Appendice A

FORMA NORMALE DI UN'HAMILTONIANA QUADRATICA

Questa appendice è dedicata alle forme normali di Hamiltoniane quadratiche. Il punto di partenza della discussione è la costruzione della forma normale per i sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. La particolarità del caso Hamiltoniano sta nel richiedere che tutte le trasformazioni che si compiono siano canoniche.

A.1 La forma normale per i sistemi di equazioni differenziali lineari

È opportuno richiamare alcuni risultati noti sulle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Sia dato il sistema di equazioni in $\mathbb{R}^n$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathsf{A}\mathbf{x} \ , \tag{A.1}$$

dove A è un operatore lineare. Sulla base canonica di $\mathbb{R}^n$ l'operatore A verrà rappresentato da una matrice quadrata $n \times n$, con elementi reali a_{jk}, e si potrà scrivere il sistema in notazione matriciale[1]

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

o, in modo più sintetico,

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} x_k \ . \tag{A.3}$$

[1] Al fine di evitare sgradevoli confusioni adotterò qui la convenzione di indicare i vettori col carattere grassetto, riservando il carattere corsivo alle componenti del vettore su una base assegnata. Indicherò così con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ il vettore le cui componenti sulla base canonica sono $(x_1, \ldots, x_n)$.

Ci proponiamo di ricondurre un tale sistema ad una forma che sia il più semplice possibile, e che viene abitualmente detta *forma normale*, o talvolta anche *canonica*. A tal fine risulta particolarmente conveniente far ricorso ai metodi della geometria.

A.1.1 Trasformazioni lineari

Consideriamo una trasformazione lineare della forma[2]

$$\mathbf{x} = \mathsf{M}\boldsymbol{\xi} \ , \quad \det \mathsf{M} \neq 0 \ , \tag{A.4}$$

dove M è una matrice $n \times n$ non degenere. Trasformando l'equazione (A.1) si ottiene

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathsf{M}^{-1}\dot{\mathbf{x}} = \mathsf{M}^{-1}\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathsf{M}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{M}\boldsymbol{\xi} \ ,$$

il che significa che nelle nuove coordinate $\xi_1, \ldots, \xi_n$ il sistema si scrive nella forma simile a quella di partenza

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathsf{\Lambda}\boldsymbol{\xi} \ , \quad \mathsf{\Lambda} = \mathsf{M}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{M} \ .$$

La trasformazione diventa utile se si può scegliere la matrice di trasformazione M in modo che la matrice $\mathsf{\Lambda}$ del sistema trasformato abbia la forma più semplice possibile, e in questo senso il sistema di equazioni sarà ridotto alla sua *forma normale*.

A.1.2 Autovalori, autovettori e diagonalizzazione

Il primo tentativo, magari ingenuo, è praticamente obbligato: si cerca una matrice di trasformazione M tale che $\mathsf{\Lambda}$ abbia la forma diagonale, ossia $\mathsf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono numeri complessi. Moltiplicando a sinistra per M la relazione $\mathsf{\Lambda} = \mathsf{M}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{M}$ troviamo $\mathsf{A}\mathsf{M} = \mathsf{M}\mathsf{\Lambda}$. Scrivendo esplicitamente quest'ultima relazione per le colonne della matrice M ed assumendo che $\mathsf{\Lambda}$ sia diagonale si ricava subito che le colonne di M devono obbedire all'equazione agli autovalori.

$$\mathsf{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} \ . \tag{A.5}$$

Riscriviamo quest'ultima equazione nella forma più comoda

$$(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I})\mathbf{w} = 0 \ , \tag{A.6}$$

dove I è l'operatore identità, $\mathsf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}\ \forall\mathbf{x}$. Perché esistano soluzioni non banali dev'essere

$$\det(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}) = 0 \ , \tag{A.7}$$

che, ricordando la rappresentazione matriciale (A.2) di A, può riscriversi nella forma

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0 \ .$$

[2] È noto dalla geometria che se si cambia la base su cui vengono scritte le coordinate dei vettori si deve effettuare una trasformazione lineare del tipo qui considerato. La matrice di trasformazione si scrive allineando in colonna le componenti dei vettori della nuova base sulla base vecchia.

Scrivendo esplicitamente l'espressione del determinante ci si riconduce ad un'equazione algebrica della forma

$$P_n(\lambda) = p_n\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + p_0 = 0 \ ,$$

con coefficienti $p_0, \ldots, p_n$ reali. Il polinomio $P_n(\lambda)$ viene detto *polinomio caratteristico*, ed all'equazione (A.7) viene dato il nome di *equazione caratteristica* o *equazione secolare*.

Il teorema fondamentale dell'algebra assicura che l'equazione secolare ammette sempre n soluzioni nel campo complesso, ove si tenga conto della molteplicità; dunque la matrice A ammette sempre n autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, in generale complessi. In particolare se $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore allora anche il suo complesso coniugato λ^* lo è; ciò perché i coefficienti del polinomio caratteristico sono reali. La ricerca delle soluzioni non è sempre agevole, ma ai fini delle applicazioni è lecito ricorrere a metodi numerici.

Una volta determinati gli autovalori si può procedere alla ricerca degli autovettori corrispondenti $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ risolvendo l'equazione (A.5) con uno dei metodi algebrici noti. Anche qui, nelle applicazioni pratiche si ricorre alla soluzione numerica. Il fatto interessante è che *se gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono distinti allora gli autovettori $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ sono linearmente indipendenti.*[3] Ciò basta per concludere che gli autovettori costituiscono una base di $\mathbb{C}^n$, e che su tale base la matrice $\mathsf{\Lambda}$ assume una forma diagonale. Abbiamo così dimostrato la

Proposizione A.1: *Sia data l'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathsf{A}\mathbf{x}$ con A matrice reale, e supponiamo che gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ della matrice A siano distinti. Allora esiste una trasformazione lineare $\mathbf{x} = \mathsf{M}\boldsymbol{\xi}$ che pone l'equazione nella forma normale*

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathsf{\Lambda}\boldsymbol{\xi} \ , \quad \mathsf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \tag{A.8}$$

con $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^n$ e con $\mathsf{\Lambda} = \mathsf{M}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{M}$. La matrice M ha la forma

$$\mathsf{M} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$$

determinata allineando in colonna gli autovettori della matrice A, nello stesso ordine dato agli autovalori.

Nel caso di autovalori coincidenti non è possibile in generale dare alla matrice una forma diagonale, e si deve far ricorso alla forma canonica di Jordan. In queste note non mi soffermerò su questi casi, per i quali rimando ai trattati sulle equazioni differenziali o ai testi di Geometria.

---

[3] Si procede per induzione. Se si prende un solo autovalore λ_1 con l'autovettore corrispondente $\mathbf{w}_1$ l'affermazione è banalmente vera. Supponiamo che sia vera per gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ e i corrispondenti autovettori $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{m-1}$, e, per contraddizione, supponiamo che $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$ siano linearmente dipendenti, sicché abbiamo $\mathbf{w}_m = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j \mathbf{w}_j$ con $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ non tutti nulli. Allora $\mathsf{A}\mathbf{w}_m - \lambda_m\mathbf{w}_m = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j(\lambda_j - \lambda_n)\mathbf{w}_j = 0$, e poiché $\lambda_j - \lambda_n \neq 0$, essendo gli autovalori distinti, ne seguirebbe che $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{m-1}$ non sono linearmente indipendenti. Questo contraddice l'ipotesi induttiva, sicché dobbiamo concludere che $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$ sono linearmente indipendenti. Ciò vale per $m = 1, \ldots, n$, il che dimostra l'asserto.

A.1.3 Non unicità del procedimento di diagonalizzazione

La matrice trasformazione M non è determinata in modo univoco. In effetti occorre tener conto che gli autovettori sono determinati a meno di un fattore moltiplicativo. Ciò si riconduce ad affermare che *se valgono contemporaneamente le relazioni* $\mathsf{M}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{M} = \Lambda$ *e* $\tilde{\mathsf{M}}^{-1}\mathsf{A}\tilde{\mathsf{M}} = \Lambda$ *allora si ha*

$$\tilde{\mathsf{M}} = \mathsf{M}\mathsf{D}\ , \quad \mathsf{D} = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n) \tag{A.9}$$

con $d_1, \ldots, d_n$ *reali non nulli.*

A.1.4 La scrittura delle soluzioni

La scrittura delle soluzioni per il sistema in forma normale è questione elementare. Grazie alla forma diagonale della matrice il sistema si separa in n equazioni distinte in $\mathbb{C}$ della forma $\dot{\xi}_j = \lambda_j \xi_j$, la cui soluzione ben nota è $\xi_j(t) = \xi_{j,0}e^{\lambda_j t}$, essendo $\xi_{j,0}$ il dato iniziale. Noi però siamo interessati all'equazione (A.1) nelle variabili $\mathbf{x}$ originarie, il che ci costringe anche a vedere come si possano ricondurre le soluzioni complesse della forma normale a quelle reali dell'equazione da cui è iniziato il nostro studio.

Un procedimento elegante consiste nel dare una forma esplicita al flusso ϕ^t al tempo t sotto forma di un operatore lineare $\mathsf{U}(t)$, e costruirne la matrice nelle coordinate $\mathbf{x}$. Ricordando il formalismo delle serie di Lie abbiamo

$$\mathbf{x}(t) = \mathsf{U}(t)\mathbf{x}_0\ , \quad \mathsf{U}(t) = \exp(t\mathsf{A}) = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k \mathsf{A}^k}{k!}\ . \tag{A.10}$$

La serie così scritta risulta convergente per tutti i valori di t. Ciò richiede un'analisi paziente ma non difficile che può svolgersi seguendo la traccia del capitolo ??.

La questione sollevata dalla formula (A.10) è come si possa scrivere l'esponenziale della matrice A. La forma normale che abbiamo costruito ci dà una risposta particolarmente elegante.

Proposizione A.2: *Nelle ipotesi della proposizione A.1 la soluzione dell'equazione* $\dot{\mathbf{x}} = \mathsf{A}\mathbf{x}$ *corrispondente al dato iniziale* $\mathbf{x}_0$ *si scrive*

$$\mathbf{x}(t) = \mathsf{U}(t)\mathbf{x}_0\ , \quad \mathsf{U}(t) = \mathsf{M}\exp(t\Lambda)\,\mathsf{M}^{-1} \tag{A.11}$$

dove $\exp(t\Lambda) = \mathrm{diag}\bigl(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\bigr)$ *è una matrice diagonale e* $\mathsf{U}(t)$ *è una matrice reale.*

Dimostrazione. Si tratta di riprendere la (A.10) e mostrare che $\exp(t\mathsf{A}) = \mathsf{M}\exp(t\Lambda)\,\mathsf{M}^{-1}$, aggiungendo l'osservazione che $\exp(t\mathsf{A})$, per come è definita, è evidentemente una matrice reale. Riscriviamo la soluzione nelle coordinate $\boldsymbol{\xi}$ della forma normale come $\boldsymbol{\xi}(t) = \exp(t\Lambda)\boldsymbol{\xi}_0$ dove $\boldsymbol{\xi}_0$ è il dato iniziale. Grazie alla forma diagonale di Λ calcoliamo facilmente che $\Lambda^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$, e dunque abbiamo

$$\exp(t\Lambda) = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k \Lambda^k}{k!} = \mathrm{diag}\bigl(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\bigr)\ .$$

Mostriamo ora che $\exp(t\mathsf{A}) = \mathsf{M}\exp(t\Lambda)\,\mathsf{M}^{-1}$. A tal fine dobbiamo riscrivere la relazione $\mathsf{M}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{M} = \Lambda$ come $\mathsf{A} = \mathsf{M}\Lambda\mathsf{M}^{-1}$ e verificare che $\mathsf{A}^k = \mathsf{M}\Lambda^k\mathsf{M}^{-1}$. Procediamo per induzione. Per $k = 0$ abbiamo $\mathsf{A}^0 = \mathsf{I}$ e $\mathsf{M}\Lambda^0\mathsf{M}^{-1} = \mathsf{M}\mathsf{I}\mathsf{M}^{-1} = \mathsf{I}$, e quindi l'eguaglianza è banalmente vera. Supponiamola vera fino a $k-1$ e calcoliamo

$$\mathsf{A}^k = \mathsf{A}\mathsf{A}^{k-1} = \bigl(\mathsf{M}\Lambda\mathsf{M}^{-1}\bigr)\bigl(\mathsf{M}\Lambda^{k-1}\mathsf{M}^{-1}\bigr) = \mathsf{M}\Lambda^k\mathsf{M}^{-1}\ .$$

Basta infine calcolare

$$\exp(t\mathsf{A}) = \sum_{k\geq 0}\frac{t^k\mathsf{A}^k}{k!} = \sum_{k\geq 0}\frac{t^k\mathsf{M}\Lambda^k\mathsf{M}^{-1}}{k!} = \mathsf{M}\biggl(\sum_{k\geq 0}\frac{t^k\Lambda^k}{k!}\biggr)\mathsf{M}^{-1} = \mathsf{M}\exp(t\Lambda)\mathsf{M}^{-1}$$

come affermato. *Q.E.D.*

A.1.5 Forma normale reale nel caso di autovalori complessi

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come il procedimento di diagonalizzazione del sistema lineare permetta in ogni caso di scrivere le soluzioni in forma reale, anche quando la forma normale diagonalizzata ci costringa a passare al complesso. Vediamo qui come in tali casi si possa anche introdurre una forma normale reale, sia pure non diagonale.

Sempre assumendo che gli autovalori della matrice A del sistema lineare siano distinti, supponiamo che essi non siano reali. Abbiamo già osservato che in tal caso, in conseguenza del fatto che A è una matrice reale, se $\lambda = \mu + i\omega$ è un autovalore allora anche $\lambda^* = \mu - i\omega$ lo è.

Lemma A.3: *Sia $\lambda = \mu + i\omega$ con $\omega \neq 0$ un autovalore complesso della matrice reale A, e sia $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$, con $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vettori reali, l'autovettore corrispondente a λ, sicché vale $\mathsf{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$. Allora valgono le proprietà seguenti.*

(i) $\mathbf{w}^* = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ è l'autovettore corrispondente all'autovalore λ^*, ossia vale anche $\mathsf{A}\mathbf{w}^* = \lambda^*\mathbf{w}^*$.

(ii) I vettori reali $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti.

(iii) Valgono le proprietà

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mu\mathbf{u} - \omega\mathbf{v}\ ,\quad \mathbf{A}\mathbf{v} = \mu\mathbf{u} + \omega\mathbf{v}\ .$$

Dimostrazione. (i) Se $\mathsf{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$ allora, calcolando il complesso coniugato di ambo i membri, vale $(\mathsf{A}\mathbf{w})^* = (\lambda\mathbf{w})^*$, ovvero, ricordando che $\mathsf{A}^* = \mathsf{A}$ perché matrice reale, $\mathsf{A}\mathbf{w}^* = \lambda^*\mathbf{w}^*$. Questo dimostra che $\mathbf{w}^*$ è l'autovettore corrispondente a λ^*.
(ii) Osserviamo anzitutto che $\mathbf{w}$ e $\mathbf{w}^*$ sono linearmente indipendenti sui numeri complessi perché gli autovalori λ, λ^* sono distinti (si applica l'argomento già visto per i reali). Per assurdo, supponiamo che sia $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$ con α reale e non nullo. Allora si avrebbe $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v} = (\alpha + i)\mathbf{v}$, e analogamente $\mathbf{w}^* = (\alpha - i)\mathbf{v}$, sicché sarebbe $\mathbf{w} = \frac{\alpha+i}{\alpha-i}\mathbf{w}^*$, in contrasto con l'indipendenza lineare degli autovalori complessi. Quindi $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti, come affermato.
(iii) Basta calcolare

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}\mathbf{u} &= \frac{\lambda\mathbf{w} + \lambda^*\mathbf{w}^*}{2} = \mu\frac{\mathbf{w} + \mathbf{w}^*}{2} + i\omega\frac{\mathbf{w} - \mathbf{w}^*}{2} = \mu\mathbf{u} - \omega\mathbf{v}\ ,\\
\mathsf{A}\mathbf{v} &= \frac{\lambda\mathbf{w} - \lambda^*\mathbf{w}^*}{2i} = \mu\frac{\mathbf{w} - \mathbf{w}^*}{2i} + i\omega\frac{\mathbf{w} + \mathbf{w}^*}{2i} = \omega\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}\ .
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Veniamo ora alla forma normale. Prima di dare un enunciato generale supponiamo, per semplicità, che sia $n = 2$, sicché A è una matrice 2×2 e vi sono solo due autovalori con i corrisponenti autovettori. Sia poi

$$\mathsf{T} = (\mathbf{u},\, \mathbf{v}) \tag{A.12}$$

la matrice, anch'essa 2×2, ottenuta allineando in colonna i due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Notiamo che essendo i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ indipendenti vale $\det \mathsf{T} \neq 0$. Allora abbiamo

$$\mathsf{T}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{T} = \begin{pmatrix} \mu & \omega \\ -\omega & \mu \end{pmatrix} \tag{A.13}$$

Ciò si verifica facilmente perché è solo un modo diverso di scrivere le relazioni (iii) del lemma A.3. Infatti il membro di destra non è altro che la matrice A scritta sulla base costituita dalle colonne di T, ossia sulla base $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

Quanto abbiamo visto ci permette di affermare che *ad ogni coppia di autovalori λ, λ^* complessi coniugati corrisponde un piano sul quale le equazioni lineari possono assumere la forma normale reale data dalla matrice a secondo membro della (A.13).* Sottolineo che l'argomento si applica tale e quale anche al caso di un coppia di autovalori $i\omega$, $-i\omega$ immaginari puri: è sufficiente porre $\mu = 0$.

Torniamo ora al caso generale di un sistema di n equazioni lineari. Vale la seguente

Proposizione A.4: *Sia A matrice reale $n \times n$, e supponiamo che essa ammetta k autovalori reali e distinti e $2m = n - k$ autovalori a coppie complessi coniugati (incluso il caso di autovalori immaginari puri), a due a due distinti, che scriviamo nell'ordine*

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1 + i\omega_1, \mu_1 - i\omega_1, \ldots, \mu_m + i\omega_m, \mu_m - i\omega_m$$

Allora esiste una matrice T non degenere che trasforma il sistema nella forma normale reale con matrice

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_k & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \mu_1 & \omega_1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -\omega_1 & \mu_1 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \mu_m & \omega_m \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\omega_m & \mu_m \end{pmatrix} \tag{A.14}$$

La matrice T ha la forma

$$\mathsf{T} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m)$$

costruita accostando in colonna gli autovettori $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ corrispondenti ai k autovalori reali e le coppie $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m$ formate dalle parti reali e immaginarie delle m coppie di autovalori complessi coniugati, nello stesso ordine dato agli autovalori.

La dimostrazione si riduce ormai solo alla verifica che l'enunciato altro non è che la sintesi di tutto quanto abbiamo visto in questo paragrafo A.1. Al lettore il compito di convincersene completamente.

A.2 Il caso dell'Hamiltoniana quadratica

Veniamo ora a discutere il caso in cui il sistema di equazioni sia canonico, e precisamente generato da un'Hamiltoniana che sia una forma quadratica

$$H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{j,k} \bigl(A_{j,k} x_j x_k + B_{j,k} x_j y_k + C_{j,k} y_j y_k \bigr)$$

dove x, y sono rispettivamente le coordinate e i momenti. In tal caso le equazioni di Hamilton sono lineari, e possiamo ben pensare di applicare il procedimento di diagonalizzazione discusso nel paragrafo precedente. Dobbiamo però osservare che in generale la trasformazione lineare che diagonalizza il sistema di equazioni non sarà necessariamente canonica, perché il procedimento costruttivo non tiene conto della canonicità delle equazioni. D'altra parte per quanto abbiamo detto nel paragrafo A.1.3 possiamo costruire infinite matrici che diagonalizzano le equazioni, ed è spontaneo chiedersi se tra queste non ve ne sia una (o più d'una) che abbia anche la proprietà di generare una trasformazione canonica.[4]

Conviene senz'altro semplificare le notazioni scrivendo le equazioni di Hamilton in una forma più comoda e compatta. A tal fine raccogliamo le coordinate canoniche in un unico vettore $\mathbf{z} = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, e scriviamo l'Hamiltoniana nella forma[5]

$$H(z) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^\top \mathsf{C}\, \mathbf{z} \ , \quad \mathsf{C}^\top = \mathsf{C} \tag{A.15}$$

dove C è una matrice $2n \times 2n$ reale, simmetrica e non degenere. Scriveremo poi le equazioni di Hamilton nella forma

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathsf{J}\mathsf{C}\, \mathbf{z} \ , \tag{A.16}$$

[4] Il problema è solitamente trattato nei testi di Meccanica Razionale o Meccanica Analitica nel caso in cui l'Hamiltoniana abbia la forma $H(x,y) = T(y) + V(x)$ dove $T(y)$ è una forma quadratica definita positiva nei soli momenti, e $V(x)$ è una forma quadratica nelle sole coordinate. In tal caso ci si riconduce al problema della diagonalizzazione contemporanea di due forme quadratiche. Il caso che affrontiamo qui è più generale, in quanto si ammette anche la presenza di termini misti in x, y. Nella discussione di questo paragrafo ho seguito [116], § 15, limitandomi al caso più comune di autovalori distinti, come preciserò più avanti. Per un'esposizione sintetica dei risultati riguardanti il caso generale, comprendente anche la possibilità di autovalori di molteplicità superiore ad uno, si veda [6]. La discussione completa si potrà trovare in [128], che a sua volta fa uso di risultati contenuti in [130].

[5] Qui sottintendo che $\mathbf{z}$ sia un vettore colonna e $\mathbf{z}^\top$, il trasposto di $\mathbf{z}$, sia un vettore riga.

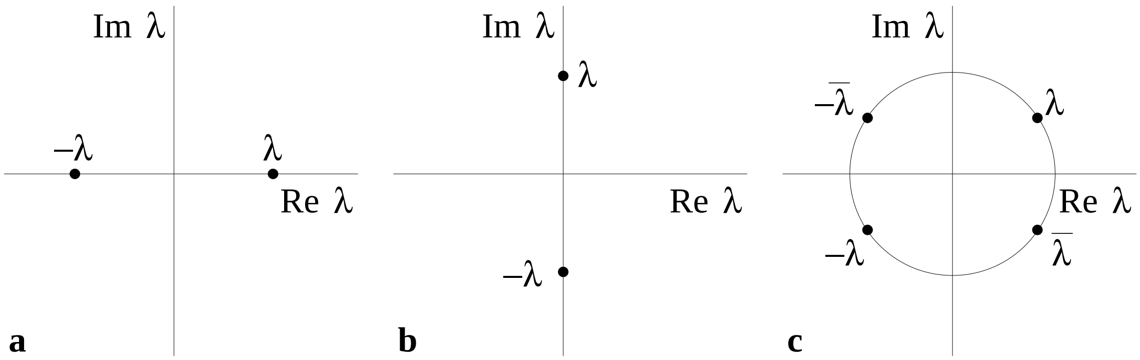

Figura A.1. La disposizione degli autovalori dell'equazione secolare nel caso Hamiltoniano. **a.** Coppia di autovalori reali: all'autovalore λ corrisponde il suo opposto $-\lambda$; ciascuno dei due è il complesso coniugato di sé stesso. **b.** Coppia di autovalori immaginari puri: all'autovalore λ corrisponde il suo opposto $-\lambda$, che è anche il suo complesso coniugato. **c.** Quaterna di autovalori con parti reali e immaginarie non nulle: all'autovalore λ sono associati il suo opposto $-\lambda$, il suo complesso coniugato λ^* e il complesso coniugato dell'opposto $-\lambda^*$, da esso distinti e distinti tra loro.

dove J è la matrice antisimmetrica $2n \times 2n$

$$\mathsf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{I} \\ -\mathsf{I} & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathsf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} ,$$

essendo I la matrice identità $n \times n$. Osserviamo che si ha $\mathsf{J}^\top = \mathsf{J}^{-1} = -\mathsf{J}$.

Seguendo il procedimento del paragrafo A.1.1 cerchiamo una trasformazione lineare $\mathbf{z} = \mathsf{M}\boldsymbol{\zeta}$ che diagonalizzi il sistema di equazioni (A.16). Sappiamo che una tale matrice esiste certamente se gli autovalori della matrice JC sono distinti, sicché abbiamo

$$\mathsf{M}^{-1}\mathsf{JCM} = \Lambda . \qquad (A.17)$$

Ci domandiamo se si possa determinare M in modo che sia soddisfatta la condizione di canonicità

$$\mathsf{M}^\top \mathsf{JM} = \mathsf{J} . \qquad (A.18)$$

Ricordiamo che una matrice che soddisfi questa condizione viene detta *simplettica*.

A.2.1 Costruzione della trasformazione canonica

Occorre anzitutto enunciare una proprietà degli autovalori della matrice JC

Lemma A.5: *Gli autovalori della matrice* JC *soddisfano le proprietà seguenti:*
(i) se λ è un autovalore, lo è anche il suo complesso coniugato $\bar{\lambda}$;
(ii) se λ è un autovalore, lo è anche il suo opposto $-\lambda$.

Dimostrazione. (i) È la proprietà che abbiamo già visto nel caso generale.

(ii) Consideriamo l'equazione caratteristica $\det(\mathsf{JC} - \lambda\mathsf{I}) = 0$. Ricordando che $\mathsf{J}^\top = \mathsf{J}^{-1} = -\mathsf{J}$ osserviamo che

$$\begin{aligned}(\mathsf{JC} - \lambda\mathsf{I})^\top &= (\mathsf{CJ}^\top - \lambda\mathsf{I}) = -(\mathsf{CJ} + \lambda\mathsf{I}) \\ &= -\mathsf{JJ}^{-1}(\mathsf{CJ} + \lambda\mathsf{I}) = \mathsf{J}(\mathsf{JCJ} + \lambda\mathsf{IJ}) \\ &= \mathsf{J}(\mathsf{JC} + \lambda\mathsf{I})\mathsf{J} \ .\end{aligned}$$

Da qui ricaviamo che

$$\det(\mathsf{JC} - \lambda\mathsf{I}) = \det(\mathsf{JC} + \lambda\mathsf{I}) \ ,$$

ossia che il polinomio caratteristico è simmetrico in λ. Dunque se λ è una radice lo è anche $-\lambda$, come asserito. *Q.E.D.*

La conseguenza immediata del lemma che abbiamo appena dimostrato è che gli autovalori si presentano a coppie oppure in quaterne, come illustrato nella didascalia della figura A.1.

Lemma A.6: *Supponiamo che gli autovalori della matrice* JC *siano distinti. Siano* λ, λ' *due autovalori e* $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}'$ *gli autovettori corrispondenti. Allora si ha*

$$\mathbf{w}^\top \mathsf{J}\, \mathbf{w}' \neq 0 \quad \text{se e solo se} \quad \lambda' = -\lambda \ .$$

Dimostrazione. Mostriamo che vale

$$(\lambda + \lambda')\mathbf{w}^\top \mathsf{J}\mathbf{w}' = 0 \ .$$

Infatti con un breve calcolo abbiamo

$$\begin{aligned}(\lambda + \lambda')\mathbf{w}^\top \mathsf{J}\mathbf{w}' &= (\mathsf{JC}\mathbf{w})^\top \mathsf{J}\mathbf{w}' + \mathbf{w}^\top \mathsf{J}(\mathsf{JC}\mathbf{w}') \\ &= \mathbf{w}^\top \mathsf{CJ}^\top \mathsf{J}\mathbf{w}' - \mathbf{w}^\top \mathsf{C}\mathbf{w}' = 0\end{aligned}$$

perché $\mathsf{J}^\top\mathsf{J} = \mathsf{I}$. Se $\lambda + \lambda' \neq 0$ allora deve essere $\mathbf{w}^\top \mathsf{J}\mathbf{w}' = 0$. Resta da mostrare che se $\lambda + \lambda' = 0$, allora $\mathbf{w}^\top \mathsf{J}\mathbf{w}' = 0$ non può annullarsi. Per assurdo, se ciò avvenisse allora si avrebbe $\mathbf{w}^\top \mathsf{J}\mathbf{w}' = 0$ per tutti gli autovettori $\mathbf{w}'$ della matrice JC. Poiché gli autovettori formano una base di $\mathbb{R}^{2n}$ dovremmo concludere che $\mathbf{w} = 0$ in virtù della non degenerazione della forma simplettica. Ciò è in contrasto col fatto che $\mathbf{w}$ debba essere un autovettore, e quindi non nullo. *Q.E.D.*

Disponiamo ora gli autovalori e gli autovettori della matrice JC nell'ordine

$$(A.19) \qquad \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 \ , & \ldots , & \lambda_n \ , & \lambda_{n+1} = -\lambda_1 \ , & \ldots , & \lambda_{2n} = -\lambda_n \ , \\ \mathbf{w}_1 \ , & \ldots , & \mathbf{w}_n \ , & \mathbf{w}_{n+1} \ , & \ldots , & \mathbf{w}_{2n} \ , \end{array}$$

il che è possibile grazie al lemma A.5. Calcoliamo poi le n quantità

$$d_j = \mathbf{w}_j^\top \mathsf{J}\mathbf{w}_{j+n} \ , \quad j = 1, \ldots, n \ .$$

Costruiamo infine la matrice

$$(A.20) \qquad \mathsf{M} = (\mathbf{w}_1/d_1, \ldots, \mathbf{w}_n/d_n, \mathbf{w}_{n+1}, \ldots, \mathbf{w}_{2n})$$

allineando in colonna gli autovettori nell'ordine che abbiamo scelto, e avendo diviso i primi n per le costanti d_j appena calcolate.

Proposizione A.7: *Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari (A.16). Se gli autovalori della matrice* JC *sono distinti allora esiste una trasformazione canonica lineare* $\mathbf{z} = \mathsf{M}\boldsymbol{\zeta}$ *che pone il sistema nella forma diagonale*

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \Lambda\boldsymbol{\zeta} \ , \quad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, -\lambda_1, \ldots, -\lambda_n) \ .$$

Dimostrazione. La matrice M è quella costruita nella (A.20). Dimostriamo anzitutto che essa è simplettica, ossia che vale $\mathsf{M}^\top \mathsf{J}\mathsf{M} = \mathsf{J}$. A tal fine scriviamo quest'ultima relazione per le colonne di M. Denotiamo con $a_{j,k}$ gli elementi della matrice $\mathsf{M}^\top\mathsf{J}\mathsf{M}$, e calcoliamo

$$a_{j,j+n} = \frac{1}{d_j}\mathbf{w}_j^\top \mathsf{J}\mathbf{w}_{j+n} = 1 \ , \quad a_{j+n,j} = \frac{1}{d_j}\mathbf{w}_{j+n}^\top \mathsf{J}\mathbf{w}_{j+n} = -1 \ ,$$

e $a_{j,k} = 0$ in tutti gli altri casi. Ciò segue immediatamente dal lemma A.6 e dalla definizione di d_j. Gli elementi che abbiamo trovato sono proprio quelli della matrice J. Per mostrare che M pone il sistema di equazioni in forma diagonale basta osservare che le sue colonne sono autovettori della matrice JC, e dunque la matrice $\Lambda = \mathsf{M}^{-1}\mathsf{JCM}$ è diagonale, e i suoi elementi diagonali sono gli autovalori corrispondenti agli autovettori posti sulle colonne di M. Ciò è quanto affermato dalla proposizione A.1. *Q.E.D.*

A.2.2 Non unicità della trasformazione a forma normale

La matrice M non è determinata in modo univoco: è sempre possibile moltiplicarla a destra per una matrice diagonale simplettica. Per verificarlo denotiamo con $\mathsf{R} = \mathrm{diag}(r_1, \ldots, r_{2n})$ la matrice in questione. Per quanto abbiamo visto nel paragrafo A.1.3 la matrice MR diagonalizza il sistema lineare. Poiché poi R soddisfa la condizione $\mathsf{R}^\top\mathsf{J}\mathsf{R} = \mathsf{J}$ abbiamo[6]

$$(\mathsf{MR})^\top \mathsf{J}(\mathsf{MR}) = \mathsf{R}^\top(\mathsf{M}^\top\mathsf{J}\mathsf{M})\mathsf{R} = \mathsf{R}^\top\mathsf{J}\mathsf{R} = \mathsf{J} \ ,$$

sicché MR è simplettica, come affermato.

Resta da determinare in modo più preciso la forma della matrice R. A tal fine riscriviamola nella forma più comoda

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} \mathsf{R}_0 & 0 \\ 0 & \mathsf{R}_1 \end{pmatrix} \ , \quad \mathsf{R}_0 = \mathrm{diag}(r_1, \ldots, r_n) \ , \ \mathsf{R}_1 = \mathrm{diag}(r'_1, \ldots, r'_n)$$

[6] Per inciso, il calcolo qui riportato mostra di fatto che il prodotto di matrici simplettiche è simplettico, perché non si fa nessun uso del fatto che R sia diagonale. Da qui si arriva facilmente a stabilire che le matrici simplettiche formano un gruppo rispetto alla moltiplicazione. L'elemento neutro è la matrice identità. Da $\mathsf{M}^\top\mathsf{J}\mathsf{M} = \mathsf{J}$ otteniamo subito $(\det \mathsf{M})^2 = 1$, e dunque una matrice simplettica ammette sempre inversa, che si verifica subito essere simplettica. Infine il prodotto di matrici è associativo.

e ricordando la condizione $\mathsf{R}^\top \mathsf{J} \mathsf{R} = \mathsf{J}$ calcoliamo

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \mathsf{R}_0 & 0 \\ 0 & \mathsf{R}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{I} \\ -\mathsf{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{R}_0 & 0 \\ 0 & \mathsf{R}_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathsf{R}_0 & 0 \\ 0 & \mathsf{R}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{R}_1 \\ -\mathsf{R}_0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{R}_0\mathsf{R}_1 \\ -\mathsf{R}_0\mathsf{R}_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{I} \\ -\mathsf{I} & 0 \end{pmatrix} \ .\end{aligned}$$

Dall'ultima riga otteniamo la condizione $\mathsf{R}_0\mathsf{R}_1 = \mathsf{I}$, e concludiamo che *la matrice simplettica* M *che pone l'Hamiltoniana quadratica in forma normale può sostituirsi con la matrice* MR, *dove* R *è una matrice diagonale della forma*

$$(A.21) \qquad \mathsf{R} = \begin{pmatrix} \mathsf{R}_0 & 0 \\ 0 & \mathsf{R}_0^{-1} \end{pmatrix} \ , \quad \mathsf{R}_0 = \operatorname{diag}(r_1, \ldots, r_n) \ .$$

A.2.3 Forma normale complessa dell'Hamiltoniana

Veniamo alla forma normale dell'Hamiltoniana, ricorrendo per ora alle variabili complesse. Per scriverla nel modo più semplice conviene separare nuovamente le coordinate dai momenti denotando le prime con $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ e i secondi con $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ e scrivendo $\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$. Tenuto conto di come sono ordinati gli autovalori della matrice JC ci risulterà conveniente anche scrivere la matrice diagonale come

$$(A.22) \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_0 & 0 \\ 0 & -\Lambda_0 \end{pmatrix} \ , \quad \Lambda_0 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \ .$$

Proposizione A.8: *Nelle ipotesi della proposizione A.7, la trasformazione lineare generata dalla matrice* M *definita dalla (A.20) pone l'Hamiltoniana quadratica nella forma normale*

$$(A.23) \qquad H(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j \eta_j \ .$$

Dimostrazione. Trasformando l'Hamiltoniana quadratica $\frac{1}{2}\mathbf{z}^\top \mathsf{C}\mathbf{z}$ si ottiene la nuova Hamiltoniana $\frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta}^\top \mathsf{M}^\top \mathsf{CM}\boldsymbol{\zeta}$. Ricordando che $\mathsf{M}^{-1}\mathsf{JCM} = \Lambda$ basta calcolare

$$\mathsf{M}^\top \mathsf{CM} = -\big(\mathsf{M}^\top \mathsf{J}\big)\mathsf{JCM} = -\big(\mathsf{M}^\top \mathsf{JM}\big)\big(\mathsf{M}^{-1}\mathsf{JCM}\big) \ , = -\mathsf{J}\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_0 \\ \Lambda_0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

che è matrice simmetrica. Dunque l'Hamiltoniana trasformata è $H(\boldsymbol{\zeta}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta}^\top \mathsf{J}\Lambda\boldsymbol{\zeta}$, che riscritta in coordinate $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ non è altro che la (A.23). *Q.E.D.*

A.2.4 Integrali primi

L'Hamiltoniana in forma normale (A.23) ammette evidentemente n integrali primi in involuzione, e precisamente

$$(A.24) \qquad \Psi_j(\xi_j, \eta_j) = \xi_j \eta_j \ , \quad j = 1, \ldots, n \ .$$

Il sistema risulta dunque essere integrabile nel senso di Liouville.[7] Tuttavia le funzioni così determinate hanno in generale valori complessi, mentre sarebbe desiderabile avere degli integrali primi per l'Hamiltoniana di partenza, scritta in variabili reali.

Considerazioni analoghe valgono per il flusso. Si osserva subito che le equazioni di Hamilton sono

$$\dot{\xi}_j = \lambda_j \xi_j \ , \quad \dot{\eta}_j = -\lambda_j \eta_j \ , \tag{A.25}$$

e le soluzioni corrispondenti al dato iniziale $\xi_{j,0}, \eta_{j,0}$ si scrivono

$$\xi_j(t) = \xi_{j,0} e^{\lambda_j t} \ , \quad \eta_j(t) = \eta_{j,0} e^{-\lambda_j t} \ ,$$

Da queste formule non è però immediato comprendere quale sia il flusso nello spazio reale, ove il problema iniziale è ambientato. Procediamo dunque ad un'ulteriore analisi, limitando sempre la discussione al caso di autovalori distinti.

A.2.5 Forma normale reale nel caso di autovalori immaginari puri

Anche nel caso hamiltoniano vale l'osservazione generale che le variabili complesse nascondono aspetti della dinamica che sono invece interessanti. Ciò si verifica in particolare nel caso di autovalori immaginari puri.

Consideriamo per semplicità il caso di un sistema ad un grado di libertà, e vediamo qui come in tal caso l'Hamiltoniana possa assumere la forma normale reale particolarmente utile

$$H(x,y) = \frac{\omega}{2}(y^2 + x^2) \tag{A.26}$$

che il lettore riconoscerà immediatamente come quella di un oscillatore armonico.

Supponiamo che la matrice JC ammetta gli autovalori $\lambda = i\omega$ e $\lambda^* = -i\omega$ con gli autovettori corrispondenti $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}^* = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$. Allora, ricordando che la forma simplettica è anticommutativa, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^\top \mathsf{J} \mathbf{w}^* &= (\mathbf{u} + i\mathbf{v})^\top \mathsf{J} (\mathbf{u} - i\mathbf{v}) \\ &= i(-\mathbf{u}^\top \mathsf{J} \mathbf{v} + \mathbf{v}^\top \mathsf{J} \mathbf{u}) = -2i \mathbf{u}^\top \mathsf{J} \mathbf{v} \ , \end{aligned}$$

che è una quantità puramente immaginaria. Se denotiamo

$$d = \mathbf{u}^\top \mathsf{J} \mathbf{v} \tag{A.27}$$

possiamo sempre ordinare gli autovalori in modo che d sia una quantità positiva. Precisamente, procediamo creando l'associazione

$$\begin{matrix} i\omega \ , & -i\omega \\ \mathbf{u} \ , & \mathbf{v} \end{matrix}$$

[7] Non è detto che si possa sempre applicare il teorema di Arnold–Jost per introdurre variabili d'angolo–azione perché le superfici invarianti determinate mediante gli integrali primi non sono necessariamente compatte.

dove il segno di ω è scelto in modo che la quantità d definita dalla (A.27) sia positiva.[8] Costruiamo poi una matrice di trasformazione

$$\mathsf{T} = (\mathbf{u}/\sqrt{d}\,,\ \mathbf{v}/\sqrt{d})\ . \tag{A.28}$$

Tale matrice è ovviamente simplettica. Infatti si verifica subito che

$$\mathsf{T}^\top \mathsf{J} \mathsf{T} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} \mathbf{u}^\top \mathsf{J}\mathbf{u} & \mathbf{u}^\top \mathsf{J}\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^\top \mathsf{J}\mathbf{u} & \mathbf{v}^\top \mathsf{J}\mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Dalla proprietà (iii) del lemma A.3 abbiamo poi

$$\mathsf{J}\mathsf{C}\mathbf{u} = -\omega\mathbf{v}\ ,\quad \mathsf{J}\mathsf{C}\mathbf{v} = \omega\mathbf{u}\ ,$$

e scrivendo questa relazione per le colonne della matrice T abbiamo

$$\mathsf{J}\mathsf{C}\mathsf{T} = \mathsf{T}\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}\ ,$$

ovvero

$$\mathsf{T}^{-1}\mathsf{J}\mathsf{C}\mathsf{T} = \mathsf{J}\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}\ .$$

Da qui ricaviamo direttamente che le equazioni si trasformano in

$$\dot{x} = \omega y\ ,\quad \dot{y} = -\omega x\ ,$$

e che la forma normale dell'Hamiltoniana è la (A.26).

A.2.6 Algoritmo di costruzione della forma normale

Il procedimento che abbiamo seguito nei paragrafi precedenti è costruttivo. Per facilitarne l'uso nelle applicazioni riassumiamo qui di seguito i singoli passi da svolgere.

(i) Si risolve l'equazione secolare $\det(\mathsf{J}\mathsf{C} - \lambda\mathsf{I}) = 0$, determinando così gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ con i corrispondenti $-\lambda_1, \ldots, -\lambda_n$ (qui supponiamo che gli autovalori siano tutti distinti).

(ii) Si trovano i $2n$ autovettori $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{2n}$ risolvendo l'equazione agli autovalori $\mathsf{J}\mathsf{C}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$.

(iii) Si determinano le n costanti

$$d_j = \mathbf{w}_j^\top \mathsf{J}\mathbf{w}_{j+n}\ ,\quad j = 1, \ldots, n\ .$$

(iv) Si costruisce la matrice [9]

$$\mathsf{M} = (\mathbf{w}_1/d_1, \ldots, \mathbf{w}_n/d_n,\ \mathbf{w}_{n+1}, \ldots, \mathbf{w}_{2n})\ .$$

---

[8] Si noti bene che questa scelta non è innocua: da essa dipende il segno di ω nell'Hamiltoniana in forma normale. Un esempio notevole si ha nello studio dei punti triangolari di Lagrange nel problema dei tre corpi, trattato nel paragrafo 7.4.5.

[9] Si deve tener ben presente che nel corso della dimostrazione si fa uso essenziale dell'ordinamento $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, -\lambda_1, \ldots, -\lambda_n$ degli autovalori, e che questo si riflette a sua volta sull'ordinamento degli autovettori. Ciò diventa rilevante in particolare quando si voglia implementare il calcolo con metodi numerici o mediante manipolazione algebrica. Il calcolo degli autovalori viene tipicamente svolto mediante sottoprogrammi di libreria

(v) Se lo si ritiene utile, si può ancora moltiplicare la matrice M ottenuta per una seconda matrice diagonale simplettica della forma (A.21).

La matrice M così costruita fornisce la trasformazione canonica richiesta.

A.2.7 Il caso di autovalori complessi coniugati

Consideriamo per semplicità un sistema a due gradi di libertà, e denotiamo gli autovalori con $\lambda = \mu + i\omega$, $\lambda^* = \mu - i\omega$, $-\lambda = -\mu + i\omega$, $-\lambda^* = -\mu - i\omega$ e gli autovettori corrispondenti con $\mathbf{w}_+ = \mathbf{u}_+ + i\mathbf{v}_+$, $\mathbf{w}_+^* = \mathbf{u}_+ - i\mathbf{v}_+$, $\mathbf{w}_- = \mathbf{u}_- + i\mathbf{v}_-$, $\mathbf{w}_-^* = \mathbf{u}_- - i\mathbf{v}_-$, nell'ordine in cui sono scritti. Per il lemma A.6 sappiamo che valgono le relazioni $\mathbf{w}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{w}_+ = 0$, $\mathbf{w}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{w}_+^* = 0$, $\mathbf{w}_-^\top \mathsf{J}\mathbf{w}_- = 0$, $\mathbf{w}_-^\top \mathsf{J}\mathbf{w}_-^* = 0$, $\mathbf{w}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{w}_-^* = 0$ e $\mathbf{w}_-^\top \mathsf{J}\mathbf{w}_+^* = 0$, mentre $\mathbf{w}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{w}_-$ e il suo coniugato ${\mathbf{w}_+^*}^\top \mathsf{J}\mathbf{w}_+^*$ sono non nulli, sebbene non necessariamente normalizzati.

Lemma A.9: *I vettori* $\mathbf{u}_+$, $\mathbf{u}_-$, $\mathbf{v}_+$, $\mathbf{v}_-$ *soddisfano le relazioni*

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{u}_- + \mathbf{v}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{v}_- = 0\ ,\\
&\mathbf{u}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{v}_+ = \mathbf{u}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{v}_- = \mathbf{u}_-^\top \mathsf{J}\mathbf{v}_+ = \mathbf{u}_-^\top \mathsf{J}\mathbf{v}_- = 0\ ,
\end{aligned}
\tag{A.29}
$$

e inoltre $\mathbf{u}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{u}_-$ *e* $\mathbf{v}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{v}_-$ *non si annullano.*

Dimostrazione. Da $\mathbf{w}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{w}_+^* = 0$ si ricava

$$
(\mathbf{u}_+ + i\mathbf{v}_+)^\top \mathsf{J}(\mathbf{u}_+ - i\mathbf{v}_+) = -2i\mathbf{u}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{v}_+ = 0\ .
$$

Con un calcolo analogo, da $\mathbf{w}_-^\top \mathsf{J}\mathbf{w}_-^* = 0$ si ricava $\mathbf{u}_-^\top \mathsf{J}\mathbf{v}_- = 0$. Queste sono due delle relazioni cercate.

Da $\mathbf{w}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{w}_-^* = 0$ si ottiene

$$
(\mathbf{u}_+ + i\mathbf{v}_+)^\top \mathsf{J}(\mathbf{u}_- - i\mathbf{v}_-) = (\mathbf{u}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{u}_- + \mathbf{v}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{v}_-) - i(\mathbf{u}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{v}_- - \mathbf{v}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{u}_-) = 0\ ,
$$

e da qui, annullando separatamente la parte reale e immaginaria, si ricavano le relazioni

$$
\mathbf{u}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{u}_- + \mathbf{v}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{v}_- = 0\ ,\quad \mathbf{u}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{v}_- - \mathbf{v}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{u}_- = 0\ .
\tag{A.30}
$$

La prima di queste altro non e' che la prima delle (A.29), e resta da mostrare che i due addendi non sono nulli. La seconda sarà utile tra poco. Si calcola poi

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{w}_- &= (\mathbf{u}_+ + i\mathbf{v}_+)^\top \mathsf{J}(\mathbf{u}_- + i\mathbf{v}_-)\\
&= \bigl(\mathbf{u}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{u}_- - \mathbf{v}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{v}_-\bigr) + i\bigl(\mathbf{u}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{v}_- + \mathbf{u}_-^\top \mathsf{J}\mathbf{v}_+\bigr)\ ,
\end{aligned}
\tag{A.31}
$$

e passando ai complessi coniugati si ricava anche

$$
{\mathbf{w}_+^*}^\top \mathsf{J}\mathbf{w}_-^* = \bigl(\mathbf{u}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{u}_- - \mathbf{v}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{v}_-\bigr) - i\bigl(\mathbf{u}_+^\top \mathsf{J}\mathbf{v}_- + \mathbf{u}_-^\top \mathsf{J}\mathbf{v}_+\bigr)\ .
\tag{A.32}
$$

---

o più semplicemente mediante le istruzioni del pacchetto di manipolazione algebrica, e questi solitamente restituiscono gli autovalori calcolati in un ordine che non è quello specificato qui. È quindi indispensabile procedere ad un riordinamento prima di passare alla scrittura della matrice M.

Per il seguito si usano le relazioni ovvie

$$
\mathbf{u}_+ = \frac{\mathbf{w}_+ + \mathbf{w}_+^*}{2} \ , \quad \mathbf{v}_+ = \frac{\mathbf{w}_+ - \mathbf{w}_+^*}{2i} \ ,
$$
$$
\mathbf{u}_- = \frac{\mathbf{w}_- + \mathbf{w}_-^*}{2} \ , \quad \mathbf{v}_- = \frac{\mathbf{w}_- - \mathbf{w}_-^*}{2i} \ .
$$

Q.E.D.

Qui dobbiamo necessariamente considerare un sistema a due gradi di libertà. Prendiamo come paradigma l'Hamiltoniana

$$
H = \mu q_1 p_1 + \mu q_2 p_2 + \omega(q_1 p_2 - q_2 p_1) \tag{A.33}
$$

dove μ e ω sono parametri reali, e svolgiamo il calcolo seguendo lo schema del paragrafo A.2.6. La matrice della forma quadratica si scrive

$$
\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \mu \\ \mu & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & \mu & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

e la matrice $\mathsf{A} = \mathsf{J}\mathsf{C}$ del sistema di equazioni lineari diventa

$$
\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \mu & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & -\omega \\ 0 & 0 & \omega & -\mu \end{pmatrix}
$$

Con qualche calcolo si scrive l'equazione secolare

$$
\left[(\lambda+\mu)^2 + \omega^2\right]\left[(\lambda-\mu)^2 + \omega^2\right] = 0
$$

e la si risolve trovando gli autovalori

$$
\mu + i\omega \, , \ \mu - i\omega \, , \ -\mu - i\omega \, , \ -\mu + i\omega \ ,
$$

riordinati nel modo voluto. Si procede poi a calcolare gli autovettori e ad allinearli in colonna in modo da costruire la matrice

$$
\mathsf{M} = \begin{pmatrix} i & -i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

che diagonalizza le equazioni, ma non è ancora simplettica. Si calcolano le due matrici ausiliarie

$$
\mathsf{D} = \mathrm{diag}(2,2,2,2) \ , \quad \mathsf{G} = \mathrm{diag}(2,2,1,1)
$$

e mediante la seconda di queste si costruisce la matrice di trasformazione

$$
\tilde{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} i/2 & -i/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{A.34}
$$

che è simplettica, come richiesto. Possiamo infine moltiplicare a destra per la matrice simplettica $\mathsf{R} = \mathrm{diag}(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, e otteniamo

$$(A.35) \qquad \mathsf{T} = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

L'Hamiltoniana nelle nuove variabili complesse ha la forma diagonale voluta

$$H(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = (\mu + i\omega)\xi_1\eta_1 + (\mu - i\omega)\xi_2\eta_2 .$$

È utile anche scrivere la matrice inversa della (A.35), ossia

$$(A.36) \qquad \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Veniamo agli integrali primi, cercando di ricavare delle funzioni reali dalle espressioni complesse (A.24). Con qualche tentativo ci si rende conto che la funzione $\Phi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2$ si trasforma tramite la (A.36) in

$$(A.37) \qquad \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 ,$$

che è un integrale primo per l'Hamiltoniana (A.33). L'Hamiltoniana stessa è un secondo integrale primo, ma ne possiamo ricavare uno di forma ancora più semplice

$$(A.38) \qquad \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 .$$

Concentriamo la nostra attenzione sull'insieme dei punti di $\mathbb{R}^4$ che soddisfano $\Phi = \Psi = 0$; questo è particolarmente interessante, in quanto contiene l'origine, che è punto di equilibrio. Con una breve riflessione si verifica che tale insieme è l'unione dei due piani[10] $y_1 = y_2 = 0$ e $x_1 = x_2 = 0$. Questi due piani sono invarianti per il flusso.

Al fine di descrivere il flusso nello spazio delle fasi, e quindi anche sui due piani invarianti che abbiamo appena identificato, calcoliamo esplicitamente l'operatore di

[10] Che tali piani soddisfino le equazioni è immediato. Occorre una breve riflessione per convincersi che essi esauriscono tutte le soluzioni. A tal fine si osserva che le due equazioni non possono essere soddisfatte contemporaneamente se non si annullano almeno due delle coordinate. Infatti, se ciò non fosse vero si avrebbe necessariamente $x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$ oppure $y_1 \neq 0$ e $y_2 \neq 0$. Supponendo che si verifichi questo secondo caso consideriamo le due equazioni $x_1y_1 + x_2y_2 = 0$ e $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ come un sistema lineare per le incognite x_1, x_2; questo ammette la sola soluzione $x_1 = x_2 = 0$ perché il determinante $-y_1^2 - y_2^2$ non si annulla. Il caso in cui le due coordinate non nulle siano x_1 e x_2 si tratta in modo analogo, e quindi almeno due delle coordinate si devono annullare. Ammettendo poi che si annulli solo una coppia di coordinate, vediamo che tale coppia non può essere nessuna delle (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1) o (x_2, y_2). Infatti nel primo caso da $\Psi = 0$ si ricaverebbe immediatamente $x_2y_2 = 0$, e quindi si dovrebbe annullare necessariamente anche una delle coordinate x_2 e y_2. In modo analogo si escludono gli altri casi.

evoluzione dato dalla proposizione A.2, e otteniamo

$$
(A.39) \qquad \mathsf{U}(t) = \begin{pmatrix} e^{\mu}\cos\omega t & -e^{\mu}\sin\omega t & 0 & 0 \\ e^{\mu}\sin\omega t & e^{\mu}\cos\omega t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\mu}\cos\omega t & -e^{-\mu}\sin\omega t \\ 0 & 0 & e^{-\mu}\sin\omega t & e^{-\mu}\cos\omega t \end{pmatrix}
$$

Da qui si vede come il flusso sui piani invarianti sia una rotazione con frequenza ω con ampiezza che (se $\mu > 0$) si amplifica esponenzialmente sul piano x_1, x_2 e si contrae esponenzialmente sul piano y_1, y_2. Questo è il comportamento di un punto di fuoco rispettivamente instabile e stabile.

Quanto abbiamo visto si applica a qualunque quaterna di variabili complesse ξ, η corrispondente ad autovalori a due a due complessi coniugati e opposti. Ne concludiamo che *se l'Hamiltoniana quadratica ammette m quaterne di autovalori complessi coniugati $\mu \pm i\omega$, $-\mu \pm i\omega$ di molteplicità 1 allora nello spazio delle fasi esistono m sottospazi indipendenti di dimensione 4 invarianti per il flusso. Ciascuno di questi sottospazi è il prodotto di una coppia di piani indipendenti e invarianti sui quali la dinamica si riduce a quella di un punto di fuoco rispettivamente stabile e instabile.*