LA STABILITÀ DEL SISTEMA SOLARE: TRE SECOLI DI MATEMATICA.

ANTONIO GIORGILLI
Università degli Studi di Milano, Dipartimento di Matematica, Via Saldini 50, 20133 — Milano, Italy.
Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere, Milano.

1. Ouverture

Non credo di esser molto lontano dalla verità se affermo che nell'immaginario collettivo il Sistema Solare è un orologio perfetto che scandisce il tempo con regolarità assoluta. In questa breve conversazione vorrei provare a sfatare questa convinzione. I moti planetari sono alquanto complessi, e la millenaria ricerca di una spiegazione in termini geometrici di ciò che osserviamo nel cielo è stata e continua ad essere una fonte inesauribile di nuovi problemi e nuove scoperte. Non ultima, quella che nell'ordine perfetto delle sfere celesti si insinua il tarlo del caos.

Mi concentrerò in particolare su tre punti.

(i) Una concezione vecchia di secoli: che i pianeti siano soggetti a moti periodici, proprio come gli ingranaggi di un orologio perfetto.
(ii) Un modello dinamico: la gravitazione di Newton eventualmente corretta con la relatività generale.
(iii) La scoperta del caos da parte di Poincaré.

Su queste basi cercherò di illustrare che significato si possa dare alla domanda: "il sistema solare è stabile?", e di individuare le possibili risposte. La domanda posta in modo così stringato è chiaramente incomprensibile, e riformularla chiedendosi se il sistema possa dissolversi non la chiarisce più di tanto: mi affido al resto di questa conversazione per spiegare cosa si intenda. Quanto alla risposta, non vorrei deludere nessuno, ma sarà: "non lo sappiamo".

Prima di proseguire vorrei anche delimitare un po' l'argomento: tutto quello che dirò si fonda sullo studio del modello gravitazionale elaborato da Newton, al più tenendo conto delle correzioni della Relatività di Einstein. Al giorno d'oggi molti ricercatori cercano di costruire modelli quantitativi della formazione del Sistema Solare a partire da un disco primordiale di materia, e ne ricavano conclusioni affascinanti sulla possibilità di un'evoluzione violenta che comprende caduta di materia sul Sole, espulsione di una miriade di piccoli corpi, migrazione delle orbite planetarie e periodi di bombardamento intenso di meteoriti sui pianeti e satelliti che sono sopravvissuti. Tali teorie trovano parziale riscontro in quello che osserviamo oggi. Ma non è di questo che parlerò in questa conversazione: del passato sappiamo ben poco, e la domanda che mi pongo è volta piuttosto a studiare quale sia la possibile evoluzione di un sistema planetario quale il nostro alla luce del miglior modello che abbiamo saputo elaborare.

2. Cicli, epicicli ed ellissi

La nostra conoscenza dei moti planetari ha radici molto profonde nel passato, ma se vogliamo parlare di modelli geometrici atti a descrivere i fenomeni celesti, almeno quelli che appaiono ai nostri occhi senza ricorrere ai telescopi, possiamo certamente assumere come punto di partenza l'astronomia greca. Mi riferisco in particolare al modello dell'universo ideato, pare, da Eudosso di Cnido (408–355 A.C.) e propagatosi alla cultura occidentale, con molte varianti, tramite Aristotele (384–322 A.C.), Ipparco di Nicea (190–120 A.C.) e Tolomeo (Claudius Ptolomæus, circa 100–175 D.C.) fino alla rivoluzione copernicana: la Terra è circondata da sfere concentriche sulle quali sono fissati Luna, Sole, pianeti e stelle. In prima approssimazione le sfere ruotano uniformemente, e sono ordinate secondo la loro velocità.

Gli astronomi greci erano però ben consci che il moto uniforme delle sfere non corrisponde ai fenomeni osservati: il diametro apparente del Sole e della Luna varia nel tempo; Mercurio e Venere non sono mai in opposizione al Sole, ma sono alternativamente in anticipo o in ritardo rispetto ad esso; i pianeti esterni talvolta sono in moto retrogrado; l'intervallo di tempo tra due equinozi successivi non è uniforme, perché l'estate è di qualche giorno più lunga dell'inverno (nel nostro emisfero). Essi cercarono di render conto di queste *ineguaglianze* (dal latino *inæqualitas*, inteso come mancanza di uniformità) introducendo degli artifici ingegnosi, tra cui spiccano l'*eccentrico*, gli *epicicli* e l'*equante*.

L'eccentrico è questione molto semplice: l'orbita del pianeta (o anche del Sole e della Luna) è circolare, ma la Terra non ne occupa il centro. L'*eccentricità* misura la distanza tra centro dell'orbita e posizione della Terra. In questo modo pur ammettendo che la rotazione sia uniforme si spiegano sia la diversa lunghezza delle stagioni, sia la variazione del diametro apparente del Sole e della Luna.

L'epiciclo è una rappresentazione più elaborata. Nel caso più semplice si considera un primo cerchio, detto *deferente*, ed un secondo, detto *epiciclo*, il cui centro si trova sul deferente; il pianeta si colloca sull'epiciclo. Sia il deferente che l'epiciclo ruotano a velocità uniforme, con frequenze che possono ben essere diverse. Al primo epiciclo se ne può eventualmente aggiungere un secondo, un terzo, &c.

L'equante, illustrato in figura 1, è l'espediente più ingegnoso dell'astronomia greca. Prendendo come base una circonferenza, si considerano tre punti: il centro O, la posizione T della Terra, spostata rispetto al centro, ed il punto E simmetrico di T rispetto al centro; questo terzo punto è l'equante. Il movimento di rivoluzione del pianeta è uniforme rispetto all'equante E, e non rispetto a T né a O.

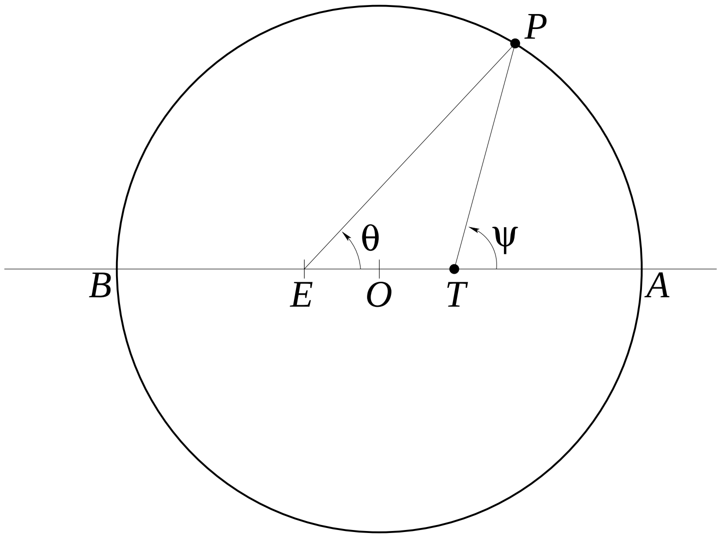

Figura 1. L'equante di Tolomeo. Il moto del pianeta P viene descritto assumendo che l'angolo ϑ visto dal punto equante E evolva in modo uniforme. Di conseguenza la velocità dell'angolo ψ risulta variabile, rallentando in corrispondenza dell'apogeo B ed accelerando in corrispondenza del perigeo A. Ciò corrisponde qualitativamente al moto osservato. La descrizione si trasporta tale e quale al sistema eliocentrico, con la sola avvertenza di sostituire la Terra col Sole.

Come si vede, il miglior modello prodotto dall'astronomia greca, tramandatoci da Tolomeo nel suo *Almagesto*, fa uso essenziale di due elementi: la circonferenza ed il moto periodico uniforme. *I moti planetari sono combinazioni di moti periodici descritti con la tecnica degli epicicli e degli equanti. Il compito dell'astronomo è determinare i periodi ed i centri delle circonferenze che costituiscono gli epicicli.*

L'introduzione del sistema eliocentrico viene attribuita solitamente a Copernico (Mikolaj Kopernik, 1473–1543). In realtà più che di una scoperta si dovrebbe parlare di una *riscoperta*: lo stesso Copernico nella lettera *Ad Sanctissimum Dominum Paulum III Ponteficem Maximum* che fa da prefazione al *De Revolutionibus Orbium Cœlestium* rivela di aver iniziato ad elaborare il suo sistema in seguito alla lettura di alcuni passi di Cicerone e di Plutarco che attribuiscono agli astronomi greci l'idea di un sistema eliocentrico. Sappiamo che Aristarco di Samo (circa 330–210 A.C.) già difendeva l'ipotesi eliocentrica, ma si tratta comunque di teorie di cui ben poco è rimasto negli scarsi testi che ci sono pervenuti. Copernico, partendo dai suggerimenti che ha trovato, ricostruisce *ex novo* tutto lo schema eliocentrico facendo uso dei metodi geometrici tradizionali: cerchi, epicicli e moti periodici restano i suoi strumenti di lavoro.

Mi piace anche ricordare il sistema di Ticone (Tycho Brahe, 1546–1601). L'idea è alquanto semplice: scambiare i deferenti dei pianeti esterni con i loro epicicli. Ciò equivale ad affermare che la Luna ed il Sole girano attorno alla Terra, e tutti i pianeti girano attorno al Sole; il cerchio del Sole fa da deferente comune agli epicicli dei pianeti. È il sistema che

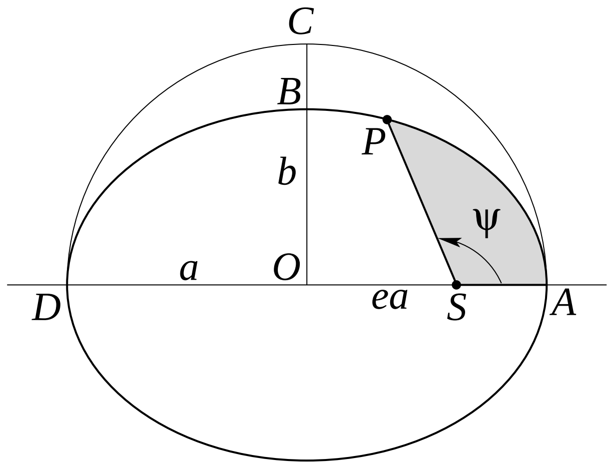

Figura 2. L'ellisse di Keplero. I semiassi maggiore e minore hanno rispettivamente lunghezza a e b. Il centro dell'ellisse è in O ed il Sole si trova nel fuoco S che dista ea dal centro. Il segmento BC dà l'ampiezza della lunula. I punti A e D sono rispettivamente il perielio e l'afelio. L'angolo ψ, detto dagli astronomi *anomalia vera*, identifica la posizione del pianeta sull'ellisse. L'area in grigio è quella a cui fa riferimento la seconda legge di Keplero, o *legge delle aree*.

rappresenta in modo perfetto ciò che noi osserviamo dalla Terra!

Da qui prende avvio il lavoro di Keplero (Johannes Kepler, 1571–1630). Chiamato a Praga da Ticone nel 1600 con il compito ben definito di collaborare alla stesura delle *Tabulæ Rudolphinæ* egli si scontra con la difficoltà di descrivere l'orbita di Marte: la precisione delle osservazioni del suo maestro Ticone mette in evidenza l'inadeguatezza del metodo degli epicicli e degli equanti. Nell'*Astronomia Nova* Keplero espone tutto lo sviluppo dei suoi numerosi tentativi di aver ragione dell'orbita di Marte con uno stile che rivela il profondo coinvolgimento dell'autore nella sua opera: nulla a che vedere con il tono asettico dei testi attuali di matematica. Si direbbe quasi che l'opera è un lunghissimo preludio che ad un certo punto evolve in una sorta di crescendo rossiniano, e finalmente erompe nel capitolo LVI in un *"quasi e somno expergefactus, & novam lucem intuitus"* (come se mi risvegliassi dal sonno e vedessi una nuova luce) che annuncia la scoperta della forma ellittica delle orbite.

Un rapido confronto col passato si impone. Keplero conserva l'eccentricità delle orbite, ma questa volta non si tratta della distanza dal centro misurata sperimentalmente, bensì della nozione geometricamente ben definita dell'eccentricità dell'ellisse: la distanza del fuoco (il Sole) dal centro divisa per il semiasse maggiore (si veda la fig. 2). L'equante invece viene sostituito dalla seconda legge: l'area spazzata dal raggio che congiunge il sole col pianeta è proporzionale ai tempi. Cioè: *esiste una quantità che evolve in modo uniforme, ma è un'area, e non un angolo.*

Vorrei soffermarmi un momento a mostrare quanto il passaggio dal cerchio all'ellisse sia irto di difficoltà, aiutandomi con la fig. 2. La differenza che tutti percepiamo immediatamente tra cerchio ed ellisse sta nello schiacciamento di quest'ultima, misurato dal segmento CB che Keplero chiamava ampiezza della *lunula*. Ora, se l'eccentricità e dell'ellisse è abbastanza piccola l'ampiezza della lunula è circa $e^2/2$. Nel caso di Marte abbiamo $e \simeq 0.093$, e dunque $e^2/2 \simeq 0.0043$. In altre parole, se provassimo a tracciare l'orbita di Marte come un'ellisse con semiasse maggiore di 1 metro l'ampiezza della lunula sarebbe di circa 4 millimetri, mentre il Sole sarebbe spostato di 9 centimetri rispetto al centro: lo spostamento del Sole sarebbe evidente a tutti, ma chi vedrebbe ad occhio lo schiacciamento? Quanto alla legge delle aree, un confronto con la teoria tolemaica dell'equante ci mostra che la differenza massima è dell'ordine di $e^2/4$; ad esempio nel caso di Marte si avrebbero al più deviazioni di circa 0.002 radianti, ovvero circa $7'$, nelle misure in longitudine. Una tal differenza è difficilmente rilevabile mediante osservazioni puramente visuali (per confronto, si pensi che il diametro apparente della Luna oscilla intorno ai $30'$ e che la capacità di risoluzione dell'occhio umano è di circa $1'$). La precisione degli strumenti ideati da Ticone, che riducevano l'errore a pochi primi, ha avuto un ruolo cruciale nelle scoperte di Keplero.

La teoria di Keplero appare come il ripristino di un ordine perfetto nell'universo; l'armamentario costituito da eccentrici, epicicli ed equanti viene spazzato via per lasciar posto alla geometria elegante delle ellissi. Il quadro viene completato dalla terza legge, secondo la quale i quadrati dei periodi sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle orbite; con essa Keplero sembra aver compiuto l'ultimo passo nella ricerca di quell'ordine universale che egli ha inseguito per tutta la vita.

3. I moti secolari

Nel 1627 vengono finalmente pubblicate le *Tabulæ Rudolphinæ*, opera iniziata nel 1564 da Ticone e proseguita da Keplero stesso dopo la morte del suo maestro. Nella prefazione Keplero scrive:[♮]

> “ *Et de certitudine quidem calculi testabuntur observationes præsentium temporum, imprimis Braheanæ; de futuris vero temporibus plura præsumere non possumus, quam vel observationes veterum, quibus usus sum, vel ipsa motuum mediorum conditio, nondum penitus explorata, concursusque causarum physi-*

[♮] “E dell'esattezza del calcolo daranno testimonianza le osservazioni del tempo presente, in particolar modo quelle di Brahe; per il futuro invece non possiamo fare troppe previsioni. Le osservazioni del passato, con le quali sono familiare, lo stesso comportamento dei moti medi, il cui studio è ancora incompleto, ed il concorso di cause fisiche possono influenzare il calcolo. Infatti le osservazioni di Regiomontano e Walther mettono chiaramente in evidenza quanto sia necessario introdurre dei movimenti secolari: lo mostrerò a suo tempo in un apposito libretto. Quante e quali siano poi quelle equazioni, l'umanità non potrà certo saperlo se non dopo molti secoli di osservazioni.”

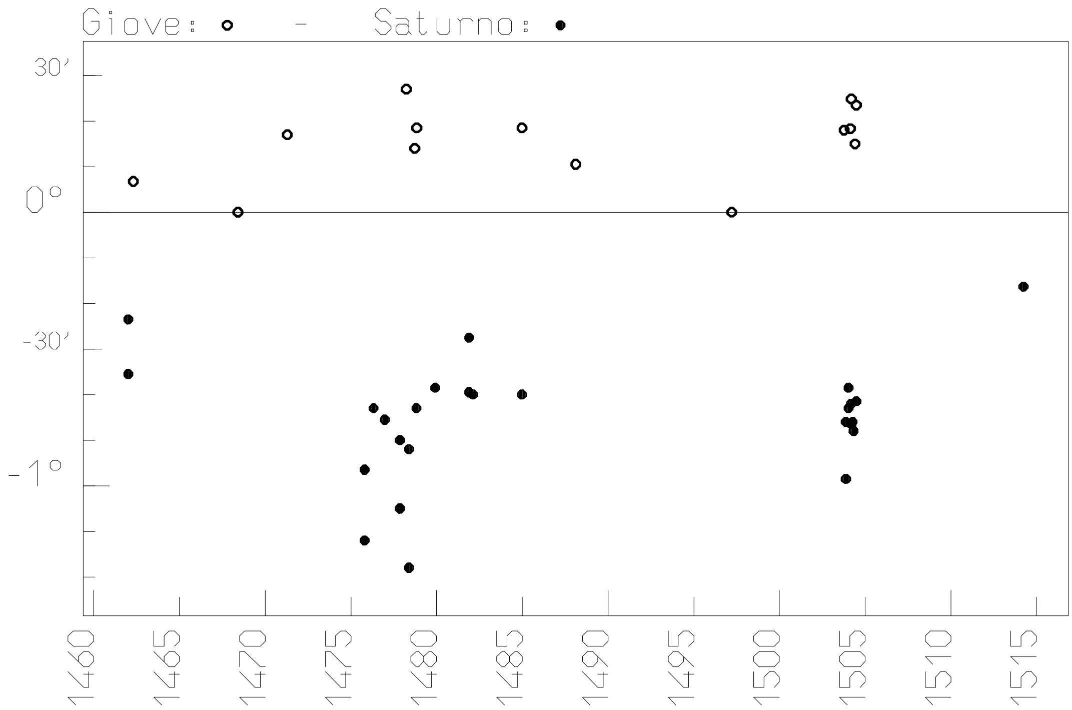

Figura 3. Differenza tra le longitudini di Giove e Saturno calcolate da Keplero e quelle dedotte dalle osservazioni di Regiomontano e Walther. Si vedono deviazioni sistematiche, non attribuibili ad errori di osservazione.

carum præstare possunt, cum observationes Regiomontani et Waltheri testentur, omnino de æquationibus secularibus esse cogitandum, ut singulari libello reddam demonstratum suo tempore; quæ tamen æquationes quales et quantæ sint, ante plurimum sæculorum decursum observationesque eorum, a gente humana definiri nequaquam possunt. ”

Il libretto promesso da Keplero non fu pubblicato, ma tra i suoi manoscritti ne venne ritrovata una versione preliminare che i curatori delle opere hanno incluso nel vol. VI. In esse Keplero si prefigge di confrontare una serie di osservazioni dei pianeti risalenti ad epoche precedenti con il suo calcolo delle orbite. La maggior parte delle osservazioni è dovuta a Regiomontano (Johannes Müller der Könisberg, 1436–1476), e Bernard Walther (1430–1504). Pochissime altre sono riportate da Tolomeo, che oltre ad osservazioni sue ne riferisce alcune risalenti ai Caldei.

Il grafico della fig. 3 riporta i risultati relativi alla longitudine di Giove e Saturno. Vi sono rappresentate le differenze tra la posizione osservata e quella calcolata. Si osserva una deviazione sistematica: Giove risulta sempre in anticipo, Saturno sempre in ritardo, come se il moto di Giove stesse accelerando e quello di Saturno rallentando. La dispersione sensibile dei dati non deve meravigliare: le indicazioni di Regiomontano e Walther sono molto qualitative, conformemente all'uso del tempo, e del resto le loro osservazioni erano prevalentemente visuali. Ad esempio, in un caso si legge:[♭]

> " *Anno 1476, 25 Mart. h. 2 noctis vidi ♄ prope primam Cancri, videlicet implicitatem nebulosam, trahendo lineam a quarta Cancri in quintam eiusdem, non comprehendebam ♄ in eadem linea, sed fuerat in modico occidentalis ab hac linea, ut videbam, ad latitudinem duorum digitorum transversalium; discordat cum tabulis. Item ♄ fuerat in eodem arcu cum quarta et prima Cancri, fueratque medius earum, tantum distans ab una quantum ab alia, sicut visu deprehendi.* "

Keplero ricostruisce la linea grazie alle coordinate delle stelle, e valuta la distanza di due dita in $5'$ o $6'$.

Nella stessa nota Keplero riporta anche una serie di osservazioni di Marte, Venere e Mercurio, e almeno per il caso di Marte propende per l'esistenza di deviazioni sistematiche, benché riportando i dati in grafico come ho fatto per Giove e Saturno non se ne vedano. Per spiegare le deviazioni osservate Keplero tenta diverse vie, e la sua conclusione è che si debbano ammettere della variazioni lente dei cosiddetti *elementi orbitali*[♯], visibili solo sull'arco di secoli e perciò da lui battezzate *secolari*. Ma qui cominciano le difficoltà. Dalla lettura delle note traspare il tentativo di Keplero di reintrodurre gli epicicli che le sue ellissi sembravano aver eliminato. In altre parole, egli cerca una variazione *periodica* degli elementi, ed in particolare del cosiddetto *moto medio*, la velocità media del moto di rivoluzione. Ma la scarsità di dati non gli permette di condurre il calcolo a buon fine, ed egli si rassegna alla conclusione che occorreranno secoli di osservazioni sistematiche per determinare quelle variazioni; forse, mi piace pensare, con molto rammarico per quei 12 secoli di osservazioni mancate che intercorrono tra Tolomeo e Regiomontano. Qui pesa in modo determinante la visione classica: i moti sono periodici, ed i periodi devono essere dedotti dalle osservazioni.

[♭] "Il 25 marzo 1476, alle ore 2 di notte, vidi Saturno in prossimità della prima del Cancro, ovvero della nebulosa. Tracciando una retta dalla quarta alla quinta stella del Cancro non trovavo Saturno sulla stessa linea, ma spostato di poco verso occidente, a quanto vedevo, ad una latitudine di due dita trasversali; ciò è in discordanza con le tavole. Inoltre Saturno si trovava sullo stesso arco con la quarta e la prima del Cancro, e stava in mezzo ad esse, alla stessa distanza sia dall'una che dall'altra, per quanto potevo valutare ad occhio".

[♯] Gli elementi orbitali sono l'inclinazione, ovvero l'angolo tra il piano dell'orbita del pianeta e quello dell'eclittica, l'eccentricità ed il semiasse maggiore, ai quali sono associate rispettivamente la longitudine del nodo, che identifica la retta formata dall'intersezione del piano dell'orbita con quello dell'eclittica, la longitudine del perielio, che identifica la direzione del perielio dell'orbita, e l'area che evolve uniformemente, coerentemente con la seconda legge. Nella descrizione kepleriana i primi cinque elementi restano costanti, dal momento che le orbite sono fissate, mentre la sesta evolve con un moto medio, ovvero la velocità angolare media di rivoluzione, legato al semiasse maggiore dalla terza legge di Keplero. Le *variazioni secolari* descrivono i moti lenti di queste quantità.

Ma il quadro elegante delle orbite ellittiche è ormai irrimediabilmente incrinato.

Nel 1719 Edmond Halley (1656–1742) pubblica delle nuove tavole astronomiche. In esse egli risolve il problema dei termini secolari in modo alquanto pragmatico, assumendo un'accelerazione uniforme per la longitudine e di conseguenza una variazione uniforme nel tempo del moto medio. Egli ne calcola la variazione semplicemente interpolando i dati della sua epoca con quelli riportati da Tolomeo. Una tal soluzione ha un difetto evidente: se cambia il moto medio, dovrebbe anche cambiare il semiasse maggiore dell'orbita in modo che venga rispettata la terza legge di Keplero. Se ne dovrebbe dedurre che Giove si sta avvicinando al Sole e Saturno se ne allontana. Ma applicando la stessa regola al passato si concluderebbe che circa 2 milioni di anni fa Giove e Saturno si trovavano sulla stessa orbita. Probabilmente ai tempi di Halley una tale eventualità non faceva scalpore: le ipotesi che assegnano al sistema solare una vita di gran lunga superiore al milione di anni non erano ancora state formulate. Resta la rottura dello schema della periodicità del movimento: gli epicicli vengono estromessi definitivamente, o almeno così pare. Praticamente, dopo Halley l'aggettivo "secolare" viene interpretato come "non periodico".

Nel 1686 Isaac Newton (1643–1727) pubblica la sua opera *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* in cui enuncia la teoria della gravitazione. Quanto quel testo abbia pesato nello sviluppo delle nostre conoscenze scientifiche è fatto ben noto, e non c'è bisogno di sottolinearlo in questa breve conversazione. Vorrei però mettere in evidenza due aspetti. Il primo è il cambiamento radicale di prospettiva rispetto a tutti i predecessori: prima di Newton la rappresentazione dei moti planetari si fonda sulle osservazioni, e la geometria serve per costruire modelli che rispecchino in modo sempre più fedele i dati osservati; dopo Newton i moti dei pianeti, e quindi anche gli eventuali periodi, si possono calcolare partendo dalla legge di gravitazione ed applicando tutte le tecniche matematiche note o da sviluppare ex novo. Riprenderò tra poco questo punto parlando di Lagrange. Il secondo aspetto tocca proprio il problema della *stabilità del sistema solare*, a cui vorrei dedicare subito una breve riflessione per chiarirne il significato.

Una volta accettata la gravità, pur senza porsi troppe domande su quale sia la sua origine (*hypotheses non fingo*, affermava Newton senza esitazioni), ed accettando l'approssimazione in cui ciascun corpo celeste viene attratto dal Sole con forza proporzionale alla sua massa ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza ma non si tiene conto dell'attrazione mutua tra diversi corpi, non solo si giustificano pienamente le leggi di Keplero enunciate per i pianeti noti, ma si stabilisce quale debba essere il moto di un qualunque corpo nello spazio: l'orbita è una sezione conica, il che comprende non solo le ellissi ma anche le parabole e le iperboli. Ma già se si considerano tre corpi che interagiscono tra loro con una forza gravitazionale ci si trova ad affrontare un problema matematico a tutt'oggi non risolto, ed in qualche senso non risolvibile. Il fatto è che la gravitazione non lascia scampo: due masse nello spazio si attraggono reciprocamente, e dunque ciascun pianeta è soggetto, altre che all'azione preponderante del Sole, anche a quella di tutti gli altri pianeti. Ne segue che le orbite non possono essere rigorosamente ellittiche: le inclinazioni, le eccentricità ed i semiassi maggiori possono cambiare lentamente (i moti secolari intravisti da Keplero!). Newton ne è ben cosciente, e nel trattato *Opticks*, dopo aver richiamato i principi della gravitazione, così si esprime:[♯]

> “ *Now by the help of these Principles, all material Things seem to have been composed of the hard and solid Particles above–mention'd, variously associated in the first Creation by the Counsel of an intelligent Agent. For it became him who created them to set them in order. And if he did so, it's unphilosophical to seek for any other Origin of the World, or to pretend that it might arise out of a Chaos by the mere Laws of Nature; though being once form'd, it may continue by those Laws for many Ages. For while Comets move in very excentrick Orbs in all manner of Positions, blind Fate could never make all the Planets move one and the same way in Orbs concentrick, some inconsiderable Irregularities excepted, which may have risen from the mutual Actions of Comets and Planets upon one another, and which will be apt to increase, till this System wants a Reformation.* ”

Le conseguenze di un aumento incontrollato delle irregolarità intravisto da Newton potrebbero essere catastrofiche. Ad esempio, una variazione sistematica dei semiassi maggiori potrebbe portare le orbite ad incrociarsi, con la possibilità di una collisione, oppure far cadere un pianeta sul Sole, o ancora espellerlo dal sistema solare. L'eccentricità è anch'essa critica: orbite molto eccentriche implicano variazioni molto ampie delle distanze reciproche tra i pianeti e quindi, ancora una volta, la possibilità che due di essi entrino in collisione tra loro o cadano sul Sole. Anche escludendo un evento così catastrofico, supponiamo per un momento che l'eccentricità dell'orbita terrestre possa crescere in modo sensibile rispetto al valore attuale. È facile immaginare che la variazione notevole della distanza dal Sole portebbe a sconvolgimenti climatici incompatibili con la vita. Newton non era in grado di escludere queste possibilità, anzi si sentiva costretto ad ammettere che le piccole azioni reciproche dei pianeti potessero, alla lunga, distruggere il sistema solare. Di conseguenza invocava l'intervento divino per riportare i pianeti, di tanto in tanto, sulle loro orbite.

[♯] “Ora alla luce di questi principi tutte le cose materiali appaiono come composte delle particelle dure e solide che ho appena menzionato, variamente associate tra loro all'atto della Creazione secondo la volontà di un Essere intelligente. Perché Egli che le ha create le ha poi sistemate in modo ordinato. E se così Egli ha fatto, è contrario alla filosofia indagare su una diversa Origine del Mondo, o pretendere che esso possa essere uscito dal Caos grazie alle sole Leggi della Natura; e questo benché, una volta formato, esso possa continuare per molte epoche seguendo quelle leggi. Infatti, mentre le Comete si muovono su orbite eccentriche posizionate in tutti i modi possibili, un Fato cieco non avrebbe mai potuto far sì che tutti i pianeti si muovessero in un solo modo, per tutti eguale, su orbite concentriche, fatta eccezione per poche trascurabili irregolarità che possono trovare spiegazione nella mutua azione di comete e pianeti uno sull'altro e che in futuro potranno aumentare fino a rendere necessaria una riorganizzazione del Sistema.”

4. Il ritorno degli epicicli e le risonanze

Torniamo ora al problema dei termini secolari. Nel corso del secolo XVIII l'accumularsi di dati che confermano le ineguaglianze sistematiche nei moti di Giove e Saturno fa nascere e rafforza progressivamente una domanda tutto sommato spontanea: la teoria della gravitazione è in grado di spiegare queste ineguaglianze? Nel cercare una risposta a questa domanda si esplorano a fondo le conseguenze della legge di gravità e si dispiega tutta la potenza del calcolo differenziale inventato da Newton e, indipendentemente, da Gottfried Leibniz (1646–1716).

Nel 1752 l'Académie de France mette in palio un premio per chi riesca nell'impresa di spiegare le ineguaglianze secolari mediante la gravitazione. Eulero (Leonhard Euler, 1707–1783) presenta una memoria in cui, sviluppando uno schema ingegnoso di approssimazioni, riesce a calcolare delle variazioni secolari sistematiche dei moti medi, come nelle tavole di Halley; il premio gli viene assegnato. Ma il suo risultato dà un segno sbagliato: ambedue i pianeti accelerano nella stessa direzione.[♮] L'errore viene parzialmente corretto da Giuseppe Luigi Lagrange (1736–1813) nel 1762: migliorando le approssimazioni anch'egli trova dei termini secolari, ma questa volta col segno e l'ordine di grandezza corrispondente a quelli calcolati empiricamente da Halley. È Pierre Simon de Laplace (1749–1827) ad accorgersi, nel 1773, che migliorando ulteriormente l'approssimazione del calcolo i termini calcolati da Lagrange si elidono, annullando i moti secolari di Halley. Questo fatto riapre la questione che Lagrange sembrava aver risolto: se la gravità non spiega le variazioni secolari dei semiassi maggiori di Giove e Saturno cosa le può giustificare?

Dopo quei lavori assistiamo ad una sorta di corsa a due tra Lagrange e Laplace: Lagrange in qualche modo può considerarsi il maestro, ed è più profondo; Laplace, che almeno all'inizio sembra far la parte del giovane allievo, è brillante e rapido nell'impadronirsi delle tecniche del calcolo e nell'estenderle. In una ventina d'anni essi pubblicano una serie impressionante di memorie, creando l'ossatura della teoria delle perturbazioni secolari; un metodo che ancor oggi viene sistematicamente usato e continua a produrre nuovi risultati.[♭] Vorrei richiamare alcuni eventi salienti.

[♮] Si potrebbe ironizzare su questo premio assegnato per un risultato sbagliato, ma è appena il caso di notare che Eulero per la prima volta era riuscito a sviluppare uno schema di calcolo che costituiva il germe della *teoria delle perturbazioni secolari*. Il metodo consiste nel calcolare il movimento mediante una successione di approssimazioni successive; un procedimento analogo a quello che anche noi utilizziamo quando eseguiamo la divisione tra due numeri calcolando una cifra dopo l'altra, ma nel caso dei moti planetari le operazioni sono incomparabilmente più complesse.

[♭] Nel frattempo Lagrange elabora la sua formulazione della Meccanica, pubblicata nel 1788 con la prima edizione della *Méchanique Analitique*, titolo modificato ortograficamente in *Mécanique Analytique* nelle versioni successive. Si tratta del *formalismo lagrangiano* che ancor oggi costituisce la base dei corsi di Meccanica nelle nostre Università, ed è stato esteso, ad esempio, alla Relatività ed alla Teoria dei Campi.

Ne 1764 Lagrange sviluppa il calcolo dei movimenti secolari delle inclinazioni e dei nodi delle orbite planetarie. Laplace ne riceve il manoscritto e sei mesi dopo estende il calcolo alle eccentricità ed ai perieli. Curiosamente, la memoria di Laplace viene pubblicata molto rapidamente nei rendiconti dell'Académie des Sciences, mentre quella di Lagrange vede la luce solo quattro anni dopo. Le due memorie mettono in evidenza le precessioni dei nodi e dei perieli, oltre a variazioni *periodiche* delle inclinazioni e delle eccentricità, in accordo con le osservazioni.

Nel 1776 Lagrange conferma in modo rigoroso l'invarianza dei semiassi maggiori delle orbite nell'approssimazione del primo ordine nelle masse, mostrando che non vi sono variazioni secolari nel senso di Halley ma solo variazioni periodiche, e nel 1782 calcola le variazioni massime di eccentricità ed inclinazioni previste dalla sua teoria. Perviene così alla prima "dimostrazione" della stabilità del sistema solare. Le virgolette stanno ad indicare che il risultato non è rigoroso nel senso matematico del termine: tiene conto solo del primo passo di approssimazione delle soluzioni, ma non sa dire nulla sulle approssimazioni successive.

Nel 1785 Laplace riesce finalmente a sciogliere l'enigma dell'ineguaglianza di Giove e Saturno. La chiave di lettura è nella parola *risonanza*, su cui mi dilungherò un poco più avanti. Osservando che i periodi di Giove e Saturno sono approssimativamente in rapporto 2:5 egli identifica negli sviluppi del calcolo i termini che contengono questa risonanza e ne calcola l'effetto. Scopre così che essi danno origine ad una variazione *periodica* dei semiassi maggiori con periodo di circa 920 anni. La lunghezza del periodo, confrontata col breve arco di tempo effettivamente coperto dalle osservazioni, ha fatto sì che tale variazione venisse interpretata come secolare nel senso di Halley.[♯] Finalmente anche questo ostacolo viene rimosso, e si conferma la fiducia piena nel fatto che la gravitazione di Newton possa spiegare tutti i fenomeni che si osservano.

I metodi introdotti da Lagrange e Laplace possono ben chiamarsi un ritorno agli epicicli, sia pure sotto la forma analitica che noi usiamo ancor oggi ed alla quale diamo il nome di *sviluppi in serie di Fourier*. Inoltre dopo di loro comincia a farsi strada l'idea che i fenomeni di risonanza abbiano un ruolo determinante nella dinamica planetaria.

Nel secolo XIX assistiamo ad uno sviluppo che può ben definirsi tumultuoso: i più famosi matematici dedicano parte del loro lavoro al problema planetario. Ma entrare in dettaglio su questi temi è questione che richiederebbe ore ed ore. Mi limiterò quindi ad illustrare un fenomeno che nuovamente richiama l'attenzione sulle risonanze.

La notte di capodanno del 1801 Giuseppe Piazzi (1746-1826) scopre un nuovo pianeta, da lui denominato Cerere. È solo il primo di una lunga serie: negli anni successivi le esplorazioni sistematiche nella regione vicina all'eclittica portano alla scoperta di altri pianetini localizzati nella fascia tra Giove e Marte: gli asteroidi. Nel 1866 l'astronomo americano Daniel Kirkwood (1814–1895) fa un'osservazione sorprendente: la distribuzione degli asteroidi non è uniforme, ma presenta dei vuoti, poi denominati *lacune di Kirkwood*,

[♯] Non riesco a trattenere una domanda: cosa avrebbe scoperto Keplero se avesse avuto a disposizione osservazioni sistematiche distribuite nei secoli tra Tolomeo e Regiomontano?

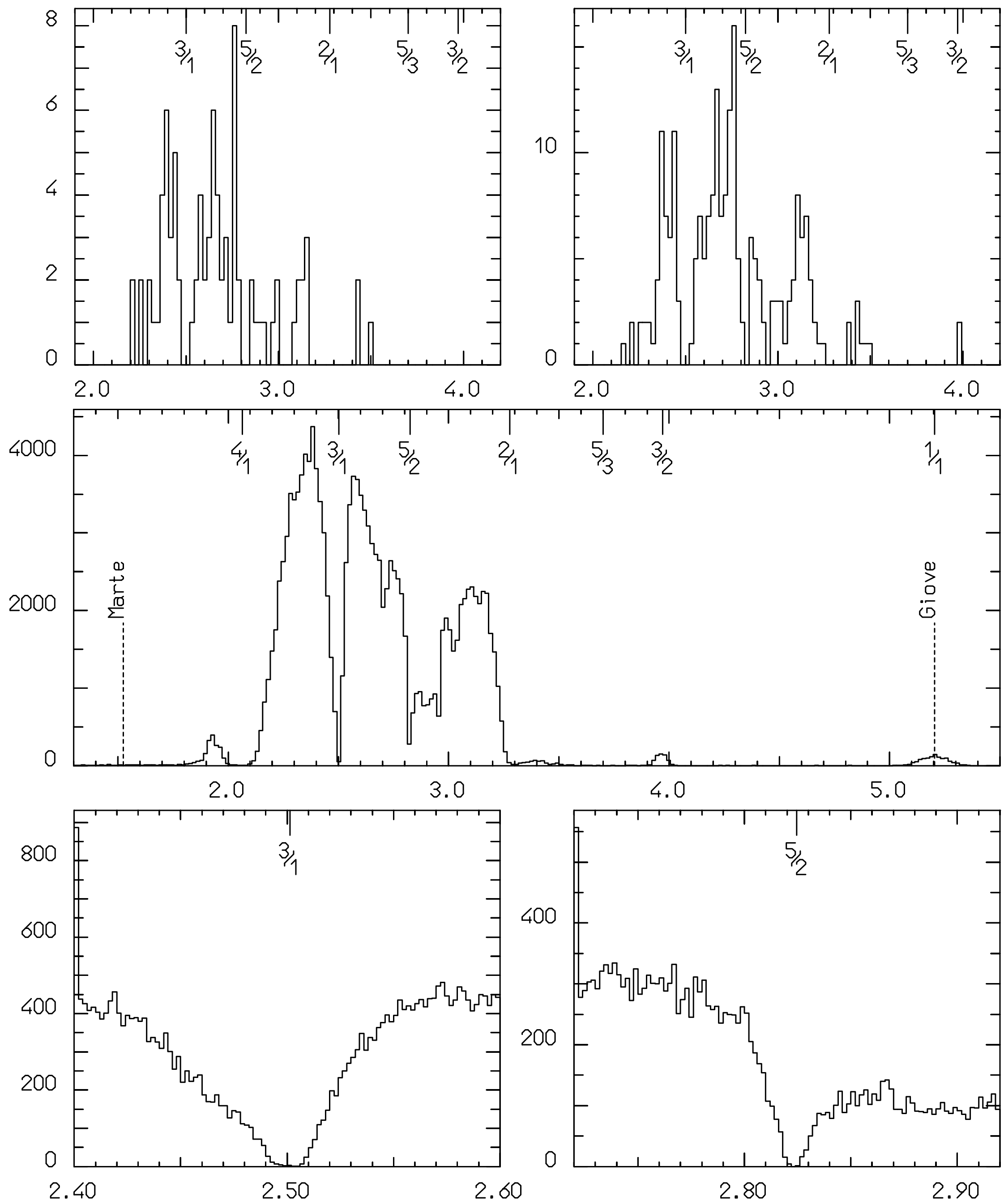

Figura 4. In alto: a sinistra la distribuzione degli asteroidi scoperti fino al 1866, anno della prima pubblicazione di Kirkwood; a destra quelli scoperti fino al 1884, anno della seconda pubblicazione di Kirkwood citata nel testo. Al centro: distribuzione degli asteroidi scoperti fino al dicembre 2006 (oltre 145 000). In basso: ingrandimento della regione intorno alle risonanze 3/1 (a sinistra) e 5/2 (a destra). In ascissa il semiasse maggiore dell'orbita, in unità astronomiche; in ordinata il numero di asteroidi in ciascun intervallo. I dati sono tratti dal catalogo del Minor Planet Center al 13 dicembre 2006.

in corrispondenza alle risonanze con Giove. La frase è un po' sibillina, e richiede qualche spiegazione. La prima delle figure 4, in altro a sinistra, è un istogramma che mostra la distribuzione degli 87 asteroidi noti nel 1866 come funzione del semiasse maggiore. In corrispondenza a certi valori la distribuzione presenta dei vuoti. Ricordando che, per la terza legge di Keplero, ad ogni valore a del semiasse maggiore corrisponde un periodo T ben definito si può osservare che i vuoti corrispondono ai valori del semiasse maggiore per cui il rapporto tra il periodo di Giove e quello dell'asteroide è una frazione con numeratore e denominatore bassi. In figura sono riportati alcuni casi; ad esempio, nel caso 3/1 l'asteroide compie tre rivoluzioni mentre Giove ne compie una. Nel 1884 Kirkwood torna sull'argomento prendendo in esame anche i 120 asteroidi scoperti nel frattempo e confermando i suoi risultati precedenti (si veda la seconda delle figure 4). La sua conclusione è che responsabile dei vuoti sia la risonanza tra il periodo di Giove e quello dell'asteroide. In altre parole, egli afferma che *la risonanza ha un effetto destabilizzante*.

A conferma dell'esistenza delle lacune di Kirkwood si può osservare il grafico centrale della figura 4, che riporta l'istogramma tracciato coi dati disponibili alla fine del 2006, più di 145 000 asteroidi. Si osserva subito che le lacune ci sono davvero, anche nei casi delle risonanze 3/1 e 5/2 per i quali ho riportato un ingrandimento negli ultimi due grafici. Si nota però che in corrispondenza alle risonanze 3/2 (il gruppo di Hilda) e 1/1 (i Troiani) si verifica il fenomeno opposto: la distribuzione presenta un picco. Come a dire che *la risonanza non ha necessariamente un effetto destabilizzante*. Ma questi asteroidi non erano noti a Kirkwood (salvo forse un paio nella risonanza 3/2, troppo pochi per prestarci davvero attenzione). In particolare gli asteroidi in risonanza 1/1, detti Troiani perché i primi scopritori hanno assegnato loro i nomi degli eroi dell'Iliade, sono stati scoperti solo dopo il 1901.

La scoperta di Kirkwood sembra in qualche modo confermare l'ipotesi che le risonanze possano, alla lunga, distruggere il Sistema Solare. È un'idea che sta prendendo piede tra alcuni dei matematici che si occupano del calcolo di orbite, ben consci che le risonanze possono indurre delle ineguaglianze sensibili nei movimenti: il caso di Giove e Saturno è un esempio lampante. Dall'altra parte si schierano i sostenitori della tesi che i moti planetari si possano comunque descrivere con dei periodi, il che in buona sostanza significa con degli epicicli: anche qui la soluzione brillante del problema dell'ineguaglianza di Giove e Saturno è un ottimo punto d'appoggio. Insomma si delinea una sorta di conflitto tra chi continua a coltivare l'idea che il sistema solare si comporti come un orologio perfetto, anche se complesso, e chi invece vede proiettarsi sulle orbite dei pianeti l'ombra inquietante dell'instabilità. Possiamo trovare un'eco delle discussioni in corso tra gli astronomi in un commento di Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897):[♮]

♮ "Vediamo dunque come la stabilità non possa dipendere dal fatto che certe quantità siano razionali o irrazionali. Biot ha commesso proprio questo errore, che poi si è propagato in grandiose conferenze sull'organizzazione del mondo. Egli ha detto che un piccolo cambiamento della distanza tra Saturno e Giove potrebbe far sì che il più strano dei pianeti abbandoni il sistema solare. Però ci si è dimenticati di aggiungere che anche Giove potrebbe

“ *Thus we see that the stability cannot depend on rationality or irrationality of certain quantities. Precisely this error has been committed by Biot. Ever since this mistake has been made it is spread in big lectures over the organization of the world. He said, a slight change in the distance between Saturn and Jupiter would be sufficient that the strangest of all planets in our system would escape our system forever. However, one forgot to mention that also Jupiter could escape, and this would indeed simplify the work of astronomers considerably, since this is precisely the planet causing the largest perturbation.* ”

La tesi sostenuta da Weierstrass è che le difficoltà insite nei metodi di calcolo mettano in evidenza solo la necessità di metodi più sofisticati. Ed in effetti verso il 1870 tali metodi cominciano a vedere la luce, soprattutto ad opera di Hugo Gyldén (1841–1896), And Lindstedt (1854–1939) e dello stesso Weierstrass.

La svolta arriva verso la fine del secolo XIX. Nel 1885 viene bandito un premio per festeggiare il 60^{mo} compleanno di Oscar II, Re di Svezia e Norvegia, in congruo anticipo sulla data della ricorrenza, il 21 gennaio 1889. L'organizzazione del premio viene curata in particolare da Gösta Mittag Leffler (1846–1927), fondatore della rivista *Acta Mathematica*, che invita a far parte della commissione Weierstrass e Charles Hermite (1822–1901). Tra i problemi proposti nel bando si ritrova il seguente, nella versione inglese pubblicata su *Nature*.[♭]

“ *A system being given of a number whatever of particles attracting one another mutually according to Newton's law, it is proposed, on the assumption that there never takes place an impact of two particles to expand the coordinates of each particle in a series proceeding according to some known function of time and converging uniformly for any space of time.*

---

andarsene, il che semplificherebbe notevolmente il lavoro degli astronomi, visto che proprio quello è il pianeta che induce le perturbazioni più consistenti.”

[♭] “Si consideri un sistema formato da un numero arbitrario di particelle che si attraggono reciprocamente secondo la legge di Newton, assumendo che non si verifichi mai una collisione tra due di esse. Si propone di calcolare le coordinate delle particelle sotto forma di sviluppo in serie di funzioni note del tempo, convergenti uniformemente per qualunque intervallo temporale.
Sembra che questo problema, la cui soluzione amplierebbe notevolmente le nostre conoscenze sul sistema dell'Universo, possa risolversi facendo uso delle tecniche analitiche attualmente disponibili. Questo si può ragionevolmente supporre, perché Lejeune–Dirichlet, poco prima dalla sua morte, ha rivelato ad un suo amico matematico di aver scoperto un procedimento per risolvere i problemi della Meccanica, aggiungendo di essere riuscito, grazie al suo metodo, a dimostrare in modo rigoroso la stabilità del sistema planetario. Purtroppo non sappiamo nulla di quel metodo, tranne il fatto che il punto di partenza sta probabilmente nella teoria delle oscillazioni infinitamente piccole. Si può però supporre, senza discostarsi troppo dal vero, che quel metodo non richiedesse calcoli lunghi e complessi, ma solo lo sviluppo di un'idea fondamentale ma semplice, che si può ragionevolmente sperare di riscoprire dedicandosi con assiduità e perseveranza allo studio.”

It seems that this problem, the solution of which will considerably enlarge our knowledge regarding the system of the Universe, might be solved by means of the analytical resources at our present disposition; this may at least be fairly supposed, because shortly before his death Lejeune–Dirichlet communicated to a friend of his, a mathematician, that he had discovered a method of integrating the differential equations of mechanics, and he had succeeded, by applying this method, to demonstrate the stability of our planetary system in an absolutely strict manner. Unfortunately we know nothing about this method except that the starting point for his discovery seems to have been the theory of infinitely small oscillations. It may, however, be supposed almost with certainty that this method was not based on long and complicated calculations but on the development of a simple fundamental idea, which we may reasonably hope to find again by means of earnest and persevering study. ”

Sembra che a proporre il problema sia stato proprio Weierstrass, che aveva sviluppato lui stesso dei metodi di calcolo di cui però non sapeva dimostrare la convergenza.

Sul metodo usato da Dirichlet e sul risultato da lui effettivamente ottenuto non sappiamo assolutamente nulla. Poincaré, partecipando al concorso, non ritrova quel risultato e, strettamente parlando, va fuori tema, nel senso che non trova il modo di scrivere le soluzioni del problema dei tre corpi sotto forma di sviluppi convergenti per qualunque intervallo temporale. Ma la memoria da lui presentata contiene una mole impressionante di risultati nuovi, e la commissione gli conferisce il premio con la seguente motivazione, tratta dalla comunicazione inviata a Poincaré:[♯]

“ *Il ressort de ce rapport que la commission a été de l'opinion unanime, que le mémoire qui est intitulé “Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique” avec la devise “Numquam præscriptos transibunt sidera fines”, est l'œuvre profonde et originale d'un génie mathématique dont la place est marquée parmi les grands géomêtres du siècle. Les plus importantes et les plus difficiles questions, comme la stabilité du système du monde, l'expression analytique des coordonnées des planètes par des series de sinus et de cosinus des multiples du temps, puis l'étude on ne peut plus remarquable, des mouvements asymptotiques, la découverte de formes de mouvement où les distances des corps*

[♯] “Si evince da quel rapporto che la commissione, unanime, ha espresso il parere che la memoria dal titolo *Sul problema dei tre corpi e le equazioni della dinamica*, contraddistinta dal motto “Numquam præscriptos transibunt sidera fines” è l'opera profonda ed originale di un genio matematico che entra di diritto tra i grandi geometri del secolo. I problemi più importanti e difficili, quali la stabilità del sistema del mondo, l'espressione analitica delle coordinate dei pianeti mediante serie di seni e coseni di multipli del tempo, e poi lo studio notevolissimo dei movimenti asintotici, la scoperta di forme del movimento in cui le distanze tra i corpi restano comprese tra due limiti fissati, ma le cui coordinate non sono esprimibili mediante serie trigonometriche, ed altri argomenti che non stiamo ad elencare, vi sono trattati con metodi che, è più che giusto dirlo, aprono una nuova epoca per la meccanica celeste.”

> *restant comprises entre deux limites fixes, on ne peut cependant exprimer leurs coordonnées par des séries trigonometriques, d'autres sujets encore que nous n'indiquons point, sont traités par des méthodes qui ouvrent, il n'est que juste de le dire, une époque nouvelle dans la mécanique céleste.* "

L'ultima parte della memoria di Poincaré, nella versione pubblicata sugli *Acta Mathematica*, è dedicata alle *orbite asintotiche*, ed egli mostra che proprio esse sono all'origine del caos che si manifesta anche nella dinamica del problema dei tre corpi. L'argomento è alquanto complesso; nel prossimo paragrafo tenterò l'impresa diperata di far almeno intuire di cosa si tratta, ma anticipo fin d'ora che la parola chiave sarà, ancora una volta: *risonanza.*

5. L'uragano Poincaré: le radici del caos

Conviene qui abbandonare per un momento il problema complesso della dinamica planetaria per descrivere un modello alquanto più semplice, ma ben adatto al fenomeno che vorrei descrivere. Si tratta, tutto sommato, della rappresentazione idealizzata del movimento dell'altalena.

Il modello a cui si fa costante riferimento anche nelle ricerche matematiche è il cosiddetto "pendolo forzato". Si pensa proprio alla realizzazione più semplice del pendolo: una pallina pesante appesa ad un filo, supponendo, e qui sta l'idealizzazione, che il filo sia in realtà un'asticella leggerissima, perfettamente rigida ed inestensibile, sicché il pendolo può oscillare ma può anche mettersi a ruotare mantenendo sempre costante la sua lunghezza, e che non ci sia l'attrito che smorza le oscillazioni, sicché il pendolo lasciato a sé stesso continuerebbe a muoversi all'infinito. L'aggettivo "forzato" significa che si sottopone il pendolo ad una piccola spinta periodica. Il modello sembra molto semplice, ma si adatta ad un numero impressionante di situazioni, dal sistema solare, alla dinamica delle stelle nelle galassie, al movimento delle cariche elettriche nell'antenna di una radio o televisione, agli acceleratori di particelle, alla fisica dei plasmi, alla chimica, &c: è un'esempio notevole di quanto sia vero e profondo il detto di Poincaré "la matematica è l'arte di dare lo stesso nome a cose diverse".

Ciascuno è libero di sforzarsi ad immaginare quali siano i movimenti possibili, ma vorrei cancellare subito le illusioni: l'immaginazione non basta, ed in un certo senso neppure l'abilità matematica. Quello del pendolo forzato è proprio un caso di *sistema non integrabile*, parole dal senso oscuro che tradotte in linguaggio meno preciso ma più comprensibile significano: non siamo in grado di calcolarne con carta e matita tutti i movimenti possibili. Fortunatamente in questi casi possiamo far ricorso al calcolatore, simulando numericamente la dinamica del sistema.

Un modo efficace per descrivere i risultati è la cosiddetta *mappa di Poincaré*, un termine misterioso che potremmo tradurre dicendo che usiamo lo stroboscopio. L'idea è tutto sommato semplice. I principi della Meccanica, così come sono stati enunciati da

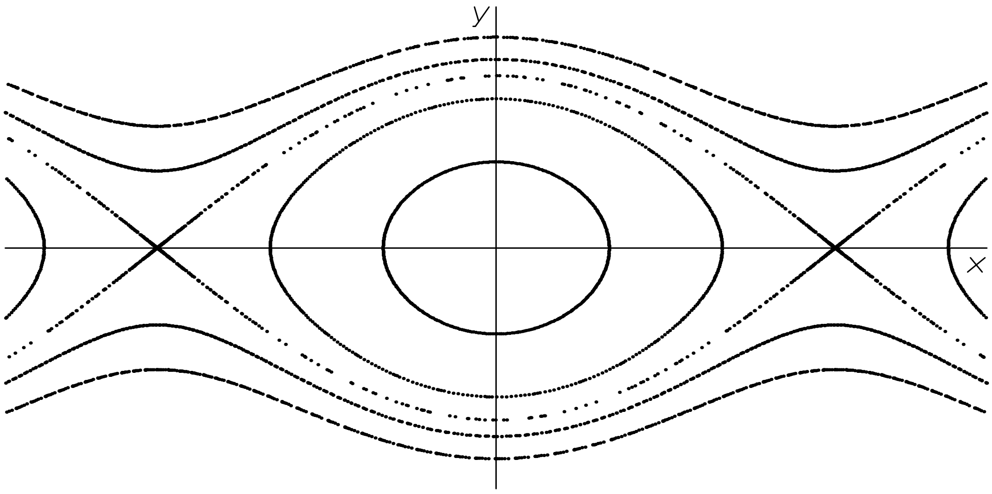

Figura 5. La sezione di Poincaré a periodo fissato per il modello del pendolo non forzato.

Newton, ci dicono che se sono note la posizione e la velocità del nostro pendolo ad un istante assegnato allora si può prevedere tutto il suo movimento sia nel passato che nel futuro. Si dice solitamente che la posizione e la velocità ci danno lo *stato* del pendolo ad un determinato istante, e si può rappresentare lo stato in grafico riportando sull'asse orizzontale (o in ascissa) la posizione e su quello verticale (l'ordinata) la velocità.[♮] La mappa di Poincaré consiste nel calcolare il moto del pendolo a partire da uno stato iniziale e marcare con una successione di punti lo stato del pendolo stesso ad intervalli regolari. In questo senso si può parlare di stroboscopio: un lampo illumina la scena; in quel momento noi determiniamo sia la posizione che la velocità del pendolo e riportiamo sul grafico il punto corrispondente. Unica avvertenza: la frequenza dello stroboscopio deve essere la stessa della forzante.

Cominciamo a supporre che il pendolo si muova liberamente, ossia che la forzante non faccia nulla salvo controllare la frequenza dello stroboscopio. Il risultato è illustrato dalla figura 5, che riporta diversi tipi di movimento. Il più banale è quello descritto dal punto al centro della figura, dove si incrociano gli assi, e corrisponde al pendolo immobile nel punto più basso: è la *posizione di equilibrio inferiore*. Attorno a quel punto ci sono due curve chiuse simili ad ellissi ciascuna delle quali rappresenta un movimento oscillatorio del pendolo: partendo da uno stato che si trova sulla curva i puntini successivi si distribuiscono con regolarità sulla curva stessa, e se sono molti e molto ravvicinati vediamo in pratica una curva continua. In alto ed in basso ci sono ancora due serie di puntini che stanno su due coppie di curve ondulate. Con un attimo di riflessione ci rendiamo conto che si tratta di movimenti di rotazione del pendolo: la velocità è abbastanza alta da far superare al pendolo il punto superiore; le curve in basso corrispondono ad una rotazione in senso antiorario,

[♮] Qui occorre una piccola avvertenza: la coordinata sull'asse orizzontale rappresenta un angolo; quindi i punti che differiscono di un multiplo di 2π devono considerarsi come coincidenti.

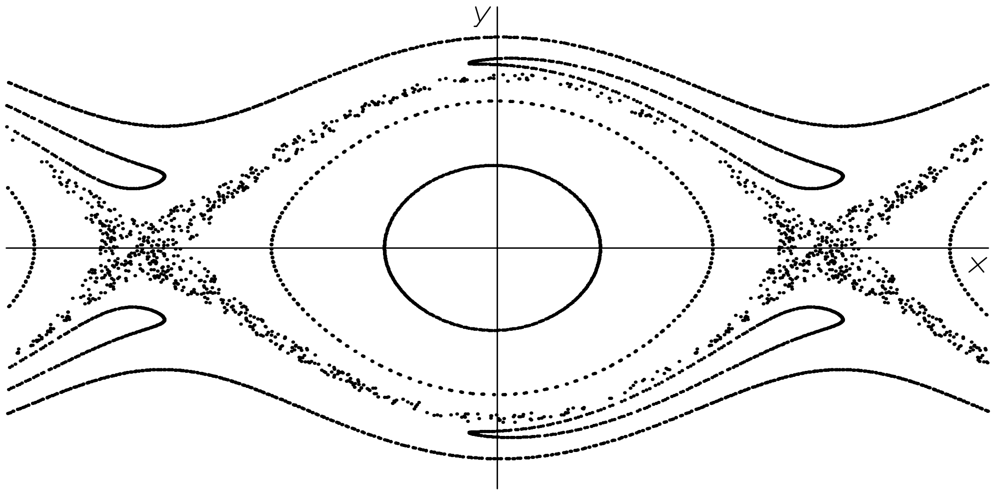

Figura 6. La mappa di Poincaré a periodo fissato per il modello del pendolo soggetto a forzante periodica.

quelle in alto al senso orario. La rappresentazione è piuttosto astratta, ma fin qui, tutto sommato, di facile comprensione. Un poco più difficile è capire cosa rappresentino le curve che si incrociano. Ambedue i punti di intersezione corrispondono alla situazione in cui il pendolo resta sempre immobile nel punto più alto, detto posizione di equilibrio superiore: praticamente impossibile da realizzare, ma si intuisce che questa possibilità esista. Gli altri puntini corrispondono ad un movimento per cui il pendolo non oscilla, e neppure gira: partendo molto vicino al punto di sinistra sulla curva superiore lo si vede dapprima restare per un certo tempo in prossimità dell'equilibrio, poi allontanarsene rapidamente per ritornare, dopo aver compiuto un giro, in prossimità dell'equilibrio superiore (il punto di destra nella figura) fino praticamente a fermarsi. Lo stesso accade se, facendo girare il film alla rovescia, si immagina di andare all'indietro nel tempo, oppure se si parte molto vicino al punto di equilibrio di destra, ma sulla curva inferiore (si inverte la velocità). Possiamo intuire che una situazione del genere sia realizzabile se pensiamo a quel che accade quando facciamo girare il pendolo: se la sua velocità non è troppo alta, allora esso rallenta vistosamente quando arriva in prossimità del punto più alto per poi riacquistare velocità quando scende di nuovo, tornando indietro se non ha velocità sufficiente per oltrepassare il punto superiore, oppure continuando la sua rotazione. Il movimento che ho descritto sopra si trova a metà tra questi ultimi due: realizzarlo in pratica è impossibile, ma la matematica ci dice che esso esiste. È quel *movimento asintotico* di cui si parla nella motivazione del premio assegnato a Poincaré: egli ne aveva compreso non solo l'esistenza, ma anche l'importanza.

Immaginiamo ora di sottoporre il pendolo all'azione della forzante, sempre con l'accortezza di far coincidere la frequenza dello stroboscopio con quella della forzante stessa. Ancora una volta la simulazione numerica ci dice cosa succede. I movimenti che partono inizialmente nelle stesse condizioni della fig. 5 sono rappresentati in fig. 6. I due moti di oscillazione sono rimasti praticamente gli stessi, ed in particolare restano oscillatori. Per i moti di rotazione si vede che qualcosa cambia: uno dei due, quello più alto (o più basso) non è cambiato di molto; l'altro ha dato origine a due strane curve chiuse, molto allungate: è la *risonanza* tra la frequenza di rotazione del pendolo e quella della forzante che ad un certo momento si trovano in fase, per cui la velocità del pendolo aumenta, e dopo un po' entrano in controfase, per cui il pendolo rallenta. Ancor più stupefacente è la macchia che si è formata in corrispondenza alla separatrice: sembra descrivere un movimento del tutto caotico, . . . ed infatti così è. Qui si entra nel vivo della scoperta di Poincaré, e vorrei provare a descriverla.

Cominciamo a vedere come si possa generare un movimento di tipo caotico. Immaginiamo che il pendolo parta dall'equilibrio superiore con una velocità molto piccola. L'azione della forzante durante il suo movimento può tradursi in un piccolo incremento della velocità, se la forzante per così dire lo aiuta, oppure in un decremento. Quando il pendolo torna in prossimità del punto più alto può accadere o che lo superi, se la sua velocità è sufficiente, oppure che torni indietro, se è stato frenato abbastanza. Questo fenomeno si ripete ad ogni giro, e se abbiamo la pazienza di osservare il movimento a lungo possiamo riassumerlo, ad esempio, scrivendo "0" tutte le volte che il pendolo passa dall'altra parte, e "1" tutte le volte che torna indietro. Poiché cambiando lo stato iniziale cambia tutta l'evoluzione, ad ogni stato possiamo far corrispondere la successione di simboli 0,1 che descrive il moto. Ora immaginiamo di scrivere una successione di simboli 0,1 semplicemente lanciando una moneta, e facendo corrispondere, ad esempio, 0 a "testa" e 1 a "croce". Chiunque di noi è certamente disposto ad affermare che si tratta di una successione del tutto casuale (se la moneta è onesta). Ebbene, la matematica ci dice che per ogni successione generata con la moneta esiste uno stato iniziale del pendolo che la realizza. Come dire che nella dinamica del pendolo forzato compare un elemento di assoluta casualità come il lancio della moneta! Questa è la radice del caos.

Vorrei ora illustrare come lo stesso fenomeno si riproponga per le risonanze. Farò uso della cosiddetta *mappa standard*, un modello introdotto nel 1969 da Boris Valerianovich Chirikov (1928–2008) al fine di calcolare in modo abbastanza rapido la mappa di Poincaré per il pendolo forzato. La figura 7 riassume la situazione nel caso di una forzante abbastanza robusta da mettere in evidenza i fenomeni interessanti. Le curve regolari attorno centro rappresentano dei movimenti solitamente detti "di tipo ordinato": il pendolo compie oscillazioni all'apparenza regolari. Intorno alle curve centrali si sono formati quattro gruppetti di curve che assomigliano a quelli centrali. Se potessimo seguire (con calma!) la figura mentre si forma ci renderemmo conto che il punto che rappresenta lo stato del pendolo salta da una curva all'altra: è una situazione di risonanza, in cui il pendolo compie un'oscillazione ogni 4 periodi della forzante. Al centro delle curve c'è un movimento strettamente periodico, rappresentato da soli 4 punti perché dopo 4 periodi si torna allo stato iniziale. Intorno al movimento periodico ci sono altri movimenti in cui il pendolo alternativamente rallenta ed accelera, precedendo oppure seguendo la forzante: è un moto rappresentabile con degli epicicli. Poi c'è tutta la regione del caos.

La complessità della figura emerge ancor meglio se la si guarda in maggior dettaglio, come sotto una lente. I quattro riquadri della figura 8 rappresentano degli ingrandimenti

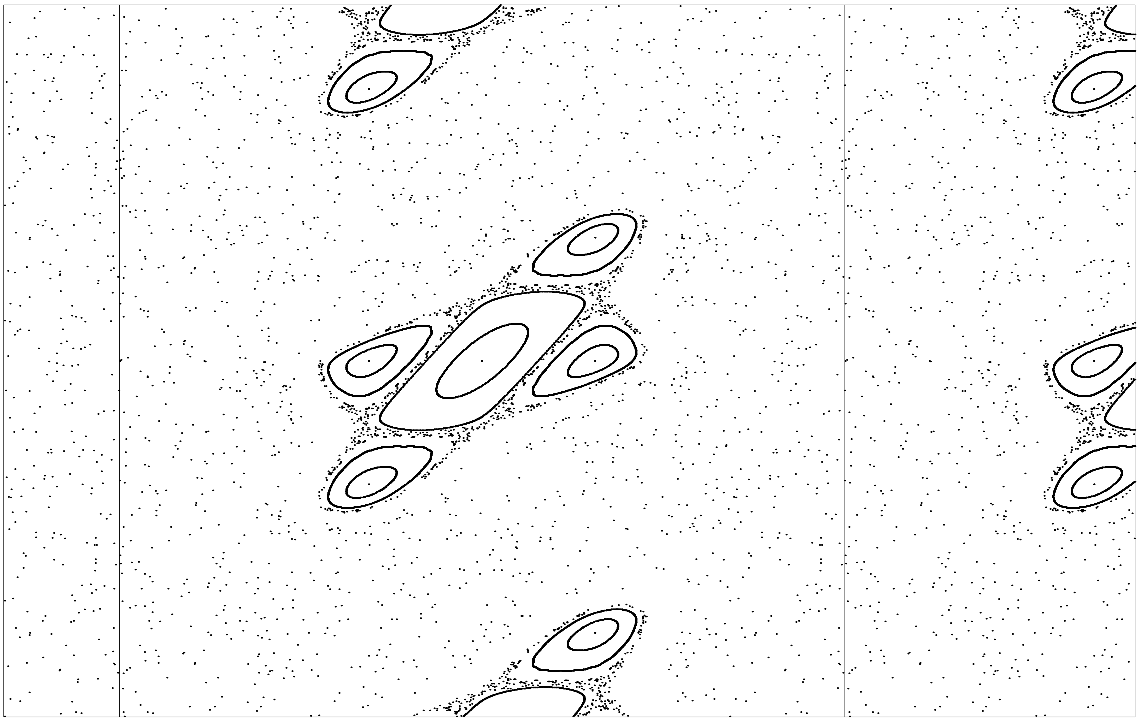

Figura 7. Rappresentazione della mappa standard in un caso che corrisponde ad una forzante abbastanza robusta.

successivi. In ciascuno di essi si vede come le zone che nella figura precedente sembravano percorse da curve regolari contengano in realtà delle situazioni di risonanza a ciascuna delle quali corrisponde una coppia di separatrici che si incrociano, e delimitano la regione controllata dalla risonanza stessa. In corrispondenza dei punti di incrocio si ripresenta nuovamente una dinamica caotica: il pendolo può entrare nella risonanza od uscirne in modo del tutto casuale col meccanismo del "testa o croce" che ho già descritto. Nella figura l'area occupata dalla regione del caos diventa rapidamente molto piccola, fino a diventare inosservabile, ma la matematica dice che questa continua ad esserci, e si presenta tutte le volte che la frequenza del pendolo e quella della forzante hanno un rapporto razionale! Se ne conclude che la figura ci mostra la possibile *coesistenza di ordine (le curve regolari) e caos (le regioni attorno alle separatrici)* in una forma molto intricata. Possiamo anche immaginare che durante l'evoluzione il nostro pendolo così come può entrare ed uscire da una risonanza possa anche saltare da una risonanza ad un'altra, sempre in modo del tutto casuale. Questa è una questione più delicata ed in qualche modo ancora aperta, ma ci sono esempi che mostrano come ciò sia possibile.

Torniamo al sistema planetario, e ricordiamo che Giove è il pianeta che ha la massa maggiore. Supponiamo che esso continui a muoversi sulla sua orbita, ellittica o circolare che sia, con un periodo ben preciso. Nel frattempo anche la Terra si muove sulla sua orbita, con un suo periodo diverso da quello di Giove. Consideriamo ora quello che vediamo dalla Terra: noi osserviamo Giove talvolta in opposizione rispetto al Sole (ben alto nel cielo verso

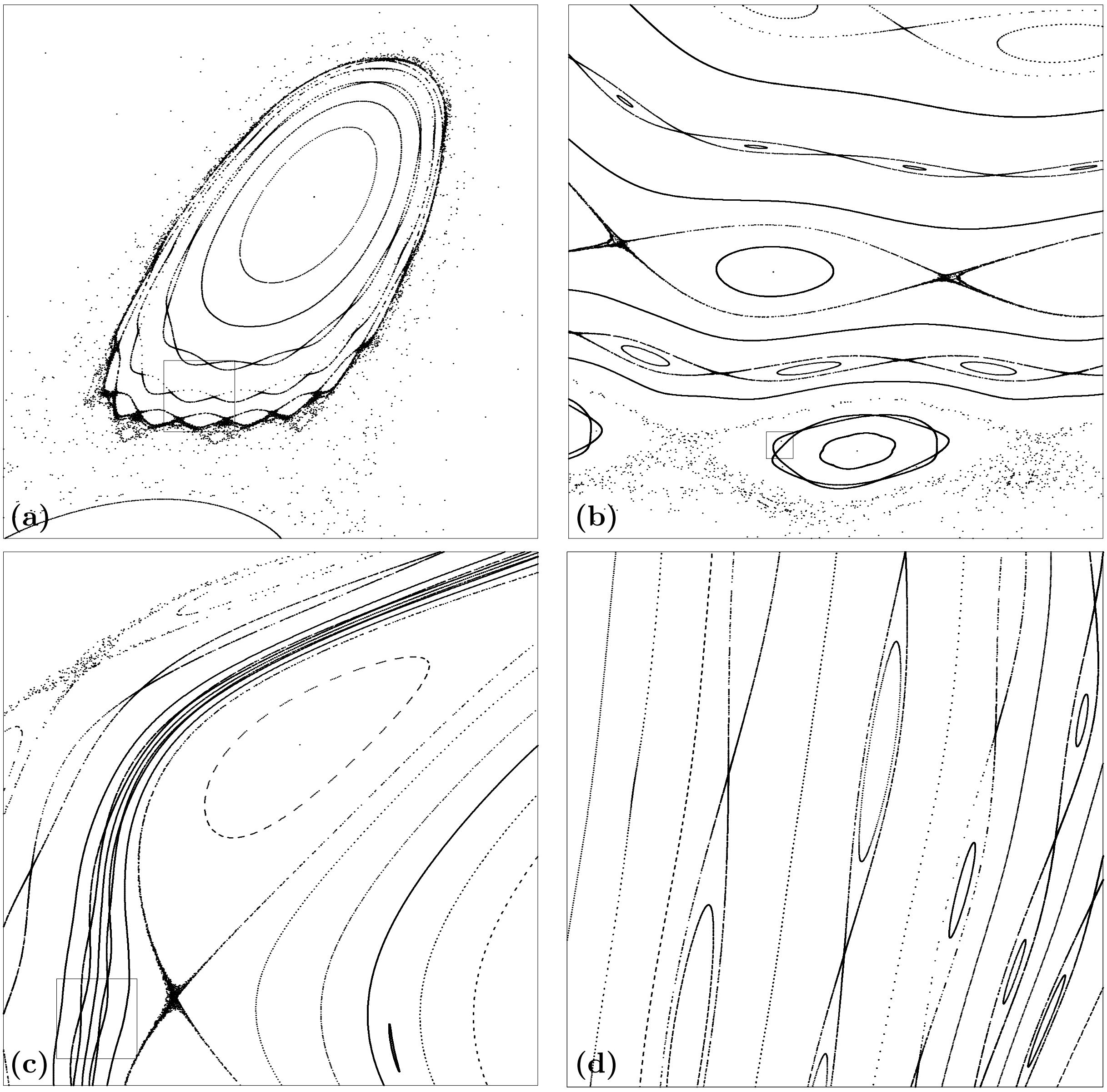

Figura 8. Ingrandimenti successivi delle orbite della standard map per $\varepsilon = 2.36$. Si vede come la formazione di isole intorno ad orbite periodiche stabili e di separatrici che emanano da orbite periodiche instabili si ripeta su scala sempre più piccola.

mezzanotte) talvolta in congiunzione (nel senso che non lo vediamo affatto, perché sta passando dietro al Sole). Dunque la distanza della Terra da Giove cambia periodicamente, e così la forza che Giove esercita sulla Terra: è una forzante periodica. Lo stesso accade per gli altri pianeti e per gli asteroidi. Si ha *risonanza in moto medio* quando il rapporto tra il periodo di un pianeta o di un asteroide e quello di Giove è un numero razionale. Possiamo ben immaginare che ci sia una forte somiglianza col modello del pendolo forzato, ed in effetti così è se si guardano le equazioni: quelle del sistema planetario sono solo molto piu complicate di quella del pendolo, ma i meccanismi sottostanti alla dinamica sono gli stessi.

Nella memoria presentata per il premio del Re di Svezia Poincaré studia la dinamica di un sistema planetario formato dal Sole e da due soli pianeti — già abbastanza complicato anche senza includerli tutti. È qui che egli comprende che le risonanze producono orbite asintotiche, e si rende conto dell'esistenza del caos. La sua opera rappresenta un avanzamento enorme rispetto ai suoi predecessori e, al tempo stesso, una sfida che per i matematici si rivela davvero ardua. Si può ben dire che il fenomeno del caos resta sostanzialmente sconosciuto a matematici, fisici ed astronomi fino alla seconda metà del secolo XX, con poche ma brillantissime eccezioni: possiamo ricordare principalmente i nomi di George David Birkhoff (1884–1944) e Carl Ludwig Siegel (1896–1981).

6. Gli ultimi cinquant'anni

A partire dalla seconda metà del secolo XX vediamo rinascere un grande interesse per l'Astronomia e la Meccanica Celeste. A questa rinascita contribuiscono almeno tre fattori: lo sviluppo di nuovi metodi matematici, l'avvento dei calcolatori elettronici e l'inizio dell'era delle esplorazioni spaziali. Il periodo che segna una svolta decisa si colloca a metà degli anni '50.

Nel 1954, al Congresso Internazionale dei Matematici di Amsterdam, Andrej Nikolaevič Kolmogorov (1903–1987) annuncia un teorema che rappresenta il primo risultato di interesse paragonabile ai molti di Poincaré. In termini brevi si può dire che egli riprende la tesi, cara a Weierstrass, che la dinamica planetaria sia rappresentabile mediante epicicli: l'affermazione è che tali movimenti costituiscono la maggioranza di quelli possibili. Il risultato viene ripreso ed ampliato nel 1962 da Jürgen Kurt Moser (1928–1999) e nel 1963 da Vladimir Igorevich Arnold (1937–2010), i cui studi danno origine alla cosiddetta *teoria KAM* (da Kolmogorov–Arnold–Moser) che oggi costituisce uno dei campi più avanzati della ricerca matematica.

Nel 1955 Moser, in uno studio dedicato alla dinamica delle particelle negli acceleratori, enuncia per la prima volta un risultato di *stabilità esponenziale*, termine tecnico che può tradursi in parole semplici dicendo che la dinamica di un sistema può anche non essere stabile, nel senso che le inevitabili risonanze ed il caos da esse generato finiranno per distruggerlo, ma comunque può trovarsi in uno stato di apparente stabilità che dura per un tempo lunghissimo, superiore alla vita stessa del sistema (ad esempio, per il sistema planetario il tempo di stabilità potrebbe superare l'età dell'Universo). L'applicazione, come ho detto, non è rivolta direttamente alla dinamica planetaria, ma la tecnica matematica è la stessa. La stessa idea viene enunciata nel 1959 da John Edensor Littlewood (1885–1977) in due lavori dedicati ai cosiddetti *punti triangolari di Lagrange*, il cui interesse copre, ad esempio, il caso degli asteroidi Troiani. La formulazione generale della teoria della stabilità esponenziale è dovuta a Nikolai Nikolaevich Nekhoroshev (1946–2008), che la pubblica nel 1978.

Nel 1952 Enrico Fermi (1901–1954), John R. Pasta (1918–1984) e Stanislaw Marcin Ulam (1909–1984) intraprendono la prima simulazione numerica al calcolatore della dinamica di un sistema meccanico. Il rapporto viene reso pubblico nel 1955. Benché l'argomento resti lontano dalla Meccanica Celeste, anche qui la tecnica è fondamentalmente la stessa. Più interessante è il fatto che quel rapporto apre in un certo senso l'era degli *esperimenti numerici.* A partire dal 1956 Per–Olof Lindblad e George Contopoulos iniziano a studiare con metodi numerici la dinamica delle stelle nella galassie. Un articolo di Michel Hénon del 1964 mette in evidenza l'esistenza di una dinamica caotica anche nei modelli galattici. Questi lavori hanno il grande merito di richiamare l'attenzione di fisici ed astronomi sui fenomeni caotici. Dopo gli anni '70 gli esperimenti numerici diventano strumento di lavoro comune.

Nel 1957 il lancio dello Sputnik 1, il primo satellite artificiale, dal cosmodromo di Baikonur apre l'era delle esplorazioni spaziali. Non intendo addentrarmi sulle vicende della corsa allo spazio negli anni o decenni successivi: per chi è nato nella prima metà del secolo ormai trascorso è storia vissuta; per i più giovani si tratta di vicende spesso ricordate da giornali, riviste e televisione.

Ho ricordato tutti i fatti precedenti, anche quelli non direttamente connessi col problema della stabilità del sistema solare che costituisce il tema di questa conversazione, per sottolinearne la quasi contemporaneità. Non è mia intenzione indagare sulle ragioni di questa coincidenza: possono avervi contribuito molte cause, e non tutte strettamente scientifiche. Certamente si tratta di eventi che da quel momento condizionano in modo determinante lo sviluppo delle nostre conoscenze, in parallelo con lo sviluppo della tecnologia. Ma vorrei tornare al nostro problema di partenza: la stabilità del sistema solare.

L'annuncio del teorema di Kolmogorov viene subito interpretato come la soluzione del problema che aveva assillato Newton, Lagrange, Laplace e via via tutti i matematici ed astronomi ottocenteschi. Ma i dubbi non tardano a farsi strada. Non è facile descrivere a parole il significato del teorema, ma ci proverò. Torniamo per un momento alle figure 7 e 8, ed al fenomeno della coesistenza di ordine e caos. Il teorema di Kolmogorov, ridotto ad un linguaggio privo di elementi tecnici, può enunciarsi così: *l'ordine ed il caos coesistono, ma se la perturbazione è abbastanza piccola allora la regione dominata dalle risonanze diventa trascurabile, e i movimenti di tipo ordinato diventano predominanti.* La perturbazione nel caso del pendolo è la forzante, e nel caso del sistema solare è l'azione reciproca tra i pianeti (principalmente quella di Giove, come osservava Weierstrass). I movimenti di tipo ordinato sono quelli descrivibili con epicicli; i movimenti di tipo caotico esistono, ma sono in netta minoranza.

Raccontato così, il teorema di Kolmogorov sembra sancire in modo quasi completo la correttezza della visione di Weierstrass, che riteneva che i moti planetari fossero rappresentabili mediante epicicli. In tal caso si concluderebbe anche che il sistema solare è stabile, perché i movimenti restano sempre limitati. Il "quasi" è giustificato da quella piccola minoranza di movimenti caotici. Ma c'è una domanda più sottile: la perturbazione mutua tra i pianeti è davvero abbastanza piccola da rendere applicabile l'enunciato del teorema? Rispondere a questa domanda è molto difficile. Nel 1966, quando le prime simulazioni numeriche cominciavano a mostrare in modo lampante il fenomeno della coesistenza di ordine e caos, Hénon tentò di dare una valutazione rozza basandosi sulle dimostrazioni di Arnold e Moser, le sole allora disponibili. La sua conclusione fu che per applicare il teorema di Kolmogorov al sistema solare la massa di Giove dovrebbe essere inferiore a quella di un protone! Un tal risultato non deve sorprendere, né invogliare al pessimismo: in tutti i libri di Analisi Matematica si trova regolarmente l'affermazione: "se una certa quantità è sufficientemente piccola, allora succede che ...", ma rendere quantitativo il significato di quel "sufficientemente piccola" può essere impresa ardua, e comunque affrontabile solo per esempi specifici.

Il teorema di Nekhoroshev cerca di tener conto anche dei movimenti caotici rinunciando agli epicicli, e cercando solo, per così dire, di limitare i danni prodotti dal caos: si tratta di dimostrare che l'azione del caos è così lenta da potersi manifestare in modo visibile solo tempi che possono superare l'età stessa del sistema solare, o dell'universo. Non è la stabilità perpetua garantita da Kolmogorov, ma ha il vantaggio di valere per *qualunque* moto, anche per quelli che si svolgono nelle regioni ove si ha una dinamica caotica. Nekhoroshev stesso descrive il fenomeno in questi termini. Supponiamo di muoverci in una foresta molto fitta: la nostra marcia sarà inevitabilmente lentissima, perché dobbiamo districarci in mezzo ad alberi, cespugli e quant'altro (senza usare il machete); di tanto in tanto possiamo incontrare una radura e muoverci più rapidamente, ma poco dopo ci ritroviamo nuovamente immersi nel fitto della foresta, e dobbiamo ancora rallentare. In questa raffigurazione dobbiamo pensare alle regioni di moto ordinato come alla vegetazione che impedisce di avanzare, ed alle radure come alle regioni caotiche che con un meccanimo casuale permettono di saltare da una separatrice all'altra. Per dare ancora un enunciato privo di elementi tecnici possiamo dire così: *se la perturbazione è abbastanza piccola, allora il tempo necessario perché il caos provochi un cambiamento sensibile della dinamica cresce esponenzialmente con l'inverso della perturbazione.* La frase può ancora suonare un po' difficile per via di quel "cresce esponenzialmente", ma riferendoci al moto dei pianeti la possiamo interpretare così: supponiamo che per una certa intensità della perturbazione (ad esempio per un dato valore del rapporto tra la massa di Giove e quella del Sole) ci voglia un certo tempo per modificare in modo sensibile il semiasse maggiore delle orbite dei pianeti. Se dimezziamo la perturbazione allora il tempo si moltiplica per 4; se la dividiamo per 3 allora il tempo si moltiplica per 8, se la dividiamo per 4, 5, 6, 7, ... il tempo si moltiplica per 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, ... Per avere un'idea della rapidità con cui cresce il tempo proviamo a supporre di dividere la perturbazione per 64. Allora dobbiamo moltiplicare il tempo per 2^{64}, che è un numero di 19 cifre! È il gioco dei chicchi di riso sulla scacchiera: 1 sul primo quadratino, 2 sul secondo, 4 sul terzo ... e non basta tutto il riso coltivato dall'umanità da quando esiste l'agricoltura per riempire tutti i quadratini.

Alla luce del teorema di Nekhoroshev si vede come la scelta tra vedere il moto planetario come orologio perfetto o credere all'azione del caos che potrebbe distruggere il sistema solare diventi praticamente impossibile se prendiamo come base solo le nostre osservazioni. Per rilevare una variazione apprezzabile e non periodica dei semiassi maggiori potrebbero essere necessari milioni o centinaia di milioni di anni, mentre i dati che abbiamo a disposizione ne coprono circa 2500, e le osservazioni davvero sistematiche non più di 500. Dovremmo tornare a Keplero: l'umanità potrà rispondere a queste domande solo dopo... milioni di anni di osservazioni! Ci sarà ancora l'umanità? Inoltre anche per il teorema di Nekhoroshev si pone la domanda cruciale: ma quanto deve essere piccola la perturbazione?

Sembra di essere arrivati al limite non solo delle nostre conoscenze, ma anche delle nostre possibilità. Ma c'è ancora una scappatoia. Non possiamo estendere nel tempo le nostre osservazioni, ma possiamo simulare la dinamica planetaria con i nostri calcolatori; non possiamo svolgere a mano tutti i calcoli algebrici necessari per verificare l'applicabilità dei teoremi di Kolmogorov e di Nekhoroshev al sistema planetario, ma possiamo ricorrere all'elettronica. Con la potenza dei calcolatori attuali possiamo simulare la dinamica del sistema solare su tempi dell'ordine della decina di miliardi di anni, e possiamo manipolare espressioni algebriche con qualche milione di termini. È in queste direzioni che si è sviluppata la ricerca negli ultimi decenni.

Dare un resoconto completo delle numerose esplorazioni numeriche della dinamica del sistema solare richiederebbe una discussione molto lunga, e comunque si tratterebbe di informazioni destinate ad essere superate in breve tempo. Cercherò quindi di esporre la situazione attuale in modo sintetico.

Una simulazione numerica di una certa consistenza che tenga conto di tutti i pianeti noti richiede una potenza di calcolo apprezzabile, e proprio per questo è solo verso la fine degli anni '80 che Andrea Milani, Anna Nobili e Mario Carpino riescono a coprire un arco di qualche centinaio di milioni di anni. Il rapido incremento di potenza dei calcolatori unito alla diminuzioni dei costi ha permesso nei due decenni successivi di raccogliere una mole notevole di risultati anche su tempi molto più lunghi.

L'esistenza del caos nei moti planetari è stata messa in evidenza soprattuto da Jacques Laskar. In termini brevi si possono riassumere così le sue conclusioni. I quattro pianeti maggiori (Giove, Saturno, Urano e Nettuno) mostrano una dinamica molto regolare anche sull'arco di miliardi di anni; il comportamento osservato è compatibile con una descrizione della dinamica mediante epicicli, in accordo con il teorema di Kolmogorov. Non si può dire lo stesso dei pianeti interni. Le eccentricità e le inclinazioni delle loro orbite mostrano variazioni che non sono riconducibili allo schema degli epicicli, nel senso che non vi si possono riconoscere dei periodi, e quindi si deve accettare l'esistenza di un comportamento caotico. Il caso di Mercurio è particolarmente critico: le simulazioni eseguite negli ultimi anni da Laskar mostrano che calcolando diverse possibili evoluzioni che differiscono solo per la posizione iniziale del pianeta (variata di circa un metro!) conducono a risultati molto diversi. In qualche caso l'eccentricità di Mercurio cresce sensibilmente, fino a far intersecare la sua orbita con quella di Venere e della Terra in poco meno di 4 miliardi di anni; in altri casi l'eccentricità resta limitata, ma si comporta comunque in modo non riconducibile alla combinazione di moti periodici.

La dinamica degli asteroidi, ed in particolare delle lacune di Kirkwood, è questione molto più complessa, ed è stata studiata diffusamente, tra gli altri, da Jacques Henrard, Alessandro Morbidelli, Anne Lemaitre e Claude Froeschlé. Il tentativo di comprendere la formazione delle lacune tenendo conto della risonanza con il periodo di Giove, come supponeva Kirkwood, si è rivelato infruttuoso. Per darne una spiegazione plausibile si è dovuto tener conto anche dell'azione delle *risonanze secolari*: le frequenze in gioco sono quelle della precessione dei nodi e dei perieli delle orbite, che hanno periodi di diversi secoli. È un po' come pensare di mettere in moto un'altalena dandole un colpetto ogni cent'anni: il sistema solare ne ha avuto tutto il tempo! Le numerose simulazioni mostrano che la distribuzione degli asteroidi è stata letteralmente scolpita da queste risonanze, ma il raggiungimento della situazione attuale ha richiesto centinaia di milioni di anni, e molti asteroidi si trovano ancor oggi su orbite instabili che su tempi abbastanza lunghi potranno condurli ad abbandonare il Sistema Solare, o a cadere sul Sole, o ancora ad entrare in collisione con i pianeti interni.

Una situazione analoga si ha per i numerosi oggetti che si trovano oltre l'orbita di Nettuno. Per essi la dinamica è molto simile a quella della fascia asteroidale, ma i periodi di rivoluzione passano dai pochi anni degli asteroidi a qualche secolo: si tratta di una popolazione "giovane", che non ha ancora avuto il tempo di evolvere verso una situazione stabilizzata, ed infatti è una sorgente che ci fornisce in continuazione nuove comete.

Quanto ho detto non è che un riassunto alquanto sintetico dei risultati: il numero di articoli dedicati all'esplorazione numerica cresce in modo impressionante. A questi calcoli si aggiungono le numerose simulazioni che interessano in modo diretto le esplorazioni spaziali, sia per programmare delle missioni, sia per scoprire orbite che raggiungano gli obiettivi minimizzando il consumo di carburante.

Le esplorazioni numeriche, va da sé, sono strumenti estremamente preziosi in quanto sostituiscono in pratica le osservazioni, come se ci permettessero di estenderle su tempi molto lunghi. Tuttavia non sono esenti da difetti, e qui ne voglio richiamare due. Il primo è che il calcolo delle orbite con strumenti numerici è inevitabilmente soggetto a piccoli errori dovuti alle approssimazioni dei metodi di calcolo. È un difetto ineliminabile, e non è facile valutare quanto l'accumulo di questi piccoli errori influisca sul risultato finale, soprattutto quando si svolgono simulazioni su tempi di miliardi di anni. Il secondo difetto è che si possono simulare solo singole orbite, ed al più cercare di ricavare una statistica basata sul calcolo di un buon numero di orbite che partono inizialmente in condizioni molto simili (come nel calcolo di Laskar per Mercurio).

I metodi analitici, ed in particolare quelli che si fondano sulla teoria di Nekhoroshev, possono rimediare a questi due difetti, in quanto riescono, ad esempio, a darci informazioni su tutte le orbite che partono inizialmente vicine tra loro senza doverle calcolare esplicitamente. Il problema è che i calcoli, svolti con metodi non molto dissimili da quelli di Lagrange e Laplace, sono alquanto più laboriosi: già considerando i due pianeti maggiori, Giove e Saturno, si arriva rapidamente a costruire espressioni algebriche che contengono milioni di termini, ed i calcolatori attuali non ci consentono di fare di più. Ciononostante si è riusciti recentemente ad ottenere alcuni risultati anche in questa direzione, dovuti, tra gli altri, a Ugo Locatelli, Marco Sansottera, Alessandra Celletti, Luigi Chierchia ed all'autore di questa nota. In particolare si è riusciti a mostrare l'applicabilità dei teoremi di Kolmogorov e Nekhoroshev almeno al sistema costituito da Sole, Giove e Saturno, oppure ad alcuni asteroidi. In altre parole, almeno per un modello semplificato del Sistema

Solare (ridotto a due soli pianeti!) possiamo garantire che le orbite resteranno molto vicine a quelle attuali per tempi paragonabili con l'età dell'Universo. Il resto è ancora fuori dalla portata dei nostri calcolatori, ma... ci stiamo lavorando.

7. Finale

Ho iniziato questa conversazione ponendo una domanda: "il Sistema Solare è stabile?", mettendo in evidenza fin dall'inizio che bisognerebbe dare alla domanda un senso più preciso. Proseguendo nella discussione ho poi illustrato come parlando di stabilità ci si possa riferire soprattutto ai semiassi maggiori ed alle eccentricità delle orbite, e come la questione possa ricondursi a stabilire se l'evoluzione di queste ultime quantità possa descriversi come composizione di periodi (gli epicicli o le serie di Fourier), oppure se si debba accettare che vi possano essere anche variazioni casuali, indotte da risonanze che agiscono su tempi molto lunghi se paragonati alla nostra vita, ma raggiungibili nel corso dell'evoluzione dell'Universo.

La risposta, come ho cercato di mostrare, non la conosciamo. Il quadro che ho tracciato, e che si fonda sulle nostre attuali conoscenze, mostra un sistema in cui si può identificare un nucleo, quello dei quattro pianeti maggiori, che anche su tempi dell'ordine di qualche miliardo di anni sembra comportarsi come un orologio perfetto. Il caos però si manifesta, sia pure in misura limitata che non lascia prevedere effetti catastrofici su tempi molto lunghi, sui pianeti interni, compresa la Terra. Sui corpi minori poi, asteroidi, comete e meteoriti, la dinamica caotica ha avuto tutto il tempo per esercitare la sua azione, e noi ne possiamo osservare i risultati.

Una possibile interpretazione è che il Sistema Solare sia stabile quel tanto che basta perché possa esistere e durare un tempo sufficientemente lungo. Il che significa: quanto basta per dare all'evoluzione della vita il tempo necessario per passare dalle sue forme primordiali ad organismi sempre più complessi, fino a produrre una specie che ha ricevuto in dono la capacità di riflettere sul mondo in cui vive e di comprenderne i meccanismi. Di più, allo stato attuale, non possiamo dire. In particolare non possiamo escludere che il miglior modello planetario che abbiamo saputo costruire contenga in sé anche la possibilità del disfacimento di quel sistema che descrive, tutto sommato, molto bene.