Appendice B

STRUMENTI ANALITICI

Questa appendice è dedicata alle funzioni necessarie per gli sviluppi in serie in uso in Meccanica Celeste. La discussione è volutamente breve, in quanto limitata a quegli aspetti che in qualche modo vengono usati nel resto delle note. Il lettore interessato ad una discussione più approfondita potrà consultare un qualunque testo di Analisi Matematica che contenga un capitolo sulle funzioni speciali.

B.1 I polinomi di Legendre

In Meccanica Celeste, come del resto in altri campi della Fisica, si incontra spesso una funzione della forma

$$(B.1) \qquad V(z,h) = \frac{1}{\sqrt{1-2zh+h^2}}\ , \quad \left|2zh-h^2\right| < 1\ ,$$

dove z e h sono abitualmente quantità reali, ma ai fini della discussione si potrà senz'altro assumere che siano complesse. Tale funzione si presenta ad esempio quando si consideri il potenziale kepleriano che descrive l'interazione tra due masse, o il caso di cariche elettriche interagenti con potenziale coulombiano, in quanto l'inverso della distanza può scriversi proprio nella forma indicata. Ci proponiamo di sviluppare la funzione in serie di potenze di z e h.

B.1.1 Lo sviluppo in polinomi di Legendre

Grazie alla formula dello sviluppo del binomio abbiamo

$$(B.2) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-2zh+h^2}} = \sum_{n\ge 0}(-)^n\binom{-1/2}{n}\left(2zh-h^2\right)^n\ ,$$

dove

$$\binom{\alpha}{0} = 1\ , \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}\ \text{per } n>0$$

è il coefficiente binomiale. Nel nostro caso, essendo $\alpha = -1/2$, per $n > 0$ troviamo

$$\begin{aligned}\binom{-1/2}{n} &= \frac{1}{n!}\cdot\Bigl(-\frac{1}{2}\Bigr)\cdot\Bigl(-\frac{3}{2}\Bigr)\cdot\ldots\cdot\Bigl(-\frac{2n-1}{2}\Bigr)\\ &= (-)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\ ,\end{aligned}$$

avendo definito il *semifattoriale* come

$$(-1)!! = 0!! = 1\ ,\quad n!! = n\cdot(n-2)!!\quad \text{per } n\geq 1\ . \tag{B.3}$$

In tal modo possiamo riscrivere la (B.2) come

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zh+h^2}} = \sum_{n\geq 0}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\bigl(2zh-h^2\bigr)^n\ . \tag{B.4}$$

La serie a secondo membro risulta essere convergente per $|2zh - h^2| < 1$. Osserviamo però che ciascun termine della somma è evidentemente un polinomio di grado $2n$ in z ed h. Se assumiamo la condizione più forte

$$|2zh| + |h^2| < 1$$

allora la serie converge assolutamente, e ne possiamo riordinare i termini nel modo che ci risulta più conveniente. Tradizionalmente si ricorre ad uno sviluppo in potenze di h con coefficienti che risultano essere polinomi in z: ciò si ricava da un breve esame della (B.4), e sarà comunque evidente tra breve. Scriveremo dunque

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zh+h^2}} = P_0(z) + hP_1(z) + h^2P_2(z) + h^3P_3(z) + \ldots = \sum_{k\geq 0} h^k P_k(z)\ ; \tag{B.5}$$

i coefficienti $P_k(z)$ vengono chiamati *polinomi di Legendre*.[1] Si vede immediatamente che $P_0(z) = 1$. Per $k > 0$ occorre sviluppare la potenza

$$\bigl(2zh-h^2\bigr)^n = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(2zh)^{n-l}(-h^2)^l = \sum_{l=0}^{n}(-)^l\binom{n}{l}2^{n-l}h^{n+l}z^{n-l}$$

e riordinare i termini della somma (B.4) per potenze crescenti di h, ossia

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-2zh+h^2}} &= \sum_{n\geq 0}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\sum_{l=0}^{n}(-)^l\binom{n}{l}2^{n-l}h^{n+l}z^{n-l}\\ &= \sum_{k\geq 0}h^k\sum_{l=0}^{\lfloor k/2\rfloor}(-)^l\frac{(2k-2l-1)!!}{2^l l!(k-2l)!}z^{k-2l}\ .\end{aligned} \tag{B.6}$$

Si noti che nella seconda riga occorre introdurre l'indice di somma $k = n+l$ e sostituire ovunque n con $k-l$, sicché la seconda somma si estende fino a $l \leq k-l$, ovvero fino a

[1] Per una esposizione esauriente si veda ad esempio [126], Ch. XV.

$l \leq \lfloor k/2 \rfloor$, la parte intera di $k/2$. Inoltre si deve calcolare il coefficiente numerico come

$$\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \cdot \frac{2^{n-l} n!}{l!(n-l)!} = \frac{(2n-1)!!}{2^l l!(n-l)!} = \frac{(2k-2l-1)!!}{2^l l!(k-2l)!} \ .$$

Dalla (B.6) otteniano l'espressione esplicita per i polinomi di Legendre

$$(B.7) \qquad P_0(z) = 1 \ , \quad P_k(z) = \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-)^l \frac{(2k-2l-1)!!}{2^l l!(k-2l)!} z^{k-2l} \text{ per } k > 0 \ .$$

Da questa formula si vede che $P_k(z)$ è un polinomio non omogoeneo di grado k che contiene solo potenze della stessa parità di k, ossia monomi di grado pari per k pari e di grado dispari per k dispari.

B.1.2 La formula di Rodrigues

Per i polinomi di Legendre vale la formula

$$(B.8) \qquad P_k(z) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dz^k} (z^2-1)^k \ .$$

Per convincersene basta far uso della formula del binomio e calcolare

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dz^k}(z^2-1)^k &= \frac{d^k}{dz^k} \sum_{l=0}^{k} (-)^l \binom{k}{l} z^{2(k-l)} \\ &= \sum_{l=0}^{k} (-)^l \binom{k}{l} (2k-2l)(2k-2l-1) \cdot \ldots \cdot (k-2l+1) z^{k-2l} \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-)^l \frac{k!}{l!(k-l)!} \cdot \frac{(2k-2l)!}{(k-2l)!} z^{k-2l} \ , \end{aligned}$$

dove il limite superiore della somma è troncato a $\lfloor k/2 \rfloor$ perché $\frac{d^k}{dz^k} z^{2k-2l}$ si annulla per $2k-2l < k$. Facendo uso dell'identità

$$2^n n! = (2n)!! \quad \text{per } n \geq 0$$

con $k-l$ al posto di n si ricalcola il coefficiente numerico della somma come

$$\frac{2^k k!}{2^l l!(2k-2l)!!} \cdot \frac{(2k-2l)!}{(k-2l)!} = 2^k k! \frac{(2k-2l-1)!!}{2^l l!(k-2l)!} \ ,$$

sicché si riscrive la somma come

$$\frac{d^k}{dz^k}(z^2-1)^k = 2^k k! \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-)^l \frac{(2k-2l-1)!!}{2^l l!(k-2l)!} z^{k-2l} \ .$$

La somma a destra coincide con $2^k k! P_k(z)$ in virtù della (B.7).

B.1.3 Formule ricorsive

Veniamo ora ad alcune formule ricorsive che valgono per i polinomi di Legendre e per le loro derivate.

(i) La prima formula consente di calcolare i polinomi per ricorrenza:

$$(B.9)\qquad \begin{gathered} P_0(z) = 1\ , \quad P_1(z) = zP_0(z)\ , \\ (k+1)P_{k+1}(z) = (2k+1)\, zP_k(z) - kP_{k-1}(z)\ . \end{gathered}$$

(ii) Due formule mettono in relazione un polinomio di Legendre con le derivate di altri due:

$$(B.10)\qquad kP_k(z) = zP_k'(z) - P_{k-1}'(z)$$

valida per $k > 0$, e

$$(B.11)\qquad (k+1)P_k(z) = P_{k+1}'(z) - zP_k'(z)$$

valida per $k \geq 0$.

(iii) Una quarta formula consente di calcolare la derivata di un polinomio di Legendre come combinazione di due polinomi:

$$(B.12)\qquad (z^2-1)P_k'(z) = kzP_k(z) - kP_{k-1}(z)\ .$$

Passiamo a verificare la validità di queste formule.

Per ricavare la (B.9) si procede come segue. Si deriva $V(z,h)$ rispetto ad h, ottenendo

$$(B.13)\qquad (1-2zh+h^2)\frac{\partial}{\partial h}\frac{1}{\sqrt{1-2zh+h^2}} = \frac{z-h}{\sqrt{1-2zh+h^2}}\ .$$

Sostituiamo ora lo sviluppo (B.5) in polinomi di Legendre. Dal membro di sinistra otteniamo

$$\begin{aligned} (1-2zh+h^2)&\sum_{k\geq 0} kh^{k-1}P_k(z) \\ &= \sum_{k\geq 0} kh^{k-1}P_k(z) - 2z\sum_{k\geq 0} kh^kP_k(z) + \sum_{k\geq 0} kh^{k+1}P_k(z) \\ &= \sum_{k\geq 0}(k+1)h^kP_{k+1}(z) - 2z\sum_{k\geq 0} kh^kP_k(z) + \sum_{k\geq 1}(k-1)h^kP_{k-1}(z)\ , \end{aligned}$$

dove l'ultima riga è ottenuta dalla precedente ridefinendo gli indici di somma in modo da far comparire ovunque la potenza h^k. Procedendo allo stesso modo per il membro di destra calcoliamo

$$\begin{aligned} (z-h)\sum_{k\geq 0} h^kP_k(z) &= z\sum_{k\geq 0} h^kP_k(z) - \sum_{k\geq 0} h^{k+1}P_k(z) \\ &= z\sum_{k\geq 0} h^kP_k(z) - \sum_{k\geq 1} h^kP_{k-1}(z)\ . \end{aligned}$$

Le due espressioni appena ricavate devono coincidere, e quindi possiamo eguagliare separatamente i coefficienti delle stesse potenze di h. Per $k = 0$ otteniamo $P_1(z) = zP_0(z)$, mentre per $k > 0$ abbiamo

$$(k+1)P_{k+1}(z) - 2kzP_k(z) + (k-1)P_{k-1}(z) = zP_k(z) - P_{k-1}(z) \ .$$

Da qui si ricava immediatamente la (B.9).

Per la (B.10) si procede in modo analogo derivando $V(z,h)$ sia rispetto a z che rispetto ad h e osservando che vale

$$h\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{1-2zh+h^2}} = (z-h)\frac{\partial}{\partial h}\frac{1}{\sqrt{1-2zh+h^2}} \ ,$$

ovvero

$$h\sum_{k\geq 0} kh^{k-1}P_k(z) = (z-h)\sum_{k\geq 0} h^k P'_k(z) \ .$$

Eguagliando anche qui i coefficienti delle stesse potenze di h si ottiene $zP'_0(z) = 0$ per il coefficiente di h^0, e per $k > 0$

$$kP_k(z) = zP'_k(z) - P'_{k-1}(z) \ ,$$

che è proprio la (B.10).

Per ricavare la (B.11) occorre derivare la (B.9), calcolando

$$\begin{aligned}(k+1)P'_{k+1}(z) &= (2k+1)P_k(z) + (2k+1)\,zP'_k(z) - kP'_{k-1}(z)\\ &= (2k+1)P_k(z) + (k+1)\,zP'_k(z) + k\bigl[zP'_k(z) + kP'_{k-1}(z)\bigr]\end{aligned}$$

Sostituendo il contenuto della parentesi quadra con la (B.10) e riordinando i termini

$$(k+1)\bigl[p'_{k+1}(z) - zP'_k(z)\bigr] = (2k+1)P_k(z) + k^2P_k(z) = (k+1)^2P_k(z) \ .$$

Da qui si ricava immediatamente al (B.11).

Per verificare la (B.12) occorre riscrivere la (B.10) moltiplicando ambo i membri per z e la (B.11) sostituendo $k-1$ al posto di k, ossia

$$\begin{aligned}k\,zP_k(z) &= z^2P'_k(z) - zP'_{k-1}(z)\\ kP_{k-1(z)} &= P'_k(z) - zP'_{k-1}(z) \ .\end{aligned}$$

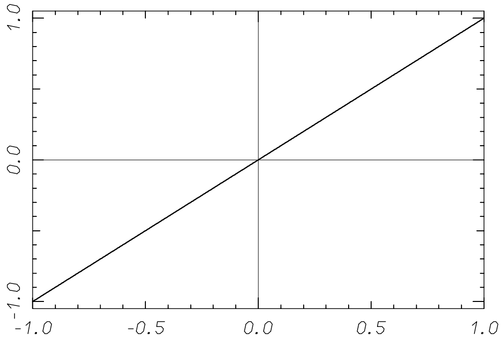
Poi si sottrae membro a membro, e si ricava la (B.12).

B.1.4 Alcune proprietà dei polinomi di Legendre

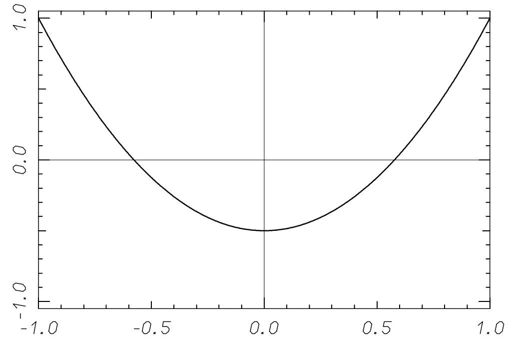
Dall'osservazione fatta in precedenza che P_k contiene solo monomi della stessa parità di k segue che $P_k(z)$ per z reale è funzione pari per k pari e dispari per k dispari, ossia vale $P_k(-z) = (-)^kP_k(z)$.

Per comodità riportiamo le formule per i polinomi di Legendre $P_0(z),\ldots,P_{10}(z)$.

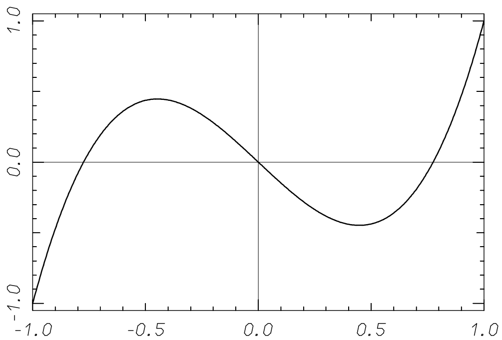
$$\begin{aligned}P_0(z) &= 1\\ P_1(z) &= z\\ P_2(z) &= \frac{1}{2}(3z^2-1)\end{aligned}$$



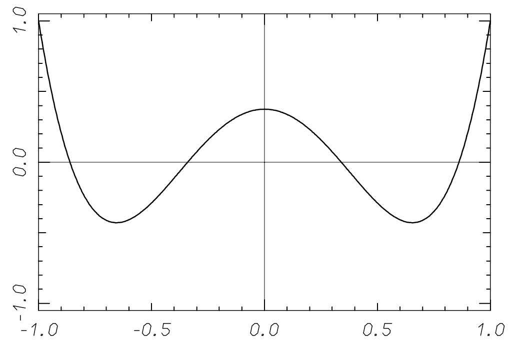
(a) $k = 1$



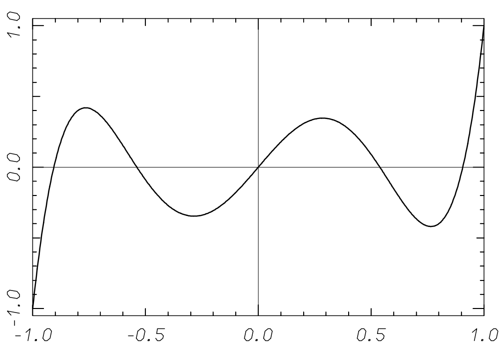
(b) $k = 2$



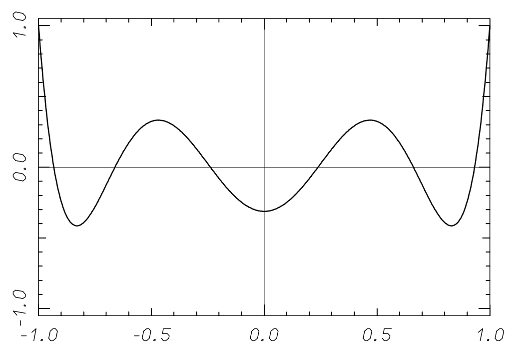
(c) $k = 3$



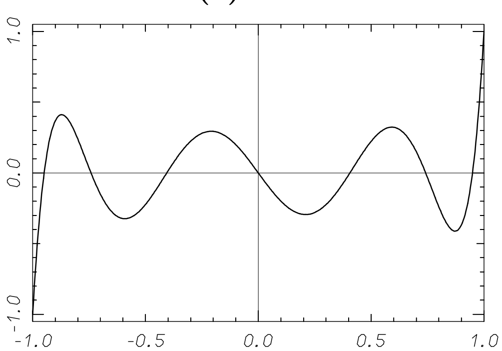
(d) $k = 4$



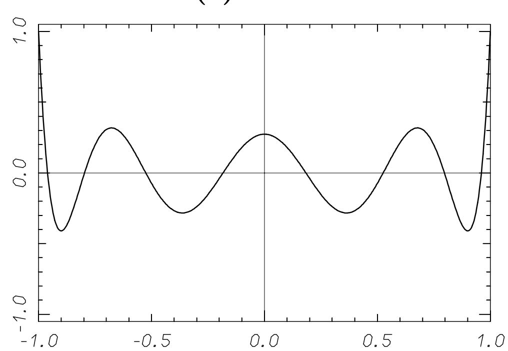
(e) $k = 5$



(f) $k = 6$



(g) $k = 7$



(h) $k = 8$

Figura B.1. Il grafico dei polinomi di Legendre per $k = 1, \ldots, 8$.

$$
\begin{aligned}
P_3(z) &= \frac{1}{2}(5z^3 - 3z)\\
P_4(z) &= \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3)\\
P_5(z) &= \frac{1}{8}(63z^5 - 70z^3 + 15z)\\
P_6(z) &= \frac{1}{16}(231z^6 - 315z^4 + 105z^2 - 5)\\
P_7(z) &= \frac{1}{16}(429z^7 - 693z^5 + 315z^3 - 35z)\\
P_8(z) &= \frac{1}{128}(6435z^8 - 12012z^6 + 6930z^4 - 1260z^2 + 35)\\
P_9(z) &= \frac{1}{128}(12155z^9 - 25740z^7 + 18018z^5 - 4620z^3 + 315z)\\
P_{10}(z) &= \frac{1}{256}(46189z^{10} - 109395z^8 + 90090z^6 - 30030z^4 + 3465z^2 - 63)
\end{aligned}
$$

In figura B.1 sono riportati i grafici di $P_1(z), \ldots, P_8(z)$ sull'intervallo $-1 \leq z \leq 1$, che è quello interessante sia per quanto riguarda il comportamento dei polinomi, sia per la limitazione imposta dalla condizione di convergenza della serie (B.4).

Se si considerano i valori agli estremi dell'intervallo $[-1, 1]$ si ha $P_k(1) = 1$ e $P_k(-1) = (-1)^k$. Per verificare questa affermazione si fa uso della formula di ricorrenza (B.9), Infatti ponendo $z = 1$ si ha

$$
\begin{gathered}
P_0(1) = 1 \ , \quad P_1(1) = 1 \cdot P_0(1) = 1 \ , \\
(k+1)P_{k+1}(1) = (2k+1)P_k(1) - kP_{k-1}(1) = (k+1) \ ,
\end{gathered}
$$

da cui segue subito $P_{k+1}(1) = 1$. Per $z = -1$ basta usare la simmetria.

Veniamo infine ad una proprietà che riguarda le radici. *Il polinomio di Legendre $P_k(z)$ possiede k radici distinte, tutte interne all'intervallo* $-1 < z < 1$. Per la verifica si fa uso della formula di Rodrigues (B.8) e del teorema di Rolle. Si osserva anzitutto che il polinomio $(z^2-1)^k$ ammette le due radici distinte $z = \pm 1$, ciascuna con molteplicità k. Ne segue che i polinomi

$$
\frac{d}{dz}(z^2-1)^k \, , \ \frac{d^2}{dz^2}(z^2-1)^k \, , \ \ldots \, , \ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z^2-1)^k
$$

hanno rispettivamente $k-1,\, k-2, \ldots, 1$ radici di molteplicità $k-1,\, k-2, \ldots, 1$ in $z = \pm 1$. Per il teorema di Rolle il polinomio $(z^2-1)^k$, avendo valori nulli all'estremo dell'intervallo $[-1, 1]$, deve avere almeno un punto stazionario all'interno dello stesso intervallo, e in quel punto la sua derivata deve annullarsi. Ma $\frac{d}{dz}(z^2-1)^k$ è un polinomio di grado $2k-1$ che ha due radici di molteplicità $k-1$ agli estremi, e quindi esso deve avere un'unica radice all'interno dell'intervallo $[-1, 1]$, e questa deve avere molteplicità 1. Denotiamo con $z = a$ tale radice (che del resto vediamo immediatamente essere in $z = 0$). Procedendo ricorsivamente, supponiamo che per $1 \leq j < k-1$ il polinomio $\frac{d^j}{dz^j}(z^2-1)^k$ possieda j radici distinte $a_1 < \ldots < a_j$ interne all'intervallo $[-1, 1]$, ciascuna di molteplicità 1, oltre alle due radici di molteplicità $k-j$ in $z = \pm 1$; ciò è vero per $j = 0$, e l'abbiamo verificato direttamente anche per $j = 1$. Denotiamo con $a_0 = -1$ e a_{j+1} gli estremi. Applicando ancora il teorema di Rolle a ciascuno degli intervalli $[a_l, a_{l+1}]$, con $l = 0, \ldots j$, sappiamo che in ciascuno di essi il polinomio $\frac{d^{j+1}}{dz^{j+1}}(z^2-1)^k$ possiede almeno una radice. Ma esso ha anche due radici di molteplicità $k - j - 1$ in $z = \pm 1$, e dunque in ciascun intervallo vi deve essere una sola radice di molteplicità 1. Dunque il polinomio $\frac{d^{j+1}}{dz^{j+1}}(z^2-1)^k$ possiede $j+1$ radici distinte $a'_1 < \ldots < a'_{j+1}$ interne all'intervallo $[-1, 1]$, ciascuna di molteplicità 1, oltre alle due radici di molteplicità $k - j - 1$ agli estremi. Di conseguenza e possiamo applicare nuovamente l'argomento ricorsivo, fino a $j = k-1$ compreso. In quest'ultimo caso concludiamo che il polinomio $\frac{d^k}{dz^k}(z^2-1)^k$ possiede k radici distinte all'interno dell'intervallo $[-1, 1]$, mentre non ha più nessuna radice agli estremi. Questo è quanto abbiamo affermato.