Appendice C

DISEGUAGLIANZE DIOFANTEE

La discussione sulla convergenza o sulle proprietà asintotiche delle serie perturbative dipende dal comportamento dei piccoli divisori. In questa appendice riporto la deduzione della *diseguaglianza diofantea*, che è la stima usata più comunemente nelle versioni quantitative della teoria delle perturbazioni.

C.1 Sulla misura delle frequenze non risonanti

Se si considera un sistema completamente non isocrono, soddisfacente la condizione di non degenerazione

$$\det \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k} \right) \neq 0$$

le frequenze dell'orbita dipendono, come si è già osservato, dal valore iniziale delle azioni $p_1, \ldots, p_n$. È spontaneo chiedersi quale sia la possibilità che una scelta casuale dei dati iniziali dia luogo a un'orbita risonante o non risonante. A tal fine, tenendo conto del fatto che le frequenze $\omega(p)$ possono usarsi come coordinate al posto delle azioni, si ricorre ad una stima della misura (nel senso di Lebesgue) delle frequenze risonanti.

Il caso più semplice riguarda un sistema a due gradi di libertà, $n = 2$. In effetti, in questo caso si ha risonanza se il rapporto ω_1/ω_2 tra le frequenze è razionale, e non risonanza se ω_1/ω_2 è irrazionale. È ben noto che su un qualunque intervallo della retta reale l'insieme dei razionali è denso, ma ha misura di Lebesgue zero. Per $n > 2$ si ha un risultato analogo: le frequenze non risonanti hanno misura 1.[1]

[1] Dal punto di vista della teoria della misura questo significa che le non risonanze sono più probabili. Se però si prende in esame l'aspetto topologico possono sorgere molte perplessità, perché le risonanze sono dense. Ancor più delicato è l'aspetto pratico: se si tiene in considerazione l'inevitabile imprecisione nella determinazione del dato iniziale, si vede bene che si potrà solo parlare, in pratica, di frequenze più o meno vicine alla risonanza. Cosí, ad esempio, $\omega_1/\omega_2 = \sqrt{1 + 10^{-6}}$ è irrazionale, ma non sarà facile distin-

In questo paragrafo si dà una stima delle frequenze non risonanti; al tempo stesso si ricavano alcune diseguaglianze utili per lo sviluppo della teoria delle perturbazioni. Precisamente, si discute un metodo per stimare dal basso un' espressione del tipo $|\langle k, \omega \rangle|$, con $k \in \mathbb{Z}^n$ e $\omega \in \mathbb{R}^n$; espressioni di questo tipo sono note in meccanica celeste come *piccoli denominatori*, e rappresentano uno dei problemi più spinosi della teoria delle perturbazioni.

C.1.1 Stima della misura delle risonanze

Consideriamo il vettore delle frequenze $\omega \in \mathbb{R}^n$, ed associamo ad esso il *modulo di risonanza* $\mathcal{M}_\omega \subset \mathbb{Z}^n$ definito come

$$\mathcal{M}_\omega = \left\{ k \in \mathbb{Z}^n \ : \ \langle k, \omega \rangle = 0 \right\} . \tag{C.1}$$

Il lettore verificherà facilmente che $\mathcal{M}_\omega$ è un sottogruppo discreto di $\mathbb{Z}^n$. In teoria delle perturbazioni si chiama *molteplicità della risonanza* la dimensione di $\mathcal{M}_\omega$.

Il problema che voglio discutere in questo paragrafo è quello della *misura relativa* delle frequenze non risonanti rispetto a quelle risonanti.

Supponiamo assegnato un modulo $\mathcal{M} \in \mathbb{Z}^n$ ed una funzione positiva $\psi(s)$ definita sugli interi positivi e consideriamo l'insieme delle frequenze $\omega \in \mathbb{R}^n$ che soddisfano la diseguaglianza

$$|\langle k, \omega \rangle| \geq \psi(|k|) \quad \text{per} \quad k \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathcal{M} ,$$

con $|k| = |k_1| + \ldots + |k_n|$. Dato poi un dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ limitato e di misura positiva, che possiamo anche assumere connesso, consideriamo l' insieme

$$\Omega = \{\omega \in \mathcal{D} \colon |\langle k, \omega \rangle| \geq \psi(|k|) \quad \text{per} \quad k \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathcal{M}\} .$$

Ci poniamo allora il seguente problema: è possibile scegliere la funzione $\psi(s)$ in modo che la misura di Ω sia grande in $\mathcal{D}$? Il procedimento che segue mostra che la risposta è affermativa.

Preso un qualunque $k \in \mathbb{Z}^n$, $k \neq 0$, consideriamo

$$\tilde{\Omega}_k = \{\omega \in \mathcal{D} \colon |\langle k, \omega \rangle| < \psi(|k|)\} ,$$

ossia l' insieme delle frequenze prossime alla risonanza con k. Questo insieme è evidentemente contenuto in quello dei punti la cui distanza dal piano ortogonale a k e passante per l' origine è inferiore a $\psi(|k|)/\|k\|$, dove $\|k\|$ è la norma euclidea di k. La relazione tra $|k|$ e $\|k\|$ è fornita dal seguente

Lemma C.1: *Sia* $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \left(\sum_j x_j^2\right)^{1/2}$ *la norma euclidea di* x, *e* $|x| = \sum_j |x_j|$. *Allora si ha*[2]

$$\|x\| \leq |x| \leq \sqrt{n}\|x\| .$$

guerlo, in pratica, da $\omega_1/\omega_2 = 1$; al contrario $\omega_1/\omega_2 = 1346269/2178309$ è razionale, ma è anche una buona approssimazione della cosiddetta “sezione aurea”, o “numero d' oro”, $(\sqrt{5} - 1)/2$, uno dei numeri più difficilmente approssimabili con razionali.

[2] La diseguaglianza è ottimale: si considerino i casi $x = (\alpha, 0, \ldots, 0)$ e $x = (\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$.

Dimostrazione. Per la diseguaglianza a sinistra basta calcolare

$$\|x\|^2 = \sum_j x_j^2 \le \Bigl(\sum_j |x_j|\Bigr)^2 \ .$$

Per la seconda si osserva che dati a, b positivi da $(a-b)^2 \ge 0$ segue subito $ab \le (a^2+b^2)/2$, e quindi si calcola

$$|x|^2 = \sum_{j,k} |x_j||x_k| \le \frac{1}{2}\sum_{j,k}(x_j^2 + x_k^2) = n\|x\|^2 \ .$$

Segue l' asserto. *Q.E.D.*

Facendo uso del lemma si trova subito

$$\mu(\tilde{\Omega}_k) \le 2\sqrt{n}C\frac{\psi(|k|)}{|k|} \ ,$$

dove $\mu\left(\tilde{\Omega}\cap\mathcal{D}\right)$ indica la misura di Lebesgue, e C è una costante che dipende solo dal dominio $\mathcal{D}$; una stima per eccesso è $C = [\mathrm{diam}(\mathcal{D})]^{n-1}$. Facendo variare k in $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ si ottiene che il complemento di Ω in $\mathcal{D}$ ha misura non superiore a

$$\mu\Bigl(\bigcup_{k\ne 0}\tilde{\Omega}_k\Bigr) \le \sum_{k\ne 0}\mu(\tilde{\Omega}_k) \le 2\sqrt{n}C\sum_{k\ne 0}\frac{\psi(|k|)}{|k|} \ .$$

Scriviamo ora

$$\sum_{k\ne 0}\frac{\psi(|k|)}{|k|} = \sum_{s>0}\sum_{|k|=s}\frac{\psi(s)}{s} \ .$$

Si vede che occorre valutare il numero di vettori $k \in \mathbb{Z}^n$ soddisfacenti $|k| = s$; una stima grossolana[3] mostra che questi non sono più di $2^n s^{n-1}$. Si ottiene dunque la stima

$$\mu\Bigl(\bigcup_{k\ne 0}\tilde{\Omega}_k\cap\mathcal{D}\Bigr) \le 2^{n+1}\sqrt{n}C\sum_{s>0}s^{n-2}\psi(s) \ .$$

Perché la somma sia finita basta scegliere $\psi(s) = \gamma s^{-\tau}$, con $\gamma > 0$ e $\tau > n-1$, e si conclude che la misura del complemento di Ω in $\mathcal{D}$ è proporzionale a γ, che può prendersi arbitrariamente piccolo (in questo caso dell' ordine di 2^{-n}).

Questo mostra che *l' insieme Ω delle frequenze non risonanti in $\mathcal{D}$ è non denso, ma di misura positiva tendente a $\mu(\mathcal{D})$ quando γ tende a 0.*

---

[3] Indichiamo con $J_{n,s}$ il numero dei vettori $k \in \mathbb{Z}^n$ per cui valga $|k| = s$. Vediamo subito che vale la formula ricorrente $J_{n,s} = J_{n-1,s} + 2J_{n-1,s-1} + \ldots + 2J_{n-1,0}$; infatti tutti i k con $|k| = s$ possono scriversi nella forma $k = (k_1, \tilde{k})$ con $\tilde{k} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ e con $|\tilde{k}| \le s$ e $k_1 = \pm(s - |\tilde{k}|)$. Per $n = 1$ vale $J_{1,0} = 1$ e $J_{1,s} = 2$ per $s > 0$, mentre per qualunque n vale $J_{n,0} = 1$. Per $n = 2$ si verifica rapidamente che $J_{n,s} \le 2^2 s$. Per $n > 2$ si procede in modo ricorsivo: assumendo che valga $J_{n-1,s} \le 2^{n-1}s^{n-2}$ si calcola facilmente $J_{n,s} \le 2^{n-1}s^{n-2} + 2[2^{n-1}(s-1)^{n-2} + \ldots + 2^{n-1} + 1] \le 2^{n-1}s^{n-2} + 2^n(s-1)^{n-1} + 1 \le 2^n s^{n-1}$, come asserito.

Il metodo di stima qui seguito può apparire a prima vista, grossolano. In realtà, non è molto lontano dall'essere un risultato ottimale: in teoria dei numeri si mostra che per $\tau < n - 1$ l'insieme Ω è vuoto, mentre per $\tau = n - 1$ non è vuoto, ma ha misura nulla. Di fatto, dunque, si può solo cercare una stima migliore della costante γ, che può scegliersi tipicamente dell'ordine di $1/n$.