \zeta_j) \in \mathbb{C}^3$. Posto $\varrho = r/8$ come nell'enunciato, consideriamo un intorno $\Delta_\varrho(\boldsymbol{\xi}) \subset \mathbb{C}^{3N}$. Abbiamo allora $|x_j - \xi_j| \leq \varrho$, $|y_j - \eta_j| \leq \varrho$ e $|z_j - \zeta_j| \leq \varrho$, da cui otteniamo $\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\| \leq \sqrt{3}\varrho$, e dunque, per $j \neq k$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\| &= \|(\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_k) + (\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\xi}_j) - (\mathbf{x}_k - \boldsymbol{\xi}_k)\| \\ &\geq \|\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_k\| - (\|\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\xi}_j\| + \|\mathbf{x}_k - \boldsymbol{\xi}_k\|) \geq r - 2\sqrt{3}\varrho > r - \frac{r}{2} = \frac{1}{2}r, \end{aligned}$$

come asserito.

(iii) Grazie alla limitazione sulla distanza minima del punto (ii) e facendo uso della definizione (8.44) del potenziale, per ogni $\mathbf{x} \in \Delta_\varrho(\boldsymbol{\xi})$ si valuta

$$0 < -V(\mathbf{x}) = \sum_{j < k} \frac{m_j m_k}{r_{j,k}} < \frac{2}{r} \sum_{j < k} m_j m_k < \frac{1}{r} \left(\sum_j m_j \right)^2 < +\infty,$$

e da qui si ottiene subito le disequaglianza per il potenziale.

Ricordando poi che l'energia totale è costante, nel polidisco $\Delta_\varrho(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ si valuta

$$T(\mathbf{v}) = E - V(\mathbf{x}) < E + |V|_\varrho < E + \frac{M^2}{r} ,$$

come asserito.

(iv) Per la forza gravitazionale \mathbf{F}_j definita dalla (8.45) si ha evidentemente che ogni componente è limitata da¹⁰

$$|\mathbf{F}_j|_\varrho \leq \sum_{k \neq j} \frac{m_k}{r_{j,k}^2} < \sum_{k \neq j} \frac{4m_k}{r^2} < \frac{4M}{r^2} , \quad |\mathbf{F}|_\varrho < \frac{4M}{r^2} .$$

Resta da valutare il campo \mathbf{v} delle velocità. A tal fine mediante l'espressione dell'energia cinetica e grazie alla limitazione ottenuta al punto (iii) valutiamo

$$\frac{1}{2} m_j \mathbf{v}_j^2 < E + \frac{M^2}{r} , \quad 1 \leq j \leq N ,$$

e questo è valido per ogni $\mathbf{v} \in_\varrho(\boldsymbol{\eta})$. Si ha così

$$\|\mathbf{v}_j\| < \sqrt{\frac{2}{m_j} \left(E + \frac{M^2}{r} \right)} , \quad |\mathbf{v}|_\varrho < \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E + \frac{M^2}{r} \right)} , \quad \mu = \min_j m_j ;$$

la prima disequaglianza si applica a ciascuna componente del vettore \mathbf{v}_j ; la seconda disequaglianza segue dalla prima applicando la definizione (8.38) della norma del campo vettoriale. Per il campo $X = (\mathbf{v}, \mathbf{F}(\mathbf{x}))$ si applica ancora la definizione, e si ottiene la disequaglianza dell'enunciato. Q.E.D.

Dimostrazione della proposizione 8.6. Mostriamo anzitutto che all'istante iniziale t_0 si ha $V(\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_n) \geq \bar{V}$ con una costante $\bar{V} > -\infty$. Infatti, ricordando la definizione (8.44) del potenziale e ricordando anche che abbiamo scelto le unità di misura in modo che sia $\mathcal{G} = 1$, possiamo dare un valore esplicito a \bar{V} calcolando

$$\bar{V} = V(\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_n) = - \sum_{j < k} \frac{m_j m_k}{r_{j,k}} > -\infty$$

dove $r_{j,k} = \|\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_k\|$ sono le distanze all'istante iniziale, che per ipotesi sono diverse da zero. Si può dunque applicare il lemma 8.7, e grazie a esso applicare il teorema di Cauchy, sicché si può calcolare la soluzione almeno fino a un tempo $\tau > t_0$ dato dalla (8.41), sostituendovi ϱ e $|X|_\varrho$ come dati ai punti (ii) e (iv) lemma 8.7. La soluzione resta reale e olomorfa, come affermato dai corollari 8.4 e 8.5, e la distanza tra i corpi

¹⁰ Qui le notazioni diventano decisamente confuse, ma è difficile fare meglio. Con $|\mathbf{F}_j|_\varrho$, coerentemente con la definizione (8.38) della norma di un campo, si deve intendere il massimo della norma uniforme di ciascuna componente nel polidisco di raggio ϱ . La norma $|\mathbf{F}_j|_\varrho$ viene valutata uniformemente per le tre componenti grazie al fatto che $(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)/r_{j,k}$ è un vettore unitario. Inoltre la stima trovata è uniforme anche rispetto a j , e dunque si applica a $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N)$. Considerazioni analoghe valgono nel seguito quando si considerano, ad esempio, le norme su polidischi $\Delta_\varrho(\boldsymbol{\xi})$ o $\Delta_\varrho(\boldsymbol{\eta})$.

al tempo τ resta limitata, sicché la soluzione si può prolungare ulteriormente fino a un tempo $t_1 > t_0 + \tau$. Possono darsi due casi. Il primo è che a ogni tempo $t_1 > t_0$ l'energia potenziale resti inferiormente limitata, ossia $V(\mathbf{x}(t_1)) \geq \bar{V}_{t_1} > -\infty$; in tal caso la soluzione resta olomorfa per tutti i tempi. Il secondo caso è che la soluzione diventi singolare a un tempo $t = t_c > t_0$, come ipotizzato; in tal caso deve essere $V(\mathbf{x}(t)) \rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow t_c$, altrimenti si potrebbe applicare nuovamente il lemma 8.7 e prolungare ulteriormente la soluzione oltre il tempo t_c in modo che resti olomorfa, contraddicendo l'ipotesi che a $t = t_c$ la soluzione diventi singolare. Questo dimostra l'asserto (i). Se

$$V(\mathbf{x}(t)) = - \sum_{j < k} \frac{m_j m_k}{r_{j,k}(t)} \xrightarrow{t \rightarrow t_c} -\infty$$

allora almeno una delle distanze $r_{j,k}$ deve tendere a zero, come asserito al punto (ii). Questo conclude la dimostrazione. Q.E.D.

8.3.3 Collisioni in un sistema a N corpi

Veniamo ora ad alcuni risultati generali sulle possibili collisioni. Dobbiamo distinguere in particolare due casi. Il primo, che chiameremo *collisione generale a N corpi*, si verifica quando tutti si urtano contemporaneamente *nello stesso punto*, che è necessariamente il baricentro. Il secondo caso si verifica quando la collisione coinvolge due o più corpi, ma non tutti contemporaneamente o non tutti nello stesso punto.¹¹

Un primo risultato, dovuto a Sundman [120][121][122], asserisce che la collisione generale a N corpi può verificarsi solo nel caso di condizioni iniziali eccezionali:¹² il momento angolare totale deve essere nullo. Per il secondo caso si possono trovare risultati alquanto interessanti per la collisione binaria in un sistema a tre corpi, che studieremo in maggior dettaglio più avanti. Ben poco si può dire invece per $N > 3$.

Proposizione 8.8: *Se a un tempo t_c si verifica una collisione generale a N corpi (nel baricentro) allora il momento angolare totale è nullo, ossia*

$$\mathbf{\Gamma} = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{x}_j \wedge \mathbf{v}_j = 0 .$$

Per la dimostrazione della proposizione appena enunciata si fa uso di una funzione introdotta da Lagrange [75] (talvolta detta *momento polare rispetto al baricentro*)

¹¹ Qui è opportuno fissare il linguaggio. Nel caso di N corpi può ben avvenire che a un determinato istante ciascun corpo entri in collisione con almeno un altro, ma non tutti insieme nel baricentro. Ad esempio, per $N = 4$, può accadere che due corpi, diciamo P_1 e P_2 , si urtino in un punto dello spazio e lo stesso facciano gli altri due corpi P_3 e P_4 , ma in un punto diverso. In tal caso non parliamo di collisione generale, ma genericamente di collisione.

¹² Levi-Civita [84] annota che Weierstrass aveva comunicato il risultato a Mittag-Leffler in una lettera, poi pubblicata in [91]. Sembra però che Weierstrass non ne abbia reso nota la dimostrazione.

definita come

$$(8.48) \quad I(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N m_j r_j^2, \quad r_j = \|\mathbf{x}_j\|.$$

Nel seguito sarà utile anche riesprimere la funzione $I(\mathbf{x})$ in termini delle distanze mutue tra i corpi $r_{j,k} = \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|$. Abbiamo allora

$$(8.49) \quad I = \frac{1}{M} \sum_{k < j} m_j m_k r_{j,k}^2, \quad M = \sum_{j=1}^N m_j,$$

dove M è la massa totale del sistema. Per verificare la correttezza di quest'ultima formula calcoliamo

$$\begin{aligned} \sum_{k < j} m_j m_k r_{j,k}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N m_j m_k (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{x}_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{x}_k^2 + \left(\sum_{j=1}^N m_j \mathbf{x}_j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{x}_j \right) = MI, \end{aligned}$$

dove si è fatto uso sia della definizione (8.48) di I che dell'equazione del baricentro $\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{x}_k = 0$. L'espressione (8.49) cercata si ottiene immediatamente.

I prossimi tre lemmi stabiliscono delle relazioni tra la la funzione di Lagrange I , l'energia cinetica T , l'energia potenziale V e il momento angolare $\mathbf{\Gamma}$.

Lemma 8.9: (Lagrange [75]) *Se si escludono i punti di collisione si ha*

$$(8.50) \quad \frac{1}{2} \ddot{I} = 2T + V$$

dove $T = \sum_{j=1}^N m_j \dot{\mathbf{x}}_j^2$ è l'energia cinetica e V è l'energia potenziale (8.44). Inoltre, fissata l'energia totale $E = T + V$ si hanno anche le relazioni

$$(8.51) \quad \frac{1}{2} \ddot{I} = 2E - V, \quad \frac{1}{2} \ddot{I} = T + E$$

Dimostrazione. Ricordando che $r_j^2 = \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_j$ (con la consueta notazione del prodotto scalare mediante un punto) e che $m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = -\text{grad } V$ calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{I} &= \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{x}_j \cdot \dot{\mathbf{x}}_j, \\ \frac{1}{2} \ddot{I} &= \sum_{j=1}^N m_j (\dot{\mathbf{x}}_j^2 + \mathbf{x}_j \cdot \ddot{\mathbf{x}}_j) = T - \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_j \cdot \text{grad } V. \end{aligned}$$

L'energia potenziale è funzione omogenea di grado -1 , e per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee abbiamo $\sum_{j=1}^N \mathbf{x}_j \cdot \text{grad } V = -V$; da qui segue la(8.50).

Le (8.51) seguono in modo ovvio dalla (8.50) sostituendovi $T = E - V$ oppure $V = E - T$. Q.E.D.

Lemma 8.10: *Tra la funzione I di Lagrange, l'energia cinetica T e il momento angolare totale $\mathbf{\Gamma}$ sussiste la relazione*

$$IT \geq \frac{\Gamma^2}{2}, \quad \Gamma = \|\mathbf{\Gamma}\|.$$

Dimostrazione. Si fa uso di due proprietà geometriche note.¹³

- (i) La norma del prodotto vettoriale non supera il prodotto delle norme dei due vettori in gioco. In formula: $\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$.
- (ii) La norma della somma di più vettori $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ non supera la somma delle norme dei singoli vettori. In formula: $\|\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_n\| \leq \|\mathbf{a}_1\| + \dots + \|\mathbf{a}_n\|$.

Applicando le due diseuguaglianze appena richiamate abbiamo

$$(8.52) \quad \Gamma \leq \left\| \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{x}_j \wedge \mathbf{v}_j \right\| \leq \sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{x}_j \wedge \mathbf{v}_j\| \leq \sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{x}_j\| \|\mathbf{v}_j\|.$$

Ora, seguendo un suggerimento di Levi-Civita [84], introduciamo la matrice $2 \times N$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} \|\mathbf{x}_1\| & \dots & \sqrt{m_N} \|\mathbf{x}_N\| \\ \sqrt{m_1} \|\mathbf{v}_1\| & \dots & \sqrt{m_N} \|\mathbf{v}_N\| \end{pmatrix}$$

e calcoliamo il determinante del suo quadrato come¹⁴

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}\mathbf{B}^\top) &= \det \begin{pmatrix} I & \sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{x}_j\| \|\mathbf{v}_j\| \\ \sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{x}_j\| \|\mathbf{v}_j\| & 2T \end{pmatrix} \\ &= 2IT - \left(\sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{x}_j\| \|\mathbf{v}_j\| \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Infine, tenuto conto della (8.52), valutiamo

$$2IT \geq \left(\sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{x}_j\| \|\mathbf{v}_j\| \right)^2 \geq \Gamma^2,$$

come asserito. Q.E.D.

¹³ La prima proprietà è ovvia conseguenza del fatto che l'area di un parallelogrammo non può superare il prodotto delle lunghezze dei suoi lati. La seconda è una generalizzazione elementare della ben nota diseuguaglianza triangolare.

¹⁴ La quantità così calcolata è certamente non negativa. Per verificarlo si fa uso di una proprietà generale. Sia $m < n$, e sia \mathbf{L} una matrice rettangolare $m \times n$. Possiamo sempre costruire una matrice quadrata \mathbf{M} completando \mathbf{L} con $n - m$ vettori riga che siano ortogonali sia tra loro che rispetto a tutte le righe di \mathbf{L} , e che siano anche normalizzati. Si verifica subito che $\det(\mathbf{L}\mathbf{L}^\top) = \det(\mathbf{M}\mathbf{M}^\top) = (\det \mathbf{M})^2 \geq 0$.

Lemma 8.11: *Se all'istante t_c si ha una collisione esiste il limite $\bar{I} = \lim_{t \rightarrow t_c} I(t)$, e possono verificarsi due casi:*

- (i) $\bar{I} = 0$, che corrisponde a una collisione generale a N corpi;
- (ii) $\bar{I} > 0$ che corrisponde a una collisione tra due o più corpi, ma non a una collisione generale.

Dimostrazione. Fissiamo l'istante iniziale t_0 e consideriamo l'intervallo $[t_0, t_c)$. Mostriamo anzitutto che possiamo scegliere t_0 in modo che la funzione $\dot{I}(t)$ sia monotona crescente su tutto l'intervallo. A tal fine riprendiamo la prima delle eguaglianze (8.51), riscrivendola nella forma

$$\frac{1}{2} \frac{d\dot{I}}{dt} = 2E - V,$$

Poiché $V(t) \rightarrow -\infty$ con continuità per $t \rightarrow t_c$, possiamo sempre trovare $t_1 \in [t_0, t_c)$ tale che il secondo membro resta positivo su tutto l'intervallo $[t_1, t_c)$; basta quindi prendere t_1 come istante iniziale, continuando a denotarlo con t_0 , sicché la richiesta che il secondo membro sia positivo è soddisfatta.

Mostriamo ora che possiamo scegliere t_0 in modo che $\dot{I}(t)$ non cambi segno sull'intervallo $[t_0, t_c)$. Infatti $\dot{I}(t)$ è funzione continua e monotona crescente, e dunque ammette un limite che non può essere $-\infty$. Se $\dot{I}(t_0) > 0$ allora la richiesta è già soddisfatta. Se $\dot{I}(t_0) \leq 0$ allora possono darsi due casi: $\dot{I}(t)$ non raggiunge lo zero, e allora $\dot{I}(t)$ resta negativa e il limite è negativo o nullo; oppure il limite è positivo (incluso il caso $+\infty$), e allora, per continuità, deve esistere $t_1 \in [t_0, t_c)$ per cui $\dot{I}(t_1) = 0$, e in tal caso basta sostituire t_0 con un qualunque $t \in [t_1, t_c)$ perché $\dot{I}(t)$ resti positiva.

Veniamo ora all'andamento di $I(t)$ sull'intervallo $[t_0, t_c)$. Per definizione è una quantità non negativa. Inoltre è continua e monotona (decrecente o crescente) su tutto l'intervallo, e dunque ammette un limite, diciamo $\bar{I} = \lim_{t \rightarrow t_c} I(t)$. Qui possono verificarsi i due casi previsti nell'enunciato. (i) Si ha $\bar{I} = 0$, che corrisponde a una collisione generale; infatti l'espressione (8.49) si annulla se e solo se tutte le distanze mutue tra i corpi sono nulle. (ii) Si ha $\bar{I} > 0$, nel qual caso la distanza minima tra i corpi deve annullarsi, altrimenti non si avrebbe collisione, ma nella (8.49) almeno una delle distanze mutue deve essere positiva. Q.E.D.

Dimostrazione della proposizione 8.8. La collisione generale corrisponde al caso (i) del lemma 8.11, in cui il limite di $I(t)$ è zero. Perché ciò accada $I(t)$ deve essere monotona decrescente su un intervallo $[t_0, t_c)$. Inoltre $\dot{I}(t)$ deve essere negativa e monotona crescente sullo stesso intervallo e ciò implica che il limite di $\dot{I}(t)$ per $t \rightarrow t_c$ debba essere finito: questo è un fatto già messo in luce nella dimostrazione del lemma 8.11. Sullo stesso intervallo possiamo invertire la funzione $I(t)$, e considerare I come variabile indipendente. Abbiamo così

$$\ddot{I} = \frac{d\dot{I}}{dt} = \dot{I} \frac{d\dot{I}}{dI} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{I}^2}{dI}.$$

Combinando la seconda delle (8.51) con la diseuguaglianza del lemma 8.10 abbiamo

$$\frac{1}{4} \frac{d\dot{I}^2}{dI} = T + E \geq \frac{\Gamma^2}{2I} + E ,$$

ovvero

$$\frac{1}{4} d\dot{I}^2 \geq \left(\frac{\Gamma^2}{2I} + E \right) dI .$$

Integriamo ambo i membri sull'intervallo $[I, I_0]$ con $I_0 = I(t_0)$ e $I > 0$ ma arbitrariamente piccolo (il che corrisponde a prendere t arbitrariamente vicino a t_c); otteniamo

$$\frac{1}{4} (\dot{I}_0^2 - \dot{I}^2) - E(I_0 - I) \geq \frac{\Gamma^2}{2} (\ln I_0 - \ln I) .$$

Il membro di sinistra ha un limite finito per $t \rightarrow t_c$, il che corrisponde a $I \rightarrow 0$, perché $\dot{I}(t)$ ha un limite finito, come abbiamo appena osservato. Di conseguenza anche il membro di destra deve avere un limite finito, e in particolare deve essere finito il limite di $\Gamma^2 \ln I$. Se poniamo $\Gamma^2 > 0$ dobbiamo concludere che I tende a un limite positivo, il che contraddice il fatto che $I(t) \rightarrow 0$, indispensabile perché si abbia una collisione generale nel baricentro. Dunque deve essere $\Gamma = 0$, come asserito. *Q.E.D.*

8.4 Collisioni nel problema a tre corpi

Veniamo ora allo studio del caso particolare, ma particolarmente interessante, di un sistema di tre corpi interagenti con un potenziale Kepleriano. Oltre ai risultati validi in generale, che abbiamo discusso fin qui, possiamo ottenerne di più approfonditi riguardo alle possibili collisioni. La prima osservazione, immediata è che si possono verificare solo due casi: la collisione generale dei tre corpi nel baricentro, oppure la collisione tra due corpi mentre il terzo resta separato. Passiamo dunque a studiare separatamente i due casi.

8.4.1 Collisione generale a tre corpi

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente una collisione generale può verificarsi solo in caso di momento angolare nullo. Qui abbiamo un primo risultato, dovuto a Otto Dziobek [35].

Proposizione 8.12: *Se il momento angolare è nullo allora le orbite dei tre corpi giacciono su un piano invariante passante per il baricentro, o, eccezionalmente, su una retta passante per il baricentro.*

Dimostrazione. Osserviamo subito che a ogni istante i tre vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ giacciono in un piano passante per l'origine, che è il baricentro, e lo stesso accade per i tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Ciò segue dalle equazioni del baricentro e della conservazione della quantità di moto totale, che deve essere nulla, come scritto nelle (8.13) e (8.15). Non è detto a priori, naturalmente, che i due piani debbano coincidere, né che siano invarianti nel tempo. Risolviamo le due equazioni di conservazione rispetto a $m_3 \mathbf{x}_3$ e

$m_3 \mathbf{v}_3$, ottenendo

$$(8.53) \quad m_3 \mathbf{x}_3 = -m_1 \mathbf{x}_1 - m_2 \mathbf{x}_2, \quad m_3 \mathbf{v}_3 = -m_1 \mathbf{v}_1 - m_2 \mathbf{v}_2,$$

e sostituiamo queste espressioni nell'equazione della conservazione del momento della quantità di moto, che è nulla per ipotesi, calcolando

$$\begin{aligned} & m_1 \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{v}_2 + m_3 \mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{v}_3 \\ &= m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_3}\right) \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{v}_1 + m_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_3}\right) \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{v}_2 + \frac{m_1 m_2}{m_3} (\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{v}_2 + \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{v}_1) = 0. \end{aligned}$$

Raccogliendo i fattori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ otteniamo l'equazione

$$(8.54) \quad \left[\left(1 + \frac{m_1}{m_3}\right) \mathbf{x}_1 + \frac{m_2}{m_3} \mathbf{x}_2 \right] \wedge m_1 \mathbf{v}_1 = - \left[\frac{m_1}{m_3} \mathbf{x}_1 + \left(1 + \frac{m_2}{m_3}\right) \mathbf{x}_2 \right] \wedge m_2 \mathbf{v}_2.$$

Perché l'eguaglianza sia vera i vettori dei due membri devono avere in particolare la stessa direzione, il che implica che i quattro vettori in \mathbb{R}^3

$$(8.55) \quad \left(1 + \frac{m_1}{m_3}\right) \mathbf{x}_1 + \frac{m_2}{m_3} \mathbf{x}_2, \quad \frac{m_1}{m_3} \mathbf{x}_1 + \left(1 + \frac{m_2}{m_3}\right) \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_2$$

debbano appartenere tutti allo stesso piano. Qui possiamo senz'altro assumere $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \neq 0$. Infatti la situazione in cui due velocità siano nulle non può mantenersi nel tempo, perché le accelerazioni non possono essere tutte nulle.¹⁵

Sia ora \mathbf{u} un vettore unitario ortogonale a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Siano poi $\alpha_1 = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{u}$ e $\alpha_2 = \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{u}$ le proiezioni dei vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ nella direzione \mathbf{u} . Allora α_1, α_2 devono soddisfare l'equazione lineare

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{m_1}{m_3} & \frac{m_2}{m_3} \\ \frac{m_1}{m_3} & 1 + \frac{m_2}{m_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0,$$

che si ricava immediatamente proiettando su \mathbf{u} i primi due vettori della (8.55). La matrice non è singolare, e dunque deve essere $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Ora dobbiamo considerare separatamente due casi: (a) i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono indipendenti, oppure (b) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono paralleli.

Nel caso (a) il vettore \mathbf{u} è unico, e concludiamo che $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ appartengono entrambi al piano Π generato da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Per le (8.53), anche $\mathbf{x}_3, \mathbf{v}_3$ appartengono allo stesso piano, che resta di conseguenza invariante per le orbite.

Nel caso (b) i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ identificano una retta, e per l'arbitrarietà di \mathbf{u} concludiamo che la proiezione di $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ sul piano ortogonale a quella retta deve annullarsi. Concludiamo che i vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono tutti allineati, e lo stesso vale per $\mathbf{x}_3, \mathbf{v}_3$; dunque il moto avviene lungo una retta passante per il baricentro. *Q.E.D.*

¹⁵ Esistono orbite per cui una delle masse resta ferma nel baricentro, ma le velocità delle altre due masse non possono azzerarsi se non istantaneamente. In tal caso basta etichettare la massa ferma come m_3 .

8.4.2 Collisione binaria

Veniamo ora al caso di collisione tra due dei tre corpi, mentre il terzo resta separato. Denotando genericamente i tre corpi con P_1, P_2, P_3 supponiamo che la collisione interessi i corpi P_2, P_3 . Denotiamo la distanza minima tra i corpi (con un cambiamento di notazione rispetto alla definizione (8.47)) come

$$\varrho = \min_{1 \leq j < k \leq 3} r_{j,k}, \quad r_{j,k} = \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|.$$

Denotiamo anche, per comodità, i moduli delle velocità dei tre corpi con $v_j = \|\mathbf{v}_j\|$. Infine ricordiamo la definizione della funzione I di Lagrange, che si esprime in funzione delle distanze mutue come nella (8.49), ossia

$$I = \frac{1}{M} \sum_{k < j} m_j m_k r_{j,k}^2, \quad M = \sum_{j=1}^N m_j,$$

dove M è la massa totale del sistema.

Proposizione 8.13: *Se la collisione tra i corpi P_2, P_3 avviene a un istante t_c allora:*

- (i) *Esiste un intervallo $t_0 \leq t < t_c$ in cui la distanza minima è $\varrho(t) = r_{2,3}(t)$.*
- (ii) *La distanza $\|\mathbf{x}_1\|$ del punto P_1 dal baricentro (origine del nostro riferimento) tende a un limite finito; la velocità v_1 tende anch'essa a un limite finito.*
- (iii) *Le velocità $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ diventano infinite, ma restano finite le quantità $\varrho \mathbf{v}_2^2$ e $\varrho \mathbf{v}_3^2$, e valgono le relazioni*

$$(8.56) \quad \begin{aligned} & \sqrt{\varrho} m_2 \mathbf{v}_2 + \sqrt{\varrho} m_3 \mathbf{v}_3 \rightarrow 0, \\ & \varrho \mathbf{v}_2^2 \rightarrow \frac{2m_3^2}{m_2 + m_3}, \quad \varrho \mathbf{v}_3^2 \rightarrow \frac{2m_2^2}{m_2 + m_3}. \end{aligned}$$

- (iv) *La quantità $\lim_{t \rightarrow t_c} I(t) = \bar{I}$ è finita. Inoltre all'istante della collisione le distanze $r_{1,2}, r_{1,3}$ sono uguali e hanno il valore positivo ben definito*

$$(8.57) \quad r_{1,2} = r_{1,3} = \sqrt{\frac{M\bar{I}}{m_1 m_2 + m_1 m_3}} > 0.$$

Dimostrazione. (i) Per il lemma 8.11 si ha $\bar{I} = \lim_{t \rightarrow t_c} I(t)$ che nel caso di collisione tra due soli corpi è positivo. Poiché $r_{2,3}(t) \rightarrow 0$, i vertici P_2, P_3 del triangolo $P_1 P_2 P_3$ coincidono all'istante della collisione, e dunque anche i lati $P_1 P_2$ e $P_1 P_3$ devono coincidere e avere la stessa lunghezza, che deve essere positiva altrimenti si avrebbe $\bar{I} = 0$. Per continuità, esiste un $d > 0$ tale che in un intervallo $[t_0, t_c)$ vale almeno una delle disequaglianze

$$(8.58) \quad r_{1,2} > d, \quad r_{1,3} > d.$$

Poiché $r_{2,3}(t) \rightarrow 0$, esiste un intervallo $[t_1, t_c) \subset [t_0, t_c)$, tale che $0 < r_{2,3} < \delta < d/2$. Supponiamo, per contraddizione, che una delle distanze $r_{1,2}$ o $r_{1,3}$ diventi la più piccola per un certo $t' \in (t_1, t_c)$, e, per fissare le idee, sia $r_{1,2}$. Allora deve essere $r_{1,2} < \delta$,

e dunque, per la diseuguaglianza triangolare, anche $r_{1,3} < 2\delta < d$; questo contraddice la (8.58), e dunque $r_{2,3}$ resta la distanza più piccola su tutto l'intervallo $[t_0, t_c)$.

(ii) Poiché $I(t) \rightarrow \bar{I}$, le distanze $r_{1,2}$ e $r_{1,3}$ restano inferiormente limitate nell'intervallo $[t_0, t_c)$, cosa che abbiamo già osservato. Dall'equazione di Newton per P_1

$$\ddot{\mathbf{x}}_1 = \frac{m_2}{r_{1,2}^3}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \frac{m_3}{r_{1,3}^3}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)$$

otteniamo la diseuguaglianza

$$\|\ddot{\mathbf{x}}_1\| \leq \frac{m_2}{r_{1,2}^2} + \frac{m_3}{r_{1,3}^2},$$

ove il membro di destra è pure limitato. Integrando due volte abbiamo che sia $v_1(t)$ che $\|\mathbf{x}_1(t)\|$ restano limitate e tendono a un limite ben definito all'istante della collisione, come affermato.

(iii) Mostriamo che almeno una delle velocità v_2 e v_3 deve tendere all'infinito. A tal fine ricordiamo che l'energia totale $E = T + V$ si conserva. Per l'energia potenziale V sappiamo dalla proposizione 8.6 che deve essere $V(t) \rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow t_c$. Dunque, per la conservazione dell'energia, deve essere

$$T = \frac{m_1}{2}v_1^2 + \frac{m_2}{2}v_2^2 + \frac{m_3}{2}v_3^2 \xrightarrow{t \rightarrow t_c} +\infty,$$

e dal momento che v_1 resta limitata una almeno tra v_2 e v_3 deve diventare infinita. Poiché la distanza minima $\varrho(t) = r_{2,3}(t)$ deve tendere a zero, ricaviamo subito

$$\varrho V = -m_2 m_3 - \frac{\varrho m_1 m_2}{r_{1,2}} - \frac{\varrho m_1 m_3}{r_{1,3}} \xrightarrow{t \rightarrow t_c} -m_2 m_3.$$

Per la conservazione dell'energia, dato che $\varrho E \rightarrow 0$, otteniamo

$$\varrho T = \varrho(E - V) \xrightarrow{t \rightarrow t_c} m_2 m_3.$$

e poiché $\varrho v_1^2 \rightarrow 0$ (perché v_1 resta limitato, come abbiamo mostrato) otteniamo anche

$$(8.59) \quad \frac{\varrho m_2}{2}v_2^2 + \frac{\varrho m_3}{2}v_3^2 \xrightarrow{t \rightarrow t_c} m_2 m_3.$$

Ne segue che anche le quantità $\sqrt{\varrho}\mathbf{v}_2$ e $\sqrt{\varrho}\mathbf{v}_3$ restano limitate senza tendere necessariamente a zero, perché una almeno tra v_2 e v_3 deve diventare infinita, mentre $\sqrt{\varrho}\mathbf{v}_1 \rightarrow 0$ perché $v_1 = \|\mathbf{v}_1\|$ resta limitata. Ora ricordiamo che per l'equazione della quantità di moto abbiamo $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3 = 0$, e otteniamo $\sqrt{\varrho}m_2\mathbf{v}_2 + \sqrt{\varrho}m_3\mathbf{v}_3 \rightarrow 0$, che è la prima delle (8.56), ovvero che all'istante dell'urto deve essere

$$\varrho m_2^2 v_2^2 = \varrho m_3^2 v_3^2.$$

Risolvendo rispetto a ϱv_2^2 e ϱv_3^2 il sistema formato da quest'ultima equazione combinata con la (8.59) si ricavano le altre due relazioni (8.56). Da qui si vede che ambedue le velocità v_2, v_3 devono tendere all'infinito.

(iv) Dalla definizione (8.48), ossia $I = \sum_{j=1}^3 m_j \mathbf{x}_j^2$, e dall'equazione del baricentro abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{I} &= \sum_{j=1}^3 m_j \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^3 m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_3) \cdot \mathbf{v}_j \\ &= m_1 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \cdot \mathbf{v}_1 + m_2 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \cdot \mathbf{v}_2 . \end{aligned}$$

Osservando che $r_{2,3} v_2 = \sqrt{\varrho} \sqrt{\varrho v_2^2} \rightarrow 0$ otteniamo la disuguaglianza

$$\frac{1}{2} |\dot{I}| \leq m_1 r_{1,3} v_1 + m_2 r_{2,3} v_2 \xrightarrow{t \rightarrow t_c} m_1 r_{1,3} v_1 ,$$

che per la (8.56) è una quantità limitata. Integrando concludiamo che $\bar{I} < +\infty$, come affermato. Dato che $r_{2,3} \rightarrow 0$, all'istante della collisione abbiamo

$$\bar{I} = \frac{1}{M} (m_1 m_2 r_{1,2}^2 + m_1 m_3 r_{1,3}^2) = \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3}{M} r_{1,3}^2 ,$$

da cui segue immediatamente la (8.57).

Q.E.D.