

9

LA REGOLARIZZAZIONE DI LEVI-CIVITA E SUNDMAN

Il lettore avrà osservato che la discussione del capitolo precedente si limita allo studio di soluzioni particolari del problema dei tre corpi, con particolare attenzione alle orbite omografiche e alle collisioni. Questo capitolo è dedicato all'esposizione dei risultati di Levi-Civita e Sundman.

I numerosi metodi sviluppati dai più grandi matematici e astronomi del XIX secolo si concentrano prevalentemente sullo sviluppo delle soluzioni in forma di serie trigonometriche negli angoli, o serie di Fourier — l'equivalente degli epicicli classici. Tale, di fatto, è la forma che ci si attende per un sistema integrabile nel senso di Liouville-Arnold-Jost; si può ben dire che l'obiettivo di quegli astronomi e matematici era dimostrare che il modello planetario è integrabile. L'applicazione diretta dei teoremi di Liouville e di Arnold-Jost viene però esclusa dal teorema di non esistenza di integrali primi analitici indipendenti dall'Hamiltoniana dimostrato nella memoria [103], seguita pochi anni dopo dal trattato [104].

La svolta successiva avviene nei primi anni del secolo XX: Tullio Levi-Civita propone un metodo di *regolarizzazione delle collisioni* che consente di trattare in forma analitica anche il caso di urti [82][83][84]. L'idea brillante consiste nel sostituire la variabile temporale con una variabile indipendente diversa, che chiameremo *tempo fittizio*, grazie alla quale si possono prolungare le soluzioni oltre l'istante della collisione, descrivendo l'urto come elastico mediante una funzione olomorfa. Ciò apre la strada al lavoro successivo di Carl Sundman [120][121][122], che trova il modo di scrivere la soluzione generale sotto forma di serie di potenze uniformemente convergenti nel tempo fittizio, per tutti i tempi. L'indiscutibile eleganza matematica del risultato non è però affiancata da un'effettiva utilità dal punto di vista pratico. Le soluzioni così ottenute non escludono collisioni, che per la dinamica planetaria sarebbero eventi catastrofici.

Tenuto conto dello scopo didattico di queste note nei primi paragrafi si dà particolare peso al caso più semplice, quello del moto centrale con caduta sul centro e della collisione tra due corpi. Poi si passa alla discussione generale della collisione binaria nel problema dei tre corpi.

9.1 Il moto centrale e il problema dei due corpi

Partiamo dal caso più semplice di orbita di collisione: quella che può verificarsi in un sistema di due corpi. Ci poniamo l'obiettivo di mostrare come si possa in qualche modo regolarizzare l'urto elastico, in un senso che verrà spiegato nel corso della discussione. Volendo, si può considerare questo paragrafo come un esercizio di riscaldamento in vista della discussione ben più complessa che verrà affrontata più avanti.

Al problema dei due corpi abbiamo già dedicato il paragrafo 2.3, ove abbiamo visto come lo si possa ricondurre al problema più semplice del moto in un campo di forze centrali. È del tutto ovvio che nel caso di due corpi qualunque collisione rientra nello schema delle collisioni generali. Dunque dobbiamo di necessità assumere che il momento angolare $\mathbf{\Gamma}$ sia nullo. Nella riduzione al caso delle forze centrali ci si riconduce automaticamente alla caduta sul centro discussa nel paragrafo 2.5.3. In tal caso sappiamo che il moto deve svolgersi lungo una retta, e questo è quanto faremo subito sotto. L'estensione al caso dei tre corpi però richiede di considerare anche orbite piane o spaziali, cosa che faremo successivamente.

9.1.1 Collisione lungo una retta

Possiamo riallacciarci al paragrafo 8.2, dedicato allo studio delle soluzioni omografiche di Lagrange. In quel paragrafo abbiamo osservato in particolare, nell'esempio 8.1, che tutte le orbite del problema a due corpi sono necessariamente omografiche. Abbiamo anche osservato che l'equazione per la distanza tra i corpi coincide con l'equazione radiale che abbiamo ricavato nel corso della discussione del moto centrale. Riscriviamo direttamente l'equazione dell'energia (8.28) per il potenziale Kepleriano $V(r) = -k/r$, con k costante, e ricordando che le orbite di collisione sono caratterizzate da momento angolare nullo, e dunque dobbiamo riscrivere quell'equazione ponendovi $L = 0$, ossia come

$$(9.1) \quad \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{k}{r} = E .$$

Esercizio 9.1: Tracciare il diagramma di fase nel semipiano $r > 0$ per il modello descritto dall'equazione dell'energia (9.1).

Per un primo esame consideriamo il caso di energia nulla, $E = 0$. L'equazione diventa

$$(9.2) \quad \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2k}{r}} ,$$

ovvero, separando le variabili,

$$(9.3) \quad \pm \sqrt{\frac{r}{2k}} dr = dt .$$

L'osservazione immediata è che per $r = 0$ cadono le proprietà di regolarità richieste per l'applicazione del teorema di esistenza delle soluzioni. Assumiamo dunque $r > 0$

e integriamo ambo i membri. Abbiamo

$$\sqrt{\frac{2}{9k}} r^{3/2} = t + a ,$$

ovvero, mediante inversione,

$$(9.4) \quad r = \left(\frac{9k}{2}\right)^{1/3} t^{2/3} + b ,$$

con costanti a o b da determinarsi mediante i dati iniziali. Qui si inserisce qualche riflessione. Ponendo $b = 0$ notiamo subito che la funzione $r(t)$ è definita per valori sia negativi che positivi di t , e che $r(0) = 0$ può ben vedersi come limite per $t \rightarrow 0$. Possiamo leggere la soluzione trovata in due modi: (i) se consideriamo un istante iniziale $t_0 < 0$ stiamo descrivendo un'evoluzione che termina con un urto al tempo $t = 0$; (ii) se consideriamo l'intervallo $t > 0$ abbiamo una soluzione che si stacca dall'origine al tempo $t = 0$: qualcosa di simile allo sparo di un proiettile a cui si accompagna il rinculo dell'arma. Dal punto di vista analitico però dobbiamo considerare le due possibilità come soluzioni diverse e non prolungabili oltre l'istante di collisione o prima della separazione. Inoltre dobbiamo osservare che per $t \rightarrow 0$ la funzione presenta una singolarità,¹ e si ha anche $\dot{r} \rightarrow \pm\infty$.

Se consideriamo il caso $E \neq 0$ ricadiamo in una situazione simile. Riscriviamo l'equazione dell'energia come

$$(9.5) \quad \dot{r} = \pm \sqrt{2 \left(E + \frac{k}{r} \right)}$$

ovvero, in forma più adatta all'integrazione,

$$(9.6) \quad \frac{1}{\sqrt{2E}} \sqrt{\frac{r}{r + \frac{k}{E}}} dr = dt .$$

Per energia negativa, $E < 0$, dobbiamo considerare l'intervallo $0 < r < -k/E$ ove il radicando è positivo; per energia positiva l'intervallo che ci interessa è l'intera semiretta $r > 0$. Il calcolo dell'integrale, ignorando la costante additiva da determinarsi mediante le condizioni iniziali, ci dà

$$\sqrt{r \left(r + \frac{k}{E} \right)} - \frac{k}{E} \ln \left(\sqrt{r} + \sqrt{r + \frac{k}{E}} \right) = t .$$

Riconosciamo ancora una singolarità in $r = 0$, sempre presente. Nel caso $E < 0$ se ne aggiunge una seconda; ciò corrisponde a un'orbita che si stacca dall'origine al tempo

¹ Con un momento di riflessione si vede subito che $r(t) = 0$ è una soluzione ovvia dell'equazione (9.2) che corrisponde alla condizione iniziale $r(0) = 0$. D'altra parte anche la soluzione (9.4) soddisfa la stessa condizione iniziale, sicché si perde non solo la regolarità, ma anche l'unicità della soluzione.

$t = 0$ per poi ricadervi in un tempo finito.²

La descrizione del un singolo urto mediante la formula che abbiamo trovato è poco agevole, e tutto sommato anche poco utile. Ai fini di un'analisi qualitativa dell'urto è più utile ricorrere a uno sviluppo in serie di potenze del membro di sinistra della (9.6). Evitando i calcoli laboriosi dello sviluppo completo limitiamoci a scrivere i primi termini facendo uso dello sviluppo della funzione $(1+x)^{-1/2}$, e calcoliamo

$$\sqrt{\frac{r}{2k}} \left(1 + \frac{Er}{k}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{r}{2k}} \left(1 - \frac{E}{2k}r + \frac{3E^2}{8k^2}r^2 - \frac{5E^3}{16k^3}r^3 + \dots\right).$$

La serie tra parentesi è convergente in un intorno di $r = 0$, e rappresenta una funzione analitica; la singolarità per $r = 0$ resta confinata nel fattore \sqrt{r} . Sostituendo lo sviluppo nell'equazione (9.6) e integrando termine a termine otteniamo

$$\frac{r^{3/2}}{\sqrt{2k}} \left(\frac{2}{3} - \frac{E}{5k}r + \frac{3E^2}{28k^2}r^2 - \frac{5E^3}{72k^3}r^3 + \dots\right) = t.$$

Anche qui la serie tra parentesi è convergente in un intorno di $r = 0$, e la singolarità resta nel fattore $r^{3/2}$. Con un procedimento standard per gli sviluppi in serie di potenze potremmo invertire questa relazione sviluppando r in serie di potenze di $t^{1/3}$, e limitandoci al primo termine otteniamo

$$r = \left(\frac{9k}{2}\right)^{1/3} t^{2/3} + \dots,$$

sicché la prima approssimazione coincide con la soluzione trovata per $E = 0$.

Poniamoci ora la domanda: *è possibile rendere regolare in qualche modo la soluzione anche in corrispondenza alla collisione?* La risposta è positiva, e costituisce l'esempio più semplice di *regolarizzazione di Levi-Civita*.

Il suggerimento viene dal calcolo che abbiamo svolto: conviene cambiare la variabile temporale considerando $t^{1/3}$ come variabile indipendente. Differenziando otteniamo $\frac{dt}{3t^{2/3}} = \frac{dt}{3r}$, il che consiglia (seguendo Levi-Civita) di introdurre la nuova variabile temporale τ , che chiameremo *tempo fittizio*, tramite la relazione

$$(9.7) \quad d\tau = \frac{dt}{r},$$

² In questo secondo caso possiamo anche immaginare una successione di urti elastici, ma riflettendoci scopriamo qualcosa di paradossale, dovuto proprio alla non unicità delle soluzioni messe in evidenza nella nota 1. Il distacco della soluzione può avvenire a un istante arbitrario: basta sostituire $t - t_0$ al posto di t , perché una traslazione temporale è ammessa. Una volta avvenuto il distacco l'evoluzione successiva è univocamente determinata fino all'istante di ricaduta. Poi i due corpi possono rimanere legati per un tempo arbitrario, fin che si verifica un nuovo distacco, e così via. Buffo, forse, ma non incompatibile con le equazioni che abbiamo scritto. Il caso più semplice che possiamo immaginare è che gli urti avvengano a intervalli regolari, ma non possiamo descrivere l'evoluzione con un'unica funzione regolare del tempo; al più potremmo raccordare con continuità, ma senza differenziabilità, diversi tratti corrispondenti a diversi dati iniziali opportunamente scelti.

dove $r(t)$ è da intendersi come ricavata dalla dinamica. Il limite $t \rightarrow t_c$ può creare qualche perplessità, perché sappiamo che $r \rightarrow 0$, e quindi il termine di destra diventerebbe infinito, ma la forma stessa della soluzione già ricavata ci dice che $\lim_{t \rightarrow t_c} \int_{t_0}^t \frac{ds}{r}$ resta finito.

Riscriviamo ora l'equazione dell'energia (9.1) in termini del tempo fittizio τ , osservando che per la (9.7) abbiamo $\frac{d}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{r} \frac{d}{d\tau}$, e otteniamo

$$(9.8) \quad \frac{1}{2r^2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{k}{r} = E .$$

Qui è opportuno considerare separatamente i due casi $E = 0$ e $E < 0$. Nel caso $E = 0$ otteniamo dalla (9.8)

$$\frac{dr}{\sqrt{2kr}} = d\tau .$$

Integrando termine a termine con la condizione iniziale $r(0) = 0$ otteniamo $\sqrt{\frac{2r}{k}} = \tau$, che si inverte come

$$(9.9) \quad r = \frac{k}{2} \tau^2 .$$

La soluzione così trovata è analitica anche in $\tau = 0$, e possiamo leggerla come la rappresentazione di un urto elastico: i due corpi rimbalzano senza mutare la direzione e senza perdita di energia ma invertendo la loro velocità, il che introduce una discontinuità sulla velocità; la singolarità viene riassorbita dal cambiamento della variabile temporale. Nel caso $E < 0$ procediamo in modo analogo scrivendo l'equazione come

$$\frac{dr}{\sqrt{Er^2 + kr}} = d\tau ,$$

la cui soluzione con dato iniziale $r(0) = 0$ può scriversi come

$$\arcsin \left(1 + \frac{2Er}{k} \right) = \sqrt{-2E} \tau + \frac{\pi}{2}$$

e da qui, per inversione, si calcola

$$r = -\frac{k}{2E} (1 - \cos \sqrt{-2E} \tau) = -\frac{k}{2E} \sin^2 \sqrt{-\frac{E}{2}} \tau .$$

La soluzione così trovata può interpretarsi come una successione di urti elastici che avvengono a intervalli regolari nel tempo fittizio τ . Il fatto interessante è che abbiamo ottenuto una funzione analitica per tutti i $\tau \in \mathbb{R}$, che descrive l'evoluzione della distanza sia prima che dopo l'urto.³

Esercizio 9.2: Risolvere l'equazione (9.8) nel caso $E > 0$.

³ È appena il caso di notare che la forma analitica della soluzione rimuove il paradosso messo in evidenza nella nota 2.

9.1.2 Regolarizzazione nel caso parabolico

Supponendo di aver effettuato la riduzione al moto centrale per il problema dei due corpi, come descritto nel paragrafo 2.3, veniamo a studiare in dettaglio il caso in cui l'orbita sia una parabola, sicché porremo $E = 0$. La scelta può creare qualche perplessità, perché nella descrizione generale del moto centrale il caso della parabola si presenta come eccezionale. Ma si tratta di una perplessità che trova poche giustificazioni nella pratica: l'ipotesi che una cometa si muova su un'orbita parabolica è alla base di tutti i metodi di determinazione dei parametri orbitali delle comete da Newton in poi, fino a Gauss. Per gli scopi di queste note lo studio svolto qui servirà in seguito per la regolarizzazione di collisioni binarie nel problema dei tre corpi.

Qui conviene affrontare il problema in ambito Hamiltoniano. Scriviamo dunque l'Hamiltoniana per il problema del moto centrale come

$$(9.10) \quad H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{r}, \quad r = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

con le consuete notazioni $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ per le coordinate e i momenti, e restringendoci al potenziale Kepleriano.

A questo punto introduciamo la nuova variabile temporale τ definita mediante la (9.7), che riscriviamo

$$(9.11) \quad d\tau = \frac{dt}{r}.$$

Le equazioni per una Hamiltoniana generica $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ dovrebbero risciversi nella forma

$$(9.12) \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = r\nabla_{\mathbf{p}}H, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -r\nabla_{\mathbf{x}}H,$$

con le notazioni $\nabla_{\mathbf{x}}$ e $\nabla_{\mathbf{p}}$ per i gradienti rispetto alle variabili canoniche \mathbf{x} e \mathbf{p} . L'aspetto sgradevole di queste equazioni è che non hanno la forma canonica. Possiamo però ripristinarla restringendo lo studio alle orbite su una superficie di energia $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = E$ e ricorrendo a un artificio suggerito da Poincaré.

Lemma 9.1: *Per un valore di energia E , arbitrario ma fissato, e con la variabile temporale τ definita dalla (9.11) le equazioni per l'Hamiltoniana (9.10) sulla superficie di energia $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = E$ hanno ancora forma canonica con l'Hamiltoniana*

$$(9.13) \quad K(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{r\mathbf{p}^2}{2m} - Er,$$

ovvero

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - E \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

sulla superficie $K(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = k$.

Dimostrazione. Dalla (9.11) otteniamo $\frac{d}{d\tau} = r\frac{d}{dt}$, e le equazioni (9.12) si riscrivono come

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \nabla_{\mathbf{p}}K, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\nabla_{\mathbf{x}}K - \frac{\mathbf{x}}{r}(H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - E),$$

che sulla superficie $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = E$ coincidono con le equazioni di Hamilton per l'Hamiltoniana (9.13), come asserito. Q.E.D.

Veniamo ora allo studio dell'Hamiltoniana (9.13) nel caso parabolico. Come passo preliminare conviene considerare il caso semplice di moto rettilineo con energia $E = 0$, che abbiamo già discusso nel paragrafo 9.1.1, rivedendolo in ambito Hamiltoniano. Consideriamo dunque l'Hamiltoniana

$$K_0 = \frac{rp^2}{2m}, \quad r \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R},$$

e applichiamo il teorema di Liouville prendendo come integrale primo $\xi = rp^2$. Per inversione ricaviamo $p = \sqrt{\xi/r}$, e con una facile quadratura costruiamo la funzione generatrice

$$(9.14) \quad S_0(\xi, r) = \int \sqrt{\frac{\xi}{r}} dr = 2\sqrt{\xi r}.$$

Abbiamo così la trasformazione canonica, in forma implicita,

$$p = \sqrt{\frac{\xi}{r}}, \quad \eta = \sqrt{\frac{r}{\xi}}$$

dove η è la variabile coniugata a ξ ; con una facile inversione otteniamo

$$(9.15) \quad r = \xi\eta^2, \quad p = \frac{1}{\eta}.$$

L'Hamiltoniana trasformata non richiede nessun calcolo, perché sarà evidentemente

$$K_0 = \frac{\xi}{2m}$$

con equazioni

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{1}{2m}, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = 0.$$

Dalla soluzione $\eta = \frac{\tau}{2m}$ (assumendo il dato iniziale $\eta(0) = 0$) otteniamo immediatamente

$$r = \frac{\xi}{2m} \tau^2,$$

che coincide con la soluzione (9.9) se si tiene conto che in quel caso abbiamo posto $m = 1$, e che dobbiamo identificare k in quell'equazione con la nostra costante ξ .

Veniamo ora al caso tridimensionale, sempre assumendo $E = 0$ e dunque considerando l'Hamiltoniana (9.13) riscritta come

$$(9.16) \quad K(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2).$$

Come nel caso del moto rettilineo ci poniamo l'obiettivo di trovare una trasformazione canonica che ci consenta di scrivere un'Hamiltoniana di forma il più semplice possibile.

Qui dobbiamo ricorrere a qualche considerazione di carattere euristico.⁴ Si tratta, in buona sostanza, di estendere al caso tridimensionale la trasformazione canonica (9.15). Si può osservare, in quel caso, che la seconda metà della trasformazione, $p = 1/\eta$, richiama la forma di una trasformazione puntuale in quanto coinvolge la sola coppia di variabili p, η . Si tratta di un'inversione che si estende in modo naturale al caso tridimensionale ponendo $\mathbf{p} = \boldsymbol{\eta}/\eta^2$. Da qui è immediato scrivere la funzione generatrice

$$S(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}) = \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}}{\eta^2} .$$

Ora non resta che passare dalle considerazioni euristiche alla verifica che la generatrice così trovata risponde alle nostre richieste.

Proposizione 9.2: *Sia*

$$(9.17) \quad K(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{r\mathbf{p}^2}{2m} , \quad r = \|\mathbf{x}\|$$

l'Hamiltoniana del moto centrale che descrive la dinamica sulla varietà $K(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = k$, dove k è la costante del potenziale Kepleriano, rispetto al tempo fittizio τ definita dalla (9.11). La funzione generatrice

$$(9.18) \quad S(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}) = \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}}{\eta^2}$$

definisce una trasformazione canonica in forma implicita

$$(9.19) \quad \boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{x}}{\eta^2} - 2\boldsymbol{\eta} \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}}{\eta^4} , \quad \mathbf{p} = \frac{\boldsymbol{\eta}}{\eta^2}$$

che trasforma l'Hamiltoniana (9.17) nella nuova Hamiltoniana

$$(9.20) \quad K(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\boldsymbol{\xi}}{2m} = \frac{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}}{2m} .$$

La trasformazione canonica si scrive in forma esplicita, con le notazioni $p^2 = \mathbf{p}^2$ e $\eta^2 = \boldsymbol{\eta}^2$,

$$(9.21) \quad \mathbf{x} = \eta^2 \boldsymbol{\xi} - 2(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\eta} , \quad \mathbf{p} = \frac{\boldsymbol{\eta}}{\eta^2} ,$$

con inversa

$$(9.22) \quad \boldsymbol{\xi} = p^2 \mathbf{x} - 2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{p} , \quad \boldsymbol{\eta} = \frac{\mathbf{p}}{p^2} .$$

La dimostrazione richiede solo calcoli elementari, che il lettore potrà svolgere senza difficoltà.

⁴ Nella memoria [84] e nel trattato [116] si fa uso del metodo di Hamilton–Jacobi. In quel caso il problema consiste nel trovare una soluzione completa, che però non viene ricavata con un metodo diretto. Anche in quel caso si è costretti a ricorrere a considerazioni euristiche che non sembrano più semplici o immediate di quelle svolte qui.

9.1.3 Le orbite paraboliche

Completiamo il paragrafo determinando la forma dell'orbita nel caso parabolico. Scriviamo anzitutto le equazioni per l'Hamiltoniana (9.20)

$$\frac{d\xi}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{\xi}{2m\xi}.$$

Da qui si vede che ξ è costante, mentre η evolve linearmente in τ . Fissati i dati iniziali ξ_0, η_0 abbiamo dunque le soluzioni

$$(9.23) \quad \xi(\tau) = \xi_0, \quad \eta(\tau) = -\frac{\xi_0}{2m\|\xi_0\|}\tau + \eta_0.$$

Sostituendo queste ultime formule nella (9.21) si trovano le funzioni $\mathbf{x}(\tau)$ che descrivono il movimento. Tuttavia, con qualche astuzia, possiamo calcolare la forma dell'orbita senza ricorrere al calcolo esplicito di $\mathbf{x}(\tau)$. La dimostrazione fa uso del fatto che l'Hamiltoniana $K(\xi) = \frac{\xi}{2m}$ ammette l'integrale primo $\xi \wedge \eta$. D'altra parte dalle (9.22) si vede immediatamente che questa quantità altro non è che il momento angolare, e dunque la scriveremo

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p} = \xi \wedge \eta.$$

Ciò, del resto, non stupisce più di tanto: il momento angolare si conserva per ogni moto di tipo centrale. Consideriamo separatamente i casi $\mathbf{\Gamma} \neq 0$ e $\mathbf{\Gamma} = 0$.

Proposizione 9.3: *Siano assegnati i dati iniziali ξ_0, η_0 con $\|\xi_0\| = 2mk$.*

(i) *Per $\mathbf{\Gamma} \neq 0$ l'orbita giace nel piano determinato da ξ_0, η_0 , ed è una parabola descritta dall'equazione polare*

$$(9.24) \quad r = \frac{\Gamma^2}{mk} \cdot \frac{1}{1 + \cos \vartheta}, \quad \Gamma = \|\xi_0 \wedge \eta_0\| > 0,$$

avente fuoco nell'origine e vertice nella direzione ξ_0 .

(ii) *Per $\mathbf{\Gamma} = 0$ l'orbita è una semiretta spiccata dall'origine avente la direzione del vettore ξ_0 e verso opposto, descritta dall'equazione*

$$(9.25) \quad \mathbf{x}(\tau) = -r(\tau)\mathbf{w}, \quad r(\tau) = \frac{k}{2m}(\tau - \tau_0)^2, \quad \mathbf{w} = \frac{\xi_0}{2mk}.$$

Il resto del paragrafo è dedicato alla dimostrazione della proposizione.

Osserviamo anzitutto che la condizione $\|\xi_0\| = 2mk$ segue di necessità dal fatto che stiamo considerando la dinamica sulla superficie $K(\xi) = k$, la costante del potenziale Kepleriano. Supponendo che sia $\mathbf{\Gamma} \neq 0$ ne segue che l'orbita giace nel piano ortogonale al vettore $\mathbf{\Gamma} = \xi_0 \wedge \eta_0$, come affermato. La forma dell'orbita si trova rielaborando opportunamente l'espressione del quadrato del momento angolare. A tal fine svolgiamo un breve calcolo preliminare. Dalla prima delle (9.19), moltiplicando scalarmente per η, \mathbf{x} e ξ , otteniamo rapidamente le tre eguaglianze

$$(9.26) \quad \xi \cdot \eta = -\frac{\mathbf{x} \cdot \eta}{\eta^2}, \quad \xi \cdot \mathbf{x} = \frac{r^2}{\eta^2} - 2\frac{(\xi \cdot \eta)^2}{\eta^2}, \quad \xi = \frac{r}{\eta^2}.$$

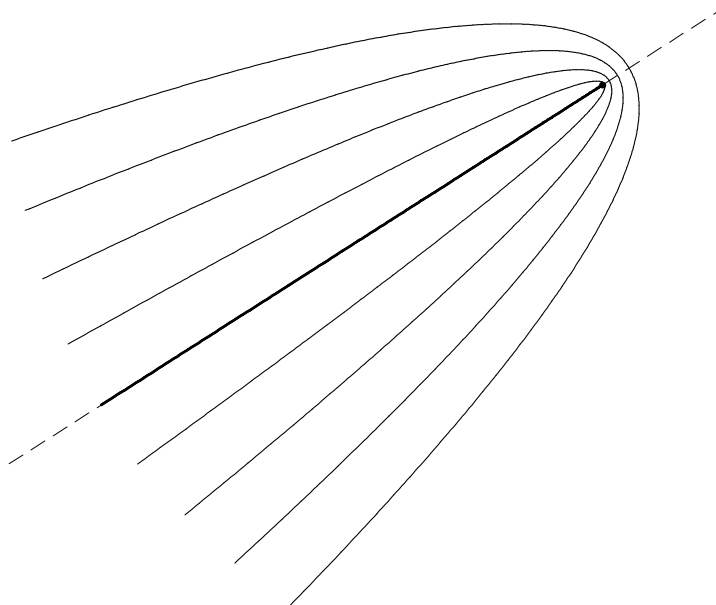


Figura 9.1. Le orbite paraboliche e l'orbita di collisione nel piano ortogonale al momento angolare Γ . La retta tratteggiata è la direzione del vettore iniziale ξ_0 , che punta verso il vertice delle parabole. Il caso $\Gamma = 0$ genera l'orbita di collisione, che è una semiretta allineata con ξ_0 . Le quattro parabole in tratto più sottile corrispondono a diversi valori di $\Gamma \neq 0$.

Sostituendo le ultime due nella prima otteniamo

$$(\xi \cdot \eta)^2 = \frac{1}{2}(\xi r - \xi \cdot \mathbf{x}) .$$

Grazie a quest'ultima eguaglianza rielaboriamo l'espressione del modulo del momento angolare esprimendo tramite $\xi \cdot \eta$ il coseno dell'angolo tra i due vettori, e calcoliamo

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= (\xi \wedge \eta)^2 = \xi^2 \eta^2 \left[1 - \left(\frac{\xi \cdot \eta}{\xi^2 \eta^2} \right)^2 \right] = \xi^2 \eta^2 - (\xi \cdot \eta)^2 \\ &= \xi r - \frac{1}{2}(\xi r - \xi \cdot \mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\xi r + \xi \cdot \mathbf{x}) . \end{aligned}$$

Eguagliando il primo e l'ultimo membro dell'ultima catena di eguaglianze abbiamo infine

$$\Gamma^2 = \xi r (1 + \cos \vartheta) ,$$

dove ϑ è l'angolo tra i vettori ξ e \mathbf{x} , e ricordando che deve essere $\xi = 2mk$ otteniamo infine la (9.24), come asserito.

Le orbite paraboliche nel piano ortogonale a Γ sono rappresentate in figura 9.1. L'orbita di collisione, corrispondente a $\Gamma = 0$ richiede qualche considerazione più attenta. Riscrivendo l'equazione (9.24) come $r(1 + \cos \vartheta) = 0$ si ricade in uno dei due casi: $r = 0$, cioè assenza di movimento, oppure $\vartheta = -\pi$ e $r > 0$, ossia una semiretta spiccata dal centro delle forze in direzione opposta al vettore iniziale ξ_0 . Per

determinare il moto sulla semiretta dobbiamo ricorrere alla soluzione (9.23), scegliendo i dati iniziali soddisfacenti $\xi_0 \wedge \eta_0 = 0$. Dunque i vettori iniziali devono essere paralleli, e il parallelismo viene mantenuto dalla soluzione (9.23). Dal momento che $\|\xi_0\| = 2mk$, come abbiamo già osservato, scriviamo i dati iniziali come

$$\xi_0 = 2mk\mathbf{w} , \quad \eta_0 = \alpha\mathbf{w} , \quad \|\mathbf{w}\| = 1 .$$

Possiamo così riscrivere la soluzione (9.23) come

$$\xi(\tau) = 2mk\mathbf{w} , \quad \eta(\tau) = -\frac{1}{2m}(\tau - \tau_0)\mathbf{w} , \quad \tau_0 = -2m\alpha .$$

Tornando alle coordinate \mathbf{x} mediante la trasformazione (9.21) otteniamo infine la (9.25) dell'enunciato. La soluzione così trovata descrive un urto elastico, nel senso che all'istante t_c della collisione la velocità si inverte istantaneamente, e il punto materiale ripercorre all'indietro la traiettoria rettilinea seguita fino a quel momento, come in un film girato alla rovescia. Nel tempo t della vita reale la funzione $\mathbf{x}(t)$ risulta essere continua in t_c , ma non differenziabile, mentre la velocità ha un punto di discontinuità in t_c . Il tempo fittizio τ rimuove la singolarità: la collisione avviene all'istante τ_0 , e la funzione $\mathbf{x}(\tau)$ è analitica per tutti i $\tau \in \mathbb{R}$ così come la sua derivata $\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$.

9.1.4 I casi ellittico e iperbolico

Veniamo ora a discutere brevemente i casi $E < 0$ (orbite ellittiche) e $E > 0$ (orbite iperboliche), limitandoci a considerare la dinamica nell'intorno della collisione. Il caso che trattiamo qui è la versione più semplice di quanto ci servirà in seguito per studiare la collisione binaria nel caso di tre corpi. Consideriamo dunque l'Hamiltoniana (9.13), che riscriviamo

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{rp^2}{2m} - Er = k$$

dove k è la costante del potenziale Kepleriano. Uno studio dettagliato non è agevole, e del resto non è necessario ai nostri fini. Appliciamo ancora la trasformazione canonica (9.21), ricordando che la prima delle (9.26) ci dà $r = \xi\eta^2$, e abbiamo l'Hamiltoniana

$$(9.27) \quad K(\xi, \eta) = \frac{\xi}{2m} - E\xi\eta^2 .$$

Non si tratta, come ben si vede, di un'Hamiltoniana integrabile, ma è quanto ci basta per ricavare informazioni sulla dinamica in prossimità della collisione.

Sappiamo che l'urto si verifica per $r \rightarrow 0$, sicché $V(r) \rightarrow -\infty$, e dunque la conservazione dell'energia implica $T \rightarrow +\infty$ per l'energia cinetica. Ne segue che $p \rightarrow +\infty$, ossia che le componenti di \mathbf{p} non possono essere tutte limitate. D'altra parte, sempre per la conservazione dell'energia, sappiamo che $rE \rightarrow 0$, e dunque $rT = r(E - V) = rE + k \rightarrow k$, ovvero, tenuto conto della prima delle (9.26),

$$(9.28) \quad \|\xi\| = r\mathbf{p}^2 = \frac{r}{\eta^2} \rightarrow 2mk ,$$

che è un limite finito. Questo non ci autorizza ancora ad affermare che le singole componenti del vettore ξ tendono a un limite finito, ma lo possiamo dimostrare servendoci del teorema di Cauchy. A tal fine consideriamo il guscio sferico

$$(9.29) \quad \mathcal{G} = \left\{ \xi : \frac{\alpha}{2} \leq \xi \leq 2\alpha \right\}, \quad \alpha = 2mk.$$

Osserviamo poi che la (9.22) ci dà $\eta \rightarrow 0$ per $p \rightarrow +\infty$. Dunque possiamo determinare τ_0 tale che per $|\tau| \leq \tau_0$ l'orbita è contenuta nel dominio $\mathcal{G} \times B$, dove B è un intorno sferico di $\eta = 0$. In quel dominio l'Hamiltoniana $K(\xi, \eta)$ data dalla (9.27) è evidentemente olomorfa, e per il teorema di Cauchy abbiamo

$$\xi(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \xi_0 \in \mathcal{G}, \quad \|\xi_0\| = 2mk.$$

sicché le singole componenti di ξ tendono a un limite finito.

La regolarità dell'Hamiltoniana nel dominio $\mathcal{G} \times B$ ci consente di cercare le soluzioni che hanno dato iniziale $\xi(0) = \xi_0$, $\eta(0) = 0$ con un vettore ξ_0 soddisfacente la condizione $\|\xi_0\| = 2mk$ e per il resto arbitrario. A tal fine scriviamo le equazioni canoniche

$$(9.30) \quad \frac{d\xi}{d\tau} = -2E\xi\eta, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{\xi}{\xi} \left(\frac{1}{2m} - E\eta^2 \right).$$

Scriviamo poi i primi termini dello sviluppo delle soluzioni in serie di potenze di τ , e osservando che $\frac{d\xi}{d\tau}$ si annulla nel punto iniziale abbiamo

$$(9.31) \quad \xi(\tau) = \xi_0 + O(\tau^2), \quad \eta(\tau) = \frac{\xi_0}{2m\|\xi_0\|}\tau + O(\tau^2).$$

Per il teorema di Cauchy, le soluzioni complete potrebbero scriversi come sviluppo in serie di potenze del tempo fittizio τ , assolutamente e uniformemente convergenti in un intorno di $\tau = 0$, sicché le soluzioni del sistema (9.30) sono funzioni analitiche di τ .

Se torniamo alle coordinate canoniche originali \mathbf{x} , \mathbf{p} tramite la trasformazione (9.21) vediamo subito, senza eccessivi calcoli, che

$$\mathbf{x}(\tau) = O(\tau^2), \quad \mathbf{p}(\tau) \sim \frac{1}{\tau},$$

e che le coordinate $\mathbf{x}(\tau)$ sono funzioni analitiche in τ mentre $\mathbf{p}(\tau)$ ha un polo del primo ordine in $\tau = 0$. Per descrivere la dinamica nel tempo t dobbiamo scrivere in forma più esplicita la relazione tra t e τ data implicitamente dalla (9.11), che riscriviamo nella forma $dt = r d\tau$. Poiché $r(\tau) = \|\mathbf{x}(\tau)\|$ è calcolabile come serie di potenze in τ con $r(\tau) = O(\tau^2)$ otteniamo subito che $t = O(\tau^3)$ è una serie di potenze convergente in un intorno di $\tau = 0$. Con un procedimento usuale per l'inversione di funzioni analitiche possiamo determinare $\tau(t) = O(t^{1/3})$ come serie di potenze con coefficienti reali, e dunque otteniamo $\mathbf{x}(t) = O(t^{2/3})$ come serie di potenze in $t^{1/3}$ con coefficienti reali. Se imponiamo che t debba essere reale, il che è del tutto naturale, allora anche τ lo è, e le soluzioni $\mathbf{x}(t)$ risultano essere reali, con un punto di ramificazione per l'istante della collisione $t = 0$.

Le considerazioni svolte in questo paragrafo non ci consentono di spingerci fino alla determinazione completa dell'orbita: ciò richiederebbe un calcolo più lungo che qui omettiamo. Sono però sufficienti per stabilire che in prossimità della collisione le orbite hanno qualitativamente la forma illustrata in figura 9.1. In particolare nel caso $\mathbf{\Gamma} = \boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{\eta} = 0$ si ha un urto elastico nella direzione del vettore $\boldsymbol{\xi}_0$.

9.1.5 Il caso dei due corpi

Mostriamo brevemente come i risultati dei paragrafi precedenti si trasportino al caso di due corpi. Ciò servirà in seguito per discutere il caso della collisione binaria in un sistema a tre corpi.

Richiamiamo brevemente la formulazione Hamiltoniana del problema. Dette $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ le coordinate in un riferimento con origine nel baricentro e $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ i momenti scriveremo l'Hamiltoniana come

$$H = \frac{\mathbf{y}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{y}_2^2}{m_2} - \frac{m_1 m_2}{r}, \quad r = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|.$$

Trasportiamo l'origine nel punto \mathbf{x}_2 introducendo la coordinata relativa $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ e tenendo invariata \mathbf{x}_2 . A tal fine, ricordando come vengono introdotte le coordinate eliocentriche, scriviamo la trasformazione canonica

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, & \mathbf{p} &= \mathbf{y}_1, \\ \mathbf{X} &= \mathbf{x}_2, & \mathbf{P} &= \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2, \end{aligned}$$

che introduce le nuove coordinate \mathbf{x}, \mathbf{X} e i momenti \mathbf{p}, \mathbf{P} senza cambiare la coordinata \mathbf{x}_2 , e ha inversa

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x} + \mathbf{X}, & \mathbf{y}_1 &= \mathbf{p}, \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{X}, & \mathbf{y}_2 &= \mathbf{P} - \mathbf{p}, \end{aligned}$$

Nel seguito sarà più utile servirsi delle equazioni del baricentro

$$m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2 = 0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = 0$$

e far uso delle relazioni

$$(9.32) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{x}, & \mathbf{y}_1 &= -\mathbf{y}_2, \\ \mathbf{x}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{x}, & \mathbf{y}_2 &= \mathbf{p}. \end{aligned}$$

Scriviamo poi l'Hamiltoniana trasformata tenendo conto dell'equazione del baricentro, e abbiamo

$$(9.33) \quad H = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{m_1 m_2}{r}, \quad r = \|\mathbf{x}\|, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

L'Hamiltoniana così scritta coincide con la (9.10) del moto centrale, a parte la sostituzione della massa ridotta μ al posto di m e della costante del potenziale Kepleriano $k = m_1 m_2$, avendo scelto le unità di misura per cui la costante gravitazionale è $\mathcal{G} = 1$. Valgono dunque tutte le conclusioni dei paragrafi 9.1.2 e 9.1.3, che utilizziamo restringendo la nostra attenzione al caso della collisione. Ricordiamo che dobbiamo

considerare il caso di energia $E = 0$. Dovremo dunque scegliere dei dati iniziali soddisfacenti $\mathbf{x}_0 \wedge \mathbf{p}_0 = 0$ e soddisfacenti la condizione che l'energia sia nulla. A tal fine scriviamo i dati iniziali come $\mathbf{x}(0) = r_0 \mathbf{w}$, $\mathbf{p}_0 = p_0 \mathbf{w}$ con un vettore unitario \mathbf{w} che determina la direzione della retta di collisione.

Avendo introdotto il tempo fittizio τ mediante la (9.11) ci serviamo del dato iniziale per traslare il tempo in modo che l'urto avvenga al tempo $\tau = 0$. Facciamo uso direttamente della soluzione (9.25) della proposizione 9.3, che riscriviamo ponendo in $\tau_0 = 0$ l'istante dell'urto e sostituendo le costanti k con $m_1 m_2$ e m con $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, e abbiamo

$$\mathbf{x}(\tau) = -r(\tau) \mathbf{w}, \quad r(\tau) = \frac{m_1 + m_2}{2} \tau^2.$$

Per determinare $\mathbf{p}(\tau)$ ricorriamo alla soluzione (9.23) per $\boldsymbol{\eta}(\tau)$, che riscriviamo come $\boldsymbol{\eta}(\tau) = \frac{\tau}{2\mu}$ in modo che si annulli per $\tau = 0$, e la sostituiamo nella trasformazione (9.21), ottenendo

$$\mathbf{p}(\tau) = \frac{2\mu}{\tau}.$$

Il fatto che $\mathbf{p}(\tau)$ presenti una singolarità (di fatto un polo) per $\tau = 0$ non deve stupirci, perché sappiamo dal capitolo precedente che all'istante dell'urto la velocità relativa dei due corpi diventa infinita, mentre il prodotto $r\mathbf{p}$ tende a un limite finito.

Infine le (9.32) ci consentono di scrivere le coordinate $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ di ciascuno dei due corpi come

$$\mathbf{x}_1 = -\frac{m_2}{2} \tau^2 \mathbf{w}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{m_1}{2} \tau^2 \mathbf{w}.$$

In tutta evidenza, al momento dell'urto i due corpi rimbalzano all'indietro cambiando segno alla velocità. La traiettoria descritta mediante il tempo fittizio τ è analitica, mentre se la vediamo nel tempo vero t è solo continua, con una discontinuità nella velocità. Questo tipo di movimento è caratteristico di un urto elastico nel caso rettilineo.

Può essere utile un breve confronto col fenomeno dell'urto elastico in senso più generale. Dobbiamo tener conto della conservazione della quantità di moto, del momento angolare e dell'energia cinetica, che non vengono modificate dall'urto elastico. La conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica impone che le velocità \mathbf{v}_j e \mathbf{u}_j dei corpi rispettivamente prima e dopo l'urto soddisfino le relazioni

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 = 0, \quad \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{u}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{u}_2^2.$$

La prima relazione impone che \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 abbiano verso opposto sia prima che dopo l'urto, mantenendo il rapporto tra i due moduli; la seconda aggiunge l'informazione che i moduli delle velocità non cambiano. In formula:

$$\frac{\|\mathbf{v}_1\|}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{\|\mathbf{u}_1\|}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{m_2}{m_1}, \quad \mathbf{v}_1^2 = \mathbf{u}_1^2, \quad \mathbf{v}_2^2 = \mathbf{u}_2^2.$$

Le relazioni scritte non pongono nessun vincolo sulla *direzione* delle due velocità in uscita, e la conservazione del momento angolare non aggiunge nessuna informazione utile. Pertanto l'*angolo di scattering* tra le direzioni prima e dopo l'urto non può

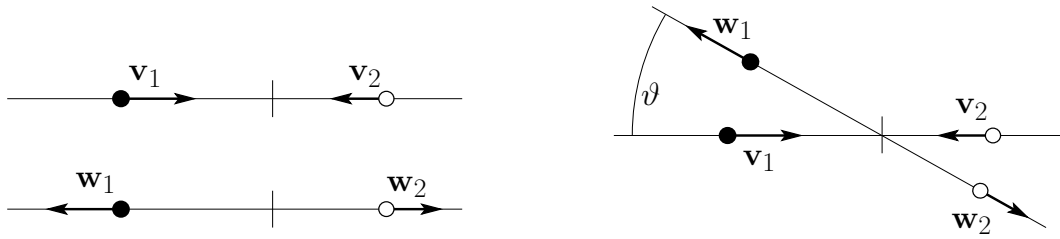


Figura 9.2. L'urto elastico piano tra due corpi. L'angolo di scattering ϑ non può essere determinato in modo univoco dalle equazioni, e resta arbitrario.

essere determinato dalle equazioni, come illustrato in figura 9.2. La regolarizzazione di Levi-Civita impone che tale angolo sia nullo (o 2π , se si preferisce), come nella figura a sinistra. Se si richiama la forma delle orbite paraboliche descritta dalla figura 9.1 si vede come la scelta dell'angolo nullo sia coerente col considerare in qualche senso il limite di orbite paraboliche che degenerano in una rettilinea.

Va da sé che la descrizione del fenomeno dell'urto nei termini puramente matematici in cui l'abbiamo affrontata è una idealizzazione a cui, parlando di moto planetario, non possiamo associare un significato fisico: un eventuale urto tra corpi celesti non sarebbe certo elastico. Tuttavia tutta la teoria che abbiamo sviluppato si rivela utile nel caso di incontri ravvicinati, in cui la piccolezza della distanza combinata col valore elevato delle velocità rendono arduo il calcolo effettivo delle orbite.

Esempio 9.1: *L'effetto fionda* La descrizione dell'urto data sopra è semplificata dalla scelta di porre l'origine delle coordinate nel baricentro. In un sistema in cui il baricentro è in movimento rettilineo uniforme occorre aggiungere la velocità dei due corpi quella del baricentro. Come esempio (da non mettere in pratica!) si immagini una pallina da tennis lanciata contro un treno che sta viaggiando a velocità alta: la velocità del baricentro è praticamente quella del treno; dopo l'urto la pallina rimbalza con una velocità superiore a quella del treno, e dunque con un incremento consistente di velocità rispetto al terreno. Si ottiene un risultato simile inviando una navicella spaziale su un'orbita che passa molto vicino a un pianeta: si ha un guadagno di velocità senza consumo di carburante, evitando l'evento catastrofico dell'urto.

9.2 Il caso generale dei tre corpi

Riprendiamo la discussione sulla collisione binaria svolta nel paragrafo 8.4.2. L'obiettivo qui è applicare a quel caso il metodo di regolarizzazione illustrato nel paragrafo precedente.

9.2.1 Eliminazione della quantità di moto totale

Convieni senz'altro ridurre il numero di gradi di libertà del sistema procedendo alla riduzione della quantità di moto totale. Il procedimento è quello utilizzato in occasione dell'introduzione di variabili eliocentriche, nel capitolo 5 e in particolare nel paragrafo 5.2. Per completezza, richiamiamone sinteticamente i passaggi essenziali, con i

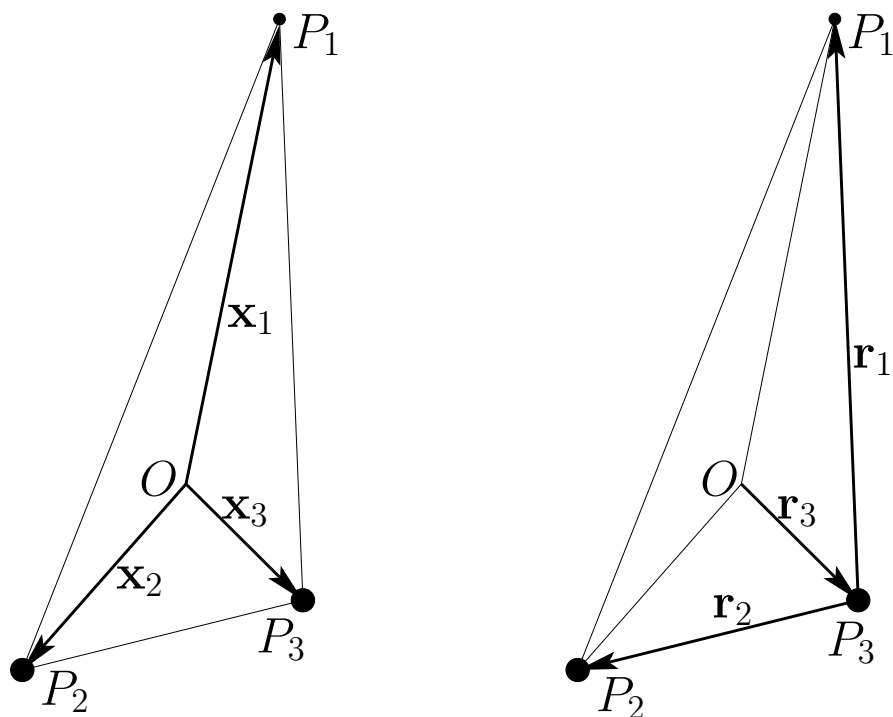


Figura 9.3. Le coordinate di tipo eliocentrico per lo studio della collisione binaria tra i punti P_2 e P_3 .

dovuti adattamenti al caso dei tre corpi che ci interessa. Scriviamo l'Hamiltoniana del sistema in un riferimento assoluto con origine nel baricentro, denotando con \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 , \mathbf{x}_3 le coordinate e con \mathbf{y}_1 , \mathbf{y}_2 , \mathbf{y}_3 i momenti. Scegliendo le unità di misura in modo che la costante gravitazionale sia $\mathcal{G} = 1$ scriveremo l'Hamiltoniana come

$$H = T + V = \frac{\mathbf{y}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{y}_2^2}{2m_2} + \frac{\mathbf{y}_3^2}{2m_3} - \frac{m_1 m_2}{r_{1,2}} - \frac{m_2 m_3}{r_{2,3}} - \frac{m_1 m_3}{r_{1,3}}$$

dove

$$r_{1,2} = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \quad r_{2,3} = \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3\|, \quad r_{1,3} = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3\|.$$

Ora trasportiamo l'origine nel punto P_3 mediante la trasformazione canonica

$$(9.34) \quad \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3, & \mathbf{r}_2 &= \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3, & \mathbf{r}_3 &= \mathbf{x}_3, \\ \mathbf{p}_1 &= \mathbf{y}_1, & \mathbf{p}_2 &= \mathbf{y}_2, & \mathbf{p}_3 &= \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3. \end{aligned}$$

Da qui risulta che \mathbf{p}_3 è la quantità di moto totale, che sappiamo essere nulla nel riferimento del baricentro. La trasformazione inversa si scrive

$$(9.35) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3, & \mathbf{x}_2 &= \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3, & \mathbf{x}_3 &= \mathbf{r}_3, \\ \mathbf{y}_1 &= \mathbf{p}_1, & \mathbf{y}_2 &= \mathbf{p}_2, & \mathbf{y}_3 &= \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2. \end{aligned}$$

Grazie a queste ultime formule ricaviamo rapidamente l'energia cinetica nelle nuove coordinate canoniche, che risulta essere

$$T = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} \right) \frac{\mathbf{p}_1^2}{2} + \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) \frac{\mathbf{p}_2^2}{2} + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{m_3} + \frac{\mathbf{p}_3^2}{2m_3} - \frac{1}{m_3} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3).$$

Analogamente ricaviamo l'espressione dell'energia potenziale

$$V = -\frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} - \frac{m_1 m_3}{\|\mathbf{r}_1\|} - \frac{m_2 m_3}{\|\mathbf{r}_2\|} .$$

Introduciamo qualche notazione che semplifica la scrittura, ponendo

$$(9.36) \quad \mu_1 = \frac{m_1 m_3}{m_1 + m_3} , \quad \mu_2 = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} ,$$

Possiamo così scrivere l'Hamiltoniana trasformata, in cui poniamo senz'altro $\mathbf{p}_3 = 0$, e abbiamo

$$(9.37) \quad H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2\mu_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2\mu_2} + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{m_3} - \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} - \frac{m_1 m_3}{\|\mathbf{r}_1\|} - \frac{m_2 m_3}{\|\mathbf{r}_2\|} .$$

Possiamo inoltre ricavare l'equazione del baricentro

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + (m_1 + m_2 + m_3) \mathbf{r}_3 = 0 ,$$

che ci consente di determinare \mathbf{r}_3 in funzione di $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$.

9.2.2 Regolarizzazione della collisione binaria

Veniamo ora allo studio dell'Hamiltoniana (9.37) assumendo che i corpi P_2, P_3 entrino in collisione ad un determinato istante t_c . Introduciamo anche qui la variabile temporale fittizia τ definita dalla relazione

$$(9.38) \quad d\tau = \frac{dt}{\varrho} , \quad \varrho = \|\mathbf{r}_2\| .$$

Anche in questo caso possiamo sempre determinare τ in modo che l'istante di collisione sia $\tau = 0$. Applicando ancora il suggerimento di Poincaré riassunto nel lemma 9.1, introduciamo l'Hamiltoniana $K = \varrho(H - E)$ le cui equazioni canoniche descrivono la dinamica sulla varietà $H - E = 0$. Con qualche calcolo, che si riduce a poco più di una sostituzione di simboli, otteniamo

$$(9.39) \quad K = \varrho \frac{\mathbf{p}_2^2}{2\mu_2} - \varrho E + \varrho F = m_2 m_3 ,$$

$$F = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2\mu_1} - \frac{m_1 m_3}{\|\mathbf{r}_1\|} + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{m_3} - \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} .$$

Soffermiamoci su una breve considerazione di carattere euristico, riprendendo i risultati della proposizione 8.13. Il contributo di ϱF diventa arbitrariamente piccolo nell'intorno della collisione. Infatti $\mathbf{p}_1 = \mathbf{y}_1 = m_1 \mathbf{v}_1$, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3$ e $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ restano finiti, sicché il primo, secondo e quarto termine in ϱF tendono a zero alla collisione. Sappiamo che $\|\mathbf{p}_2\| = \|\mathbf{y}_2\| = m_2 \|\mathbf{v}_2\| \rightarrow \infty$, ma qui osserviamo che in virtù della (ii) della proposizione 8.13 possiamo valutare

$$(9.40) \quad \varrho p^2 = \varrho m_2^2 \mathbf{v}_2^2 \rightarrow \frac{2m_2^2 m_3^2}{m_2 + m_3} , \quad \varrho p = \sqrt{\varrho} \sqrt{\varrho p^2} \rightarrow 0 ,$$

sicché anche il terzo termine tende a zero. Inoltre anche $\varrho E \rightarrow 0$, essendo l'energia E fissata. È quindi spontaneo attendersi che la dinamica in prossimità della collisione venga determinata dall'Hamiltoniana ridotta

$$H_{\text{rid}} = \varrho \frac{\mathbf{p}_2^2}{2\mu_2}$$

che coincide con quella a cui ci siamo ricondotti nel caso del moto centrale. L'applicazione del metodo di regolarizzazione che abbiamo visto in dettaglio per quel caso, nel paragrafo 9.1, diventa praticamente un obbligo.

Lasciamo invariate le 6 variabili $\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1$, e consideriamo la trasformazione canonica (9.21) ristretta alle sole variabili $\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2$, riscrivendola come

$$(9.41) \quad \mathbf{r}_2 = \eta^2 \boldsymbol{\xi} - 2(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\eta}, \quad \mathbf{p}_2 = \frac{\boldsymbol{\eta}}{\eta^2}, \quad \xi = \|\boldsymbol{\xi}\|, \quad \eta = \|\boldsymbol{\eta}\|,$$

con inversa

$$(9.42) \quad \boldsymbol{\xi} = p^2 \mathbf{r}_2 - 2(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2) \mathbf{p}_2, \quad \boldsymbol{\eta} = \frac{\mathbf{p}_2}{p^2}, \quad p = \|\mathbf{p}_2\|.$$

La trasformazione completa è evidentemente canonica. Dalle (9.41) calcoliamo rapidamente

$$(9.43) \quad \varrho = \xi \eta^2, \quad \mathbf{p}^2 = \frac{1}{\eta^2}, \quad \xi = \varrho \mathbf{p}^2.$$

Con le dovute sostituzioni riscriviamo infine l'Hamiltoniana K nelle nuove variabili, e ci riconduciamo a studiare la dinamica sulla varietà $K = m_2 m_3$ generata dall'Hamiltoniana

$$(9.44) \quad K = \frac{\xi}{2\mu_2} - \xi \eta^2 E + \xi \eta^2 \frac{\mathbf{p}_1^2}{2\mu_1} + \xi \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}}{m_3} - \xi \eta^2 \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \eta^2 \boldsymbol{\xi} + 2(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\eta}\|}.$$

Lemma 9.4: *Il flusso dell'Hamiltoniana K definita dalla (9.44) nel tempo fittizio τ è analitico in un intorno dell'istante di collisione $\tau = 0$, e si ha*

$$(9.45) \quad \boldsymbol{\xi}(\tau) = \boldsymbol{\xi}_0 + O(\tau^2), \quad \boldsymbol{\eta}(\tau) = O(\tau).$$

Dimostrazione. La dimostrazione riprende l'argomento esposto nel paragrafo 9.1.4 per lo studio del caso ellittico e iperbolico nel moto centrale, con le poche modifiche richieste dall'estensione della dimensione. Lo riportiamo per completezza. Cominciamo col caratterizzare la varietà di collisione nello spazio delle fasi. Dalla proposizione 8.13 sappiamo che per $t \rightarrow t_c$, ovvero $\tau \rightarrow 0$, le singole componenti di $\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1$ tendono a un limite finito e sono funzioni olomorfe di t in un intorno di t_c . Dunque dobbiamo occuparci solo delle nuove variabili $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$. Dalla proposizione 8.13 sappiamo che le tre componenti di \mathbf{p}_2 non possono restare tutte finite, perché $p \rightarrow +\infty$, ma la seconda delle (9.42) e la terza delle (9.43) combinata con la (9.40) e ci danno immediatamente

$$(9.46) \quad \xi \rightarrow \frac{2m_2^2 m_3^2}{m_2 + m_3}, \quad \boldsymbol{\eta} \rightarrow 0.$$

Ciò implica che le singole componenti di $\boldsymbol{\xi}$ restino finite, ma non abbiamo ancora il diritto di affermare che ciascuna di esse abbia un limite per $\tau \rightarrow 0$. Possiamo solo affermare che la varietà di collisione è tridimensionale, definita fissando \mathbf{r}_1 e \mathbf{p}_1 , ponendo $\boldsymbol{\eta} = 0$ e tenendo arbitrario $\boldsymbol{\xi}$.

Veniamo dunque a dimostrare che le singole componenti di $\boldsymbol{\xi}$ tendono a un limite finito. A tal fine facciamo ricorso al teorema di Cauchy 8.3. Ricordando la (9.46) consideriamo il guscio sferico \mathcal{G} definito come

$$(9.47) \quad \mathcal{G} = \left\{ \boldsymbol{\xi} : \frac{\alpha}{2} \leq \xi \leq 2\alpha \right\}, \quad \alpha = \frac{2m_2^2 m_3^2}{m_2 + m_3}.$$

Scegliamo poi τ_0 in modo che valga

$$\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{G} \quad \text{per} \quad \tau_0 \leq \tau < 0.$$

Le 9 coordinate $\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\eta}$ hanno un limite per $t \rightarrow t_c$, ovvero $\tau \rightarrow \tau_0$. Quindi si può determinare una sfera a 9 dimensioni B con centro nel punto limite tale che nel dominio $\mathcal{G} \times B$ l'Hamiltoniana K è olomorfa. Per il teorema di Cauchy le funzioni $\boldsymbol{\xi}(\tau), \boldsymbol{\eta}(\tau)$ sono olomorfe su tutto l'intervallo $\tau_0 \leq \tau < 0$ e sono regolari fino a $\tau = 0$, e in particolare le tre componenti di $\boldsymbol{\xi}(\tau)$ ammettono un limite $\boldsymbol{\xi}_0$. Anche le 6 coordinate $\mathbf{r}_1(\tau), \mathbf{p}_1(\tau)$ sono funzioni olomorfe del tempo fittizio τ nell'intorno dell'istante di collisione $\tau = 0$. Preso dunque il punto iniziale $(\mathbf{r}_1(0), \mathbf{p}_1(0), \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\eta}_0)$ con $\boldsymbol{\eta}_0 = 0$ possiamo scrivere le soluzioni come sviluppo in serie di potenze di τ , convergente in un intorno dello zero. In particolare, come nel caso del moto centrale, ricaviamo le (9.45). Q.E.D.

Concludiamo il paragrafo enunciando la

Proposizione 9.5: *Sia data l'Hamiltoniana del problema dei tre corpi*

$$H = T + V = \frac{\mathbf{y}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{y}_2^2}{2m_2} + \frac{\mathbf{y}_3^2}{2m_3} - \frac{m_1 m_2}{r_{1,2}} - \frac{m_2 m_3}{r_{2,3}} - \frac{m_1 m_3}{r_{1,3}}$$

dove

$$r_{1,2} = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \quad r_{2,3} = \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3\|, \quad r_{1,3} = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3\|.$$

Supponiamo che il momento angolare non si annulli, $\boldsymbol{\Gamma} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{x}_j \wedge \mathbf{y}_j \neq 0$. Supponiamo che all'istante t_c si verifichi una collisione binaria tra due dei tre corpi, e sia τ il tempo fittizio introdotto mediante la relazione

$$d\tau = \frac{dt}{\varrho}, \quad \varrho = \min(r_{1,2}, r_{2,3}, r_{1,3})$$

in modo che l'istante di collisione sia $\tau = 0$. Allora le coordinate $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ dei tre corpi, le distanze mutue $r_{1,2}, r_{2,3}, r_{1,3}$ e il tempo t sono funzioni analitiche in τ nell'intorno di $\tau = 0$, sviluppabili in serie di potenze convergenti.

Il lettore osserverà che l'enunciato della proposizione non riguarda i momenti $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$. In effetti, come ormai ben sappiamo, le componenti dei momenti non possono restare tutte limitate all'atto della collisione.

Dimostrazione. La dimostrazione consiste nel riportare sulle coordinate $\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j$ il risultato del lemma 9.4, passando per le coordinate canoniche $\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j$ introdotte mediante la (9.34). Tutte le trasformazioni sono adattate al caso di collisione tra i corpi P_2 e P_3 , ma l'argomento si applica chiaramente alla collisione binaria tra due corpi qualsiasi, a patto di permutare opportunamente gli indici.

Per tornare alle coordinate canoniche $\mathbf{r}_2(\tau), \mathbf{p}_2(\tau)$ dobbiamo applicare la trasformazione (9.41), lasciando invariate le coordinate $\mathbf{r}_1(\tau), \mathbf{p}_1(\tau)$. La regolarità di $\mathbf{r}_1(\tau)$ è segue direttamente dalle equazioni, grazie al teorema di Cauchy. La trasformazione che dà le coordinate \mathbf{r}_2 in funzione di $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ è chiaramente olomorfa, lineare in $\boldsymbol{\xi}$ e quadratica in $\boldsymbol{\eta}$. Abbiamo così $\mathbf{r}_2(\tau) = O(\tau^2)$, in virtù del lemma 9.4.

La trasformazione (9.35) ci dà le coordinate $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ come combinazioni lineari di $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$, con \mathbf{r}_3 a sua volta combinazione lineare di $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ grazie all'equazione del baricentro. Dunque le coordinate \mathbf{x}_j sono funzioni analitiche di τ , essendo composizioni di funzioni analitiche.

Le distanze $r_{1,2} = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$ e $r_{1,3} = \|\mathbf{r}_1\|$ non si annullano alla collisione, e dunque restano funzioni analitiche di τ . La distanza $r_{2,3} = \|\mathbf{r}_2\|$ si annulla, ma essendo $\mathbf{r}_2(\tau) = O(\tau^2)$ anche $r_{2,3} = O(\tau^2)$ risulta essere funzione analitica di τ .

Per tornare al tempo t dobbiamo rendere più esplicita la relazione tra t e τ data da $dt = \varrho d\tau$. Dal momento che $\varrho(\tau) = \|\mathbf{r}_2(\tau)\| = O(\tau^2)$ è calcolabile come serie di potenze di τ abbiamo che $t = O(\tau^3)$ è calcolabile come serie di potenze con coefficienti reali. Q.E.D.

9.3 Il teorema di Sundman

I risultati del paragrafo precedente sono locali, nel senso che si applicano a un intorno dell'istante di collisione: supponendo che partendo da un istante iniziale $\tau_0 < 0$ abbiamo descritto la dinamica fino all'istante di collisione $\tau = 0$ e abbiamo visto come si possa prolungare la soluzione per tempi $\tau > 0$ come funzione analitica del tempo fittizio τ .

Questo paragrafo è dedicato all'estensione in senso globale di quanto detto fin qui. L'obiettivo, in termini molto rozzi e incompleti, è dimostrare che le coordinate restano funzioni olomorfe di un tempo fittizio τ opportunamente definito per tutti i valori di τ .

Osserviamo che tutti gli argomenti sviluppati fin qui si applicano parola per parola anche quando si inverte la direzione del tempo e la velocità dei corpi. In termini più precisi, cambiando $\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j, t$ in $\mathbf{x}_j, -\mathbf{y}_j, -t$ le equazioni restano immutate, sicché le soluzioni che abbiamo trovato restano valide.

9.3.1 Considerazioni generali sulle orbite

Ricordiamo, dalla discussione del capitolo 8, che le soluzioni delle equazioni canoniche corrispondenti a qualunque dato iniziale in cui i corpi occupano posizioni distinte sono funzioni olomorfe del tempo che presentano singolarità solo in caso di collisione. Inoltre abbiamo visto che se il momento angolare $\mathbf{\Gamma}$ non si annulla allora sono possibili solo

collisioni binarie, che possono essere prolungate analiticamente oltre l'istante dell'urto. Possiamo immaginare tre comportamenti possibili:

- (i) un'orbita priva di collisioni;
- (ii) un'orbita che presenta un numero finito di collisioni;
- (iii) un'orbita soggetta a una successione infinita di collisioni.

Il caso (i) non presenta particolari difficoltà: le coordinate restano funzioni olomorfe del tempo t su tutto l'asse reale.

Il caso (ii) richiede solo qualche considerazione. Supponiamo che al tempo t_1 avvenga una collisione. Allora l'orbita può essere prolungata analiticamente per $t > t_1$, e resta olomorfa fino al verificarsi di una nuova collisione, diciamo a un tempo t_2 , e così via per le collisioni successive. Se il numero di collisioni è finito, come abbiamo supposto, e se denotiamo con t_n l'istante dell'ultima, allora per $t > t_n$ l'orbita si prolunga analiticamente, e resta olomorfa per tutti i tempi successivi.

Il caso (iii) richiede un attimo di attenzione. Denotiamo con t_m , per $m = 1, 2, 3, \dots$ la successione degli istanti di collisione. Se $t_m \rightarrow +\infty$ si applica l'argomento del caso (ii), e si conclude che l'orbita è prolungabile analiticamente per tutti i tempi. Dobbiamo però prendere in considerazione la possibilità che la successione tenda a un limite t_∞ che è punto di accumulazione delle collisioni. Di fatto possiamo dimostrare che ciò non si può verificare.

Mostriamo anzitutto che per $t \rightarrow t_\infty$ deve essere $V(t) \rightarrow -\infty$. Infatti, se così non fosse, nel punto di collisione, diciamo \mathbf{x} , avremmo $V(\mathbf{x}) > \bar{V}$ finito, e per il punto (i) del lemma 8.7 la distanza minima tra i corpi sarebbe finita, sicché non si avrebbe collisione. Accettato che $V(t_\infty) = -\infty$, mostriamo che per m abbastanza grande, e dunque t_m sempre più vicino a t_∞ , la coppia di corpi soggetta alla collisione è sempre la stessa. Ciò segue dal punto (i) della proposizione 8.13, che afferma che esiste un intervallo $[t_0, t_\infty)$ in cui la distanza minima è quella tra i corpi che si urtano, e questo deve verificarsi per tutti i tempi di collisione $t_m \in [t_0, t_\infty)$, ossia per tutti gli m abbastanza grandi. Ne segue che la distanza $\varrho(t)$ tra i due corpi che si urtano deve essere una funzione che si annulla in tutti gli istanti t_m , ed è diversa da zero in tutti gli intervalli (t_m, t_{m+1}) per tutti gli m abbastanza grandi. Ora, tutte queste collisioni vengono regolarizzate mediante lo stesso tempo fittizio τ , e la distanza $\varrho(\tau)$ è funzione analitica di τ . Per come è determinato τ si vede che la successione $\tau_m(t_m)$ si accumula a un istante $\tau_\infty = \tau(t_\infty) < \infty$. Dunque gli zeri della distanza $\varrho(\tau)$ hanno un punto di accumulazione, ma la funzione dovrebbe essere non identicamente nulla, il che contraddice il fatto che si tratti di una funzione analitica. Dobbiamo dunque concludere che gli istanti di collisione non possono avere punti di accumulazione, come affermato.

9.3.2 Regolarizzazione globale delle collisioni

Ci proponiamo ora di rimuovere il fatto che il tempo fittizio τ sia definito fin qui nell'intorno dell'istante dell'urto, sicché risulta dipendere da quale coppia di corpi

entra in collisione. A tal fine si sfrutta la forma del potenziale

$$V = -\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}} - \frac{m_2 m_3}{r_{2,3}} - \frac{m_1 m_3}{r_{1,3}},$$

osservando che in prossimità di una collisione binaria si ha $V \sim 1\varrho^{-1}$ con $\varrho = \min(r_{1,2}, r_{2,3}, r_{1,3})$, perché due degli addendi restano finiti.

Lemma 9.6: *Il tempo fittizio τ definito come*

$$(9.48) \quad \tau = \int_{t_0}^t (1 - V) dt$$

è funzione monotona crescente (e dunque invertibile) di t che mappa la retta reale su se stessa.

Dimostrazione. Sia t_c un istante di collisione binaria. Allora abbiamo

$$\varrho(1 - V) = \varrho + \frac{m_1 m_2 \varrho}{r_{1,2}} + \frac{m_2 m_3 \varrho}{r_{2,3}} - \frac{m_1 m_3 \varrho}{r_{1,3}}.$$

Supponendo, per fissare le idee e come abbiamo fatto fin qui, che alla collisione si annulli la distanza $r_{2,3}$, nell'intorno della collisione abbiamo $\varrho(1 - V) \rightarrow m_2 m_3$, ovvero

$$V = \frac{m_1 m_3}{\varrho} + \tilde{V}, \quad \int_{t_0}^{t_c} (1 - V) dt = \int_{t_0}^{t_c} \frac{dt}{\varrho} - \int_{t_0}^{t_c} \tilde{V} dt,$$

con \tilde{V} funzione limitata, sicché per $t \rightarrow t_c$ abbiamo che $\tau(t)$ tende a un limite finito. D'altra parte la funzione integranda $1 - V$ è sempre strettamente positiva, sicché $\tau(t)$ risulta essere funzione continua e monotona crescente che tende a $+\infty$ per $t \rightarrow +\infty$ e a $-\infty$ per $t \rightarrow -\infty$. Q.E.D.

Grazie al lemma appena dimostrato vediamo che il tempo fittizio τ regolarizza tutte le collisioni. Ciò ci autorizza a concludere che in ogni punto $\tau \in \mathbb{R}$ le soluzioni possono svilupparsi in serie di potenze convergente in un intorno complesso di τ , con coefficienti reali. Ne segue che le soluzioni sono olomorfe in un intorno complesso σ dell'asse reale. In linea di principio la soluzione completa si potrebbe costruire prolungando analiticamente la soluzione trovata in un intorno su tutto Σ .

Il teorema di Sundman ci dà un risultato più forte: afferma l'esistenza di un parametro temporale $\omega(\tau)$ tale che tutte le soluzioni sono sviluppabili in serie di potenze convergente di ω nel disco complesso $|\omega| < 1$; la funzione $\omega(\tau)$ è olomorfa e mappa tutta la retta reale sull'intervallo reale $(-1, 1)$. Ancor più, Sundman propone un'espressione esplicita per la funzione $\omega(\tau)$. Tutto questo richiede un'ulteriore discussione, alla quale sono dedicati i prossimi paragrafi.

*** Il capitolo è incompleto. La dimostrazione del teorema di Sundman verrà completata in un futuro più o meno lontano; si spera prima della fine del secolo. ***