

Accademia dei Lincei  
e Normale per la scuola

22-30 aprile 2021

## La dinamica del caos, il caos della dinamica.

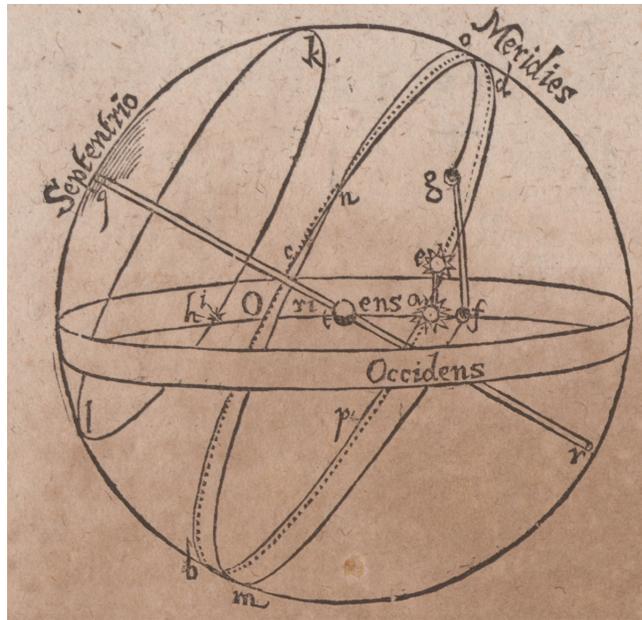
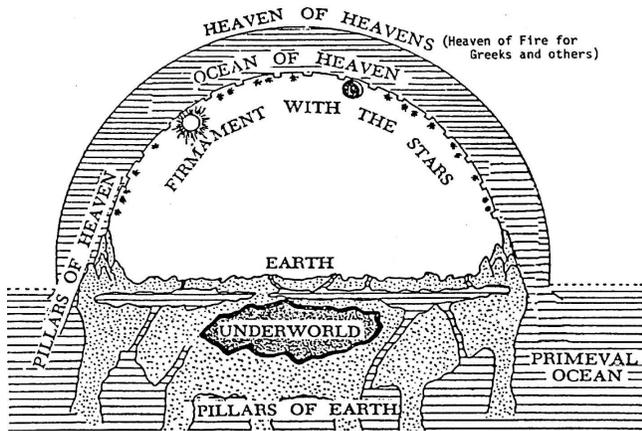
Antonio Giorgilli

Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere

# 1

## DAL CAOS ALL'ORDINE

- L'alba dell'Astronomia.
- I periodi dei moti planetari.
- La geometria dei greci: eccentrici, equanti, epicicli.
- Le sfere eliocentriche di Aristarco e Copernico.
- Tycho Brahe e Galileo
- La perfezione incompleta del mondo di Keplero
- Newton, la dinamica e la gravitazione.



## 1.1 L'alba dell'astronomia

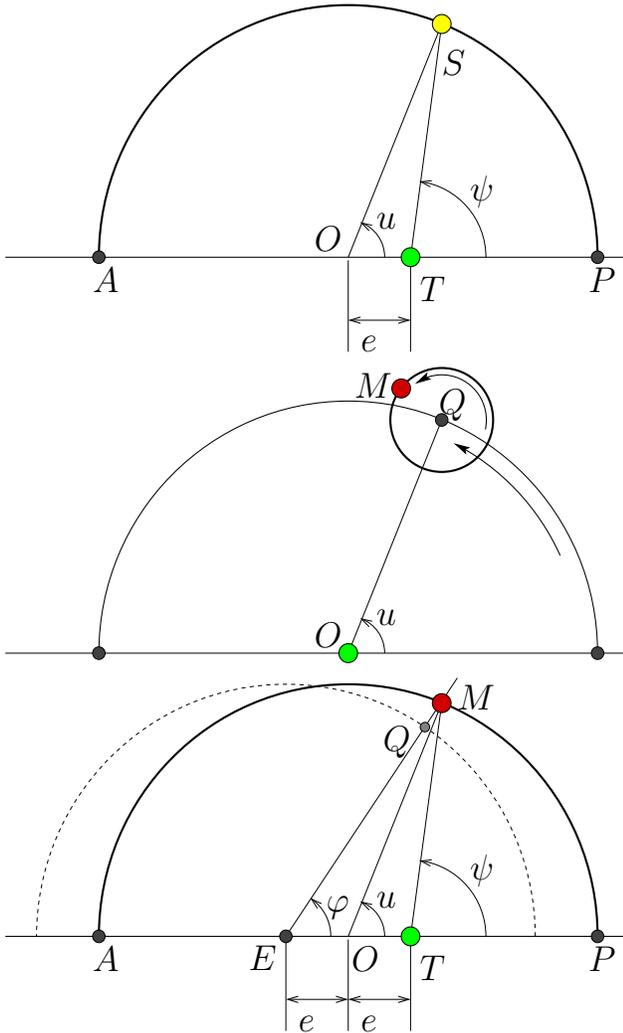
### 1.1.1 Il modello ingenuo del cosmo

- I miti sumeri e babilonesi e la cosmogonia di Esiodo.
  - La terra come un disco che appoggia su colonne.
  - La calotta del firmamento che separa le acque di sopra da quelle di sotto.
  - L'oceano che circonda la terra e le acque dolci sotto il suolo.
  - I due astri principali: Sole e Luna
- La scoperta dei periodi:
  - Il moto diurno del Sole e della Luna: giorno e notte
  - Le fasi della luna: il mese dei calendari lunari.
  - Il moto annuo del Sole: l'eclittica, lo zodiaco, le stagioni e il calendario solare.
  - I periodi delle eclissi.
- La nascita dell'astronomia greca.
  - Anassimandro (619–546 aC): il cielo circonda la Terra; le sfere di Eudosso (408–355 aC).
  - L'eliocentrismo dimenticato di Filolao (470–390 aC) e Aristarco (310–230 aC).
  - La figura sferica della Terra.
- Il filo conduttore di tutta l'astronomia antica:

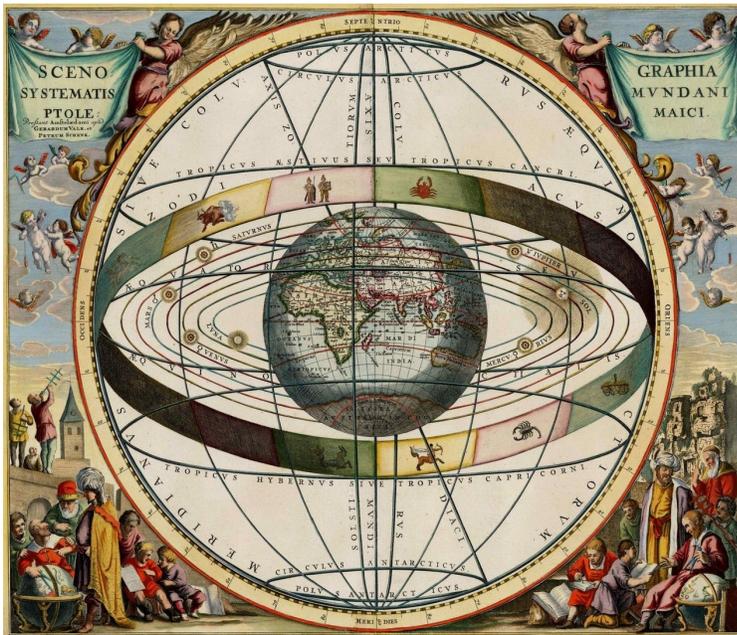
*Nei moti degli astri ci sono dei periodi.*

*Compito dell'Astronomia è calcolare quei periodi mediante i dati delle osservazioni, e prevedere i fenomeni futuri.*

### 1.1.2 Strumenti geometrici dell'astronomia greca



- **Eccentrico:** Apollonio (262–190 aC).
  - Giustifica la non uniformità del moto annuo del Sole (e anche dei pianeti).
  - La Terra  $T$  è spostata di  $e$  (eccentricità) rispetto al centro  $O$  dell'orbita.
  - $P$ : perigeo (par il Sole  $S$ );  $A$ : apogeo
  - L'anomalia eccentrica  $u$  evolve uniformemente.
  - L'anomalia vera  $\psi$  cresce più rapidamente al perigeo che all'apogeo.
- **Epiciclo:** Apollonio o Ipparco (190–120 aC).
  - Giustifica il moto retrogrado dei pianeti.
  - Il pianeta ( $M$  per Marte, ad esempio) si muove su un cerchio (epiciclo) il cui centro  $Q$  si muove a sua volta su un cerchio (deferente).
  - La combinazione di più epicicli corrisponde alle nostre serie trigonometriche.
- **Equante:** Tolomeo (90–168 dC), o forse Ipparco.
  - Corregge la non uniformità osservata dell'anomalia eccentrica.
  - Il punto  $Q$  ruota uniformemente rispetto al punto equante  $E$ , sul cerchio tratteggiato.
  - L'anomalia media  $\varphi$  evolve uniformemente.
  - Il pianeta  $M$  si trova sull'intersezione della retta  $EQ$  con l'orbita.



### 1.1.3 Il cosmo di Tolomeo (90-168 dC)

- Adotta il modello aristotelico delle sfere.
  - La terra è immobile al centro del cosmo.
  - Luna e pianeti sono incastonati su sfere con centro nella Terra, composte da *etere* (il quinto elemento).
- Le sfere sono oggetti materiali, e sono ordinate secondo la loro velocità.
  - La più esterna è il *cielo delle stelle fisse*, che ruota più velocemente di tutte le altre sfere.
  - Verso l'interno seguono, in ordine decrescente di velocità: Saturno, Giove, Marte, Sole, Venere, Mercurio e Luna.
  - Tutti i pianeti hanno un punto eccentrico, un epiciclo e un equante; gli epicicli sono a loro volta sfere.
  - Il Sole è eccentrico, ma non ha equante né epiciclo.

## 1.2 Copernico (1473–1543) e Tycho Brahe (1546–1601)

### 1.2.1 Le “petitiones” (postulati) di Copernico

*Prima petitio:*

*Omnium orbium caelestium sive sphaerarum unum centrum non esse.* ■ Non esiste un unico centro comune a tutti gli orbi ovvero sfere celesti.

*Secunda petitio:*

*Centrum terrae non esse centrum mundi, sed tantum gravitatis et orbis Lunarisis.* Il centro della Terra non coincide col centro del mondo, ma solo con quello della gravità e dell’orbe della Luna.

*Tertia petitio:*

*Omnes orbis ambire Solem, tanquam in medio omnium existentem, ideoque circa Solem esse centrum mundi.* Tutti gli orbi girano intorno al Sole, in quanto esso si colloca in mezzo a tutti, e dunque il centro del mondo si trova in prossimità del Sole.

*Quarta petitio:*

*Minorem esse comparationem distantiarum Solis et terrae ad altitudinem firmamenti, quam semidimetientis terrae ad distantiam Solis, adeo ut sit ad summitatem firmamenti insensibilis.* Il rapporto tra la distanza tra Sole e Terra e l’altezza del firmamento è più piccolo di quello tra il semidiametro della Terra e la distanza del Sole, tanto che quest’ultima è trascurabile rispetto al sommo del firmamento.

*Quinta petitio:*

*Quicquid ex motu apparet in firmamento, non esse ex parte ipsius, sed terrae. Terra igitur cum proximis elementis motu diurno tota convertitur in polis suis invariabilibus firmamento immobili permanente ac ultimo caelo.*

*Sexta petitio:*

*Quicquid nobis ex motibus circa Solem apparet, non esse occasione ipsius, sed telluris et nostri orbis, cum quo circa Solem volvitur ceu aliquo alio sidere, sicque terram pluribus motibus ferri.*

*Septima petitio:*

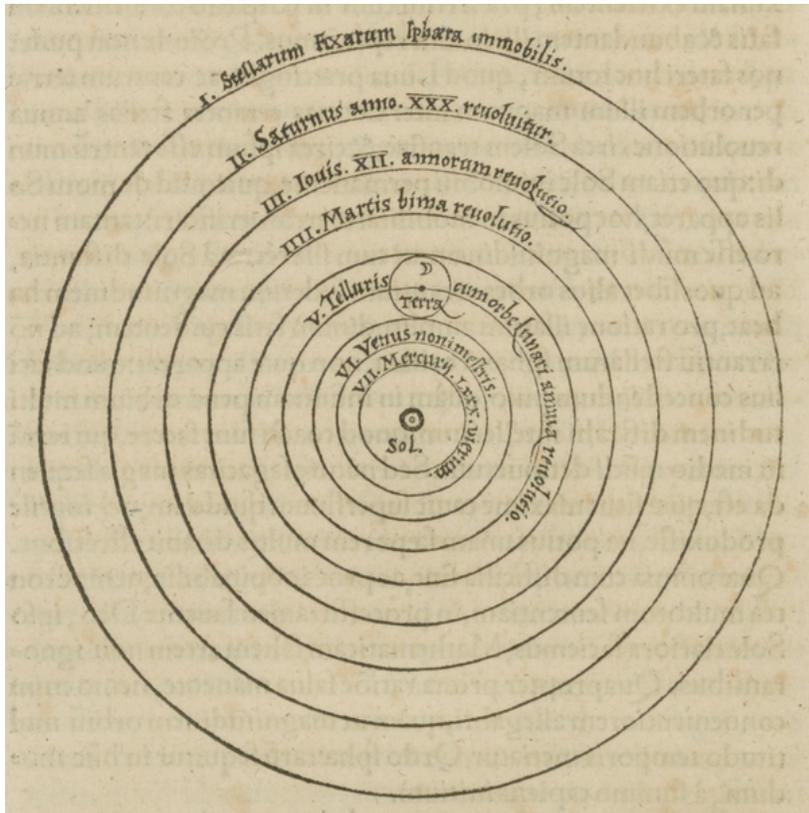
*Quod apparet in erraticis retrocessio ac progressus, non esse ex parte ipsarum sed telluris. Huius igitur solius motus tot apparentibus in caelo diversitatibus sufficit.*

Qualunque movimento apparente si osservi nel firmamento non compete a esso, ma alla Terra. Pertanto la Terra, unitamente agli elementi a essa vicini, ruota tutta insieme intorno ai suoi poli fissi, mentre il firmamento resta immobile come ultimo cielo.

Tutto ciò che osserviamo come moto apparente del Sole non è dovuto a esso, ma al moto della Terra e del nostro orbe, col quale noi, come ogni altro pianeta, giriamo intorno al Sole, sicché la terra è soggetta a più movimenti.

Ciò che ci appare come moto retrogrado e diretto dei corpi erranti non è dovuto a essi, ma al moto della Terra. Questo solo movimento basta a spiegare tutte le apparenze e le varietà di moti che osserviamo nel cielo.

(Copernico: *Commentariolus*).



### 1.2.2 Il sistema eliocentrico di Copernico

- L'ordine delle sfere
  - Mantiene le sfere come oggetti materiali, ma non sono più omocentriche.
  - Il Sole resta fisso in mezzo alle sfere: *Sole medio*.
  - Il cielo delle stelle fisse è fermo, ed è la sfera più esterna.
  - Le sfere dei pianeti sono collocate, procedendo verso l'interno, in ordine *decrecente* di velocità: Saturno, Giove, Marte, Terra con la Luna, Venere, Mercurio.
  - Con una coppia di epicicli si descrive il moto rispetto all'equante.
- I moti della Terra:
  - *Rotazione*: la vediamo come moto diurno delle Stelle e del Sole.
  - *Rivoluzione*: la vediamo come moto annuo del Sole, e spiega anche i moti retrogradi dei pianeti.
  - *Declinazione*: moto conico dell'asse, quasi sincrono alla rivoluzione; spiega le stagioni.
  - Il non perfetto sincronismo di declinazione e rivoluzione spiega la precessione degli equinozi.

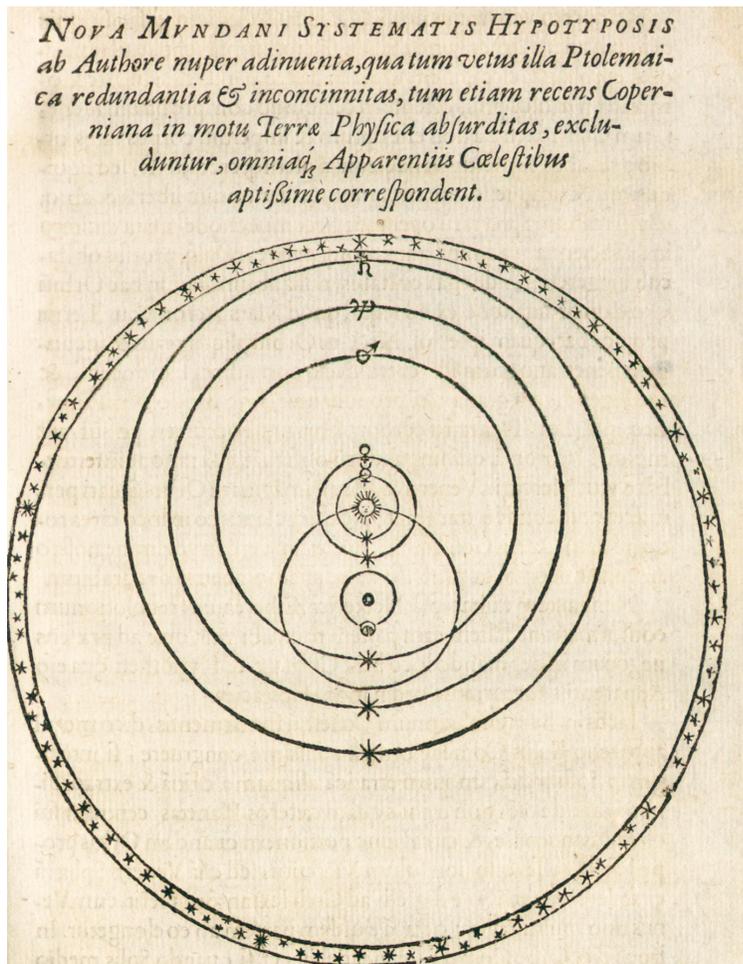
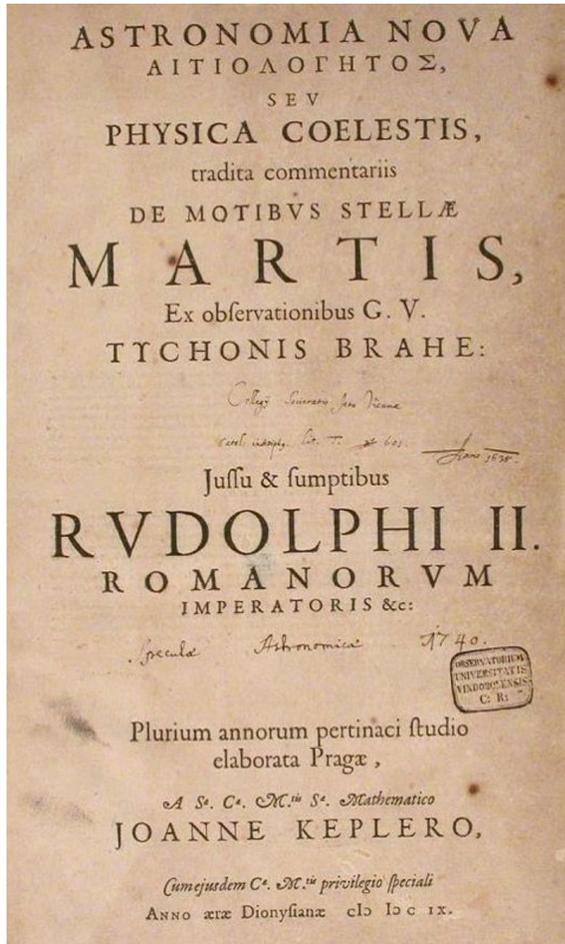


Figura da: *De mundi ætherei recentioribus phænomenis.*

### 1.2.3 Il sistema di Tycho Brahe

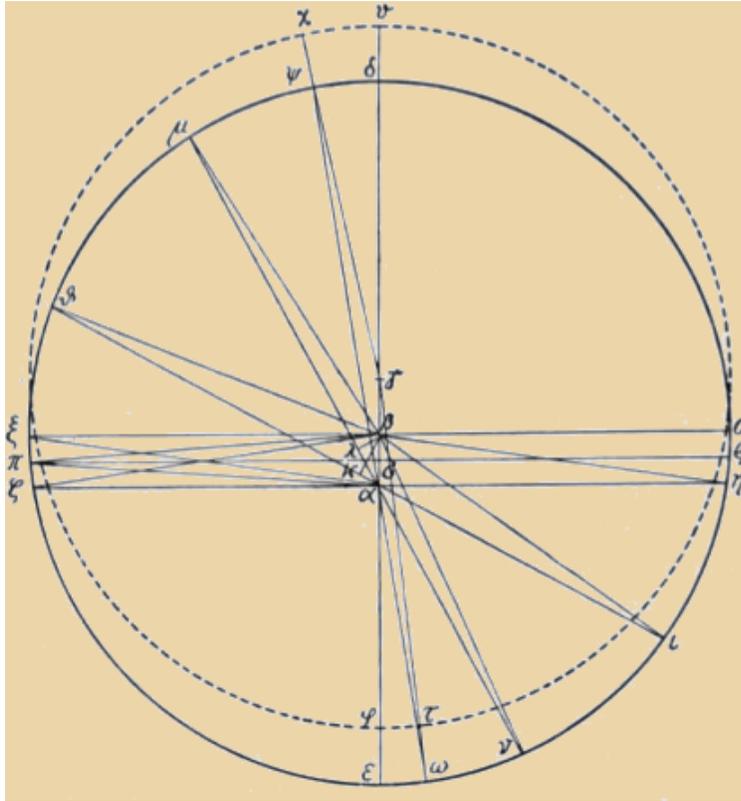
- Il mondo come realmente lo vediamo:
  - La Terra è fissa al centro dell'universo.
  - La Luna e il Sole girano attorno alla Terra.
  - Tutti gli altri pianeti girano attorno al Sole.
- La rimozione delle sfere materiali.
  - Una cometa molto brillante osservata nel 1577.
  - La cometa è oltre la sfera della Luna, e la sua orbita interseca la sfera di Venere.
  - Le osservazioni del 1582 mostrano che la distanza di Marte all'opposizione è inferiore alla distanza della Terra dal Sole.
  - La sfera di Marte dovrebbe intersecare quella del Sole.
- Le osservazioni.
  - Costruisce una serie di nuovi strumenti di grande precisione (per il suo tempo).
  - Riduce l'errore di osservazione da circa 10' (osservazioni visuali) a circa 1' o 2'.
- Le *Tabulæ Rudolphinæ*.
  - Progetta e inizia il lavoro di calcolo di nuove tavole astronomiche (1572).
  - Nel 1600 chiama Keplero a collaborare alla compilazione.
  - Keplero completa il calcolo nel 1623.



### 1.3 Le leggi di Keplero

- Confronto tra Tolomeo, Copernico e Tycho Brahe.
  - I tre modelli sono sostanzialmente equivalenti.
  - Per ragioni *fisiche*, meglio il modello di Copernico, con alcune varianti.
  - Non esistono le sfere solide (come per Tycho Brahe).
  - *Le orbite sono piane*, e il piano passa per il Sole: metà della *prima legge*.
  - *Ad imitationem veterum*: usa un equante invece del doppio epiciclo di Copernico: geometricamente più comodo; ◦ ma l'equante non ha giustificazione fisica.
- L'orbita della Terra.
  - *Bisezione dell'eccentricità*: la Terra ha un equante, come tutti gli altri pianeti, simmetrico alla posizione del Sole.
  - *Vicarious hypothesis*: il rapporto 8 : 5 tra le distanze di Sole ed equante dal centro fornisce gli angoli corretti, ma *le distanze non tornano*.
- Domanda:

*Come nascono le leggi di Keplero?*



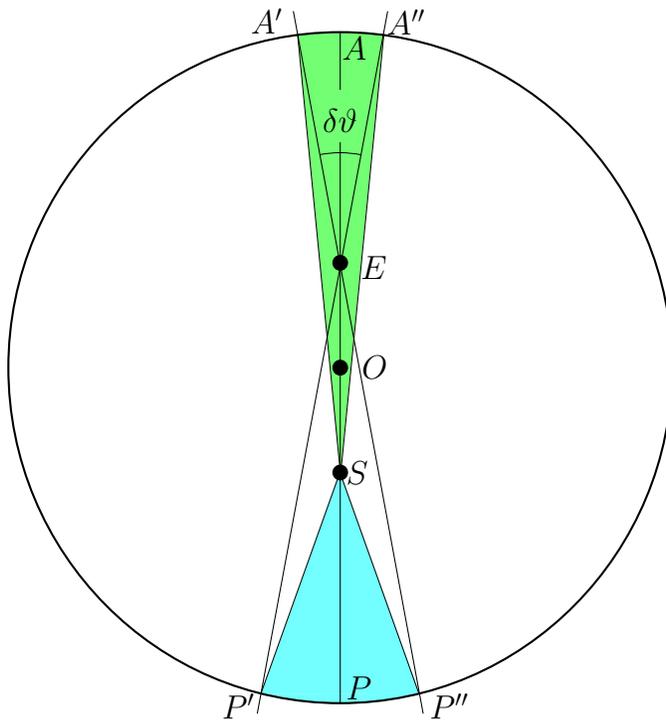
*Primum sciat in omni hypothesis Ptolemaica hac forma instructa, quantacunque eccentricitas fuerit, celeritatem in perihelio & tarditatem in aphelio proportionari quam proxime lineis ex centro mundi eductis in Planetam.*

*(Astronomia Nova, ch. XXXII)*

Anzitutto (il lettore) deve riconoscere che in qualunque ipotesi che si ispiri al modello Tolemaico, indipendentemente dal valore dell'eccentricità, la rapidità al perielio e la lentezza all'afelio sono sensibilmente proporzionali alle linee condotte dal centro del mondo al Pianeta.

### 1.3.1 In cammino verso la seconda legge

- Problema:
  - Assumiamo l'orbita della Terra circolare, con bisezione dell'eccentricità.
  - Rendere quantitativa l'affermazione che la velocità al perielio è maggiore di quella all'afelio.
- Due affermazioni equivalenti, vere *quam proxime*:
  - Il tempo (*mora*) speso su archi eguali è proporzionale alla distanza dal Sole.
  - la velocità all'afelio e al perielio è inversamente proporzionale alla distanza dal Sole.
- Nota: *qui Keplero non parla di aree.*



- Una dimostrazione semplificata, usando le aree.
  - Simboli:  $S$ , Sole;  $O$ : centro dell'orbita;  $E$ : punto equante;  $P$ : perielio;  $A$ : afelio.
  - Qualche calcolo:

$$|OA| = |OP| = a ,$$

$$|OS| = |OE| = ea ,$$

$$|SP| = |EA| = (1 - e)a ,$$

$$|SA| = |EP| = (1 + e)a ,$$

$$|A'A''| = (1 - e)a\delta\vartheta ,$$

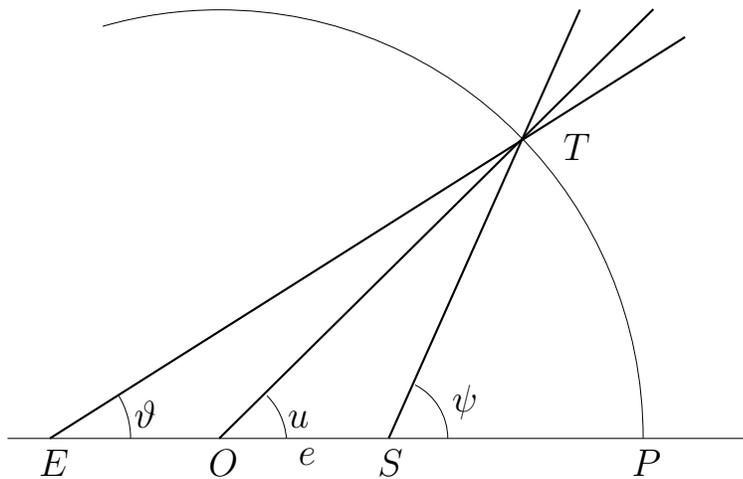
$$|P'P''| = (1 + e)a\delta\vartheta .$$

$$\left. \begin{aligned} \text{area}(SP'P'') &= \frac{1}{2}|P'P''| \cdot |SP| \\ \text{area}(SA'A'') &= \frac{1}{2}|A'A''| \cdot |SA| \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2}(1 - e)(1 + e)a^2\delta\vartheta .$$

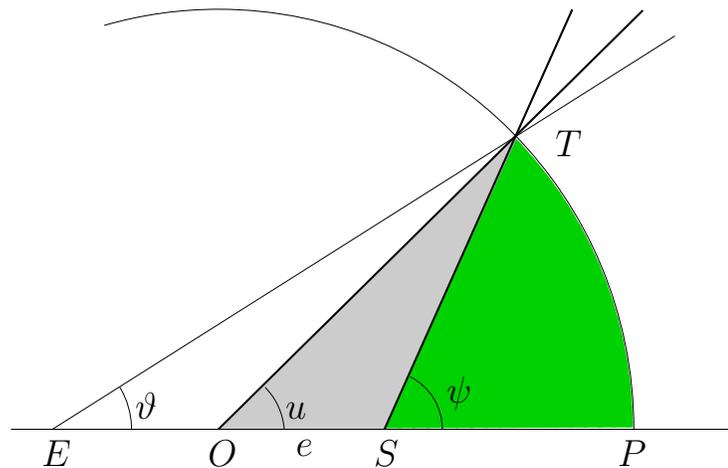
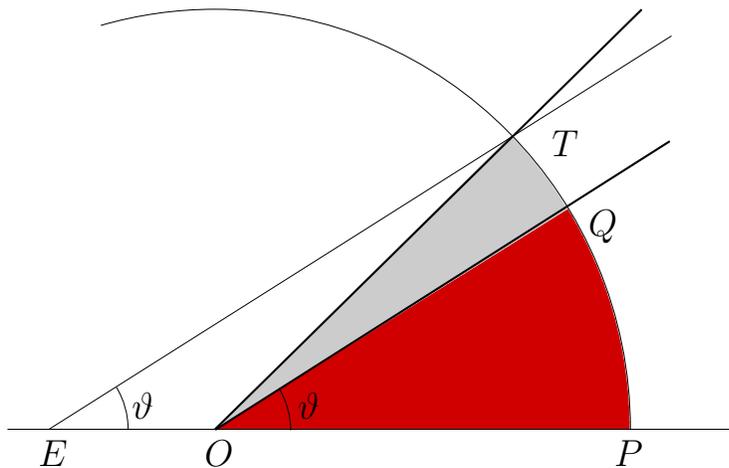
- L'argomento è perfetto per gli apsi, ma solo approssimato per gli altri punti.
- La tesi di Keplero si ricava come segue: posto  $\delta s = r \delta\varphi$  si calcola

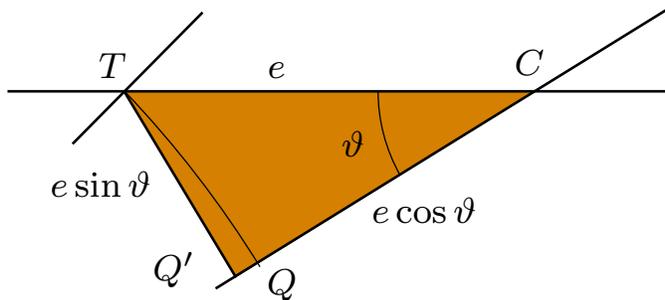
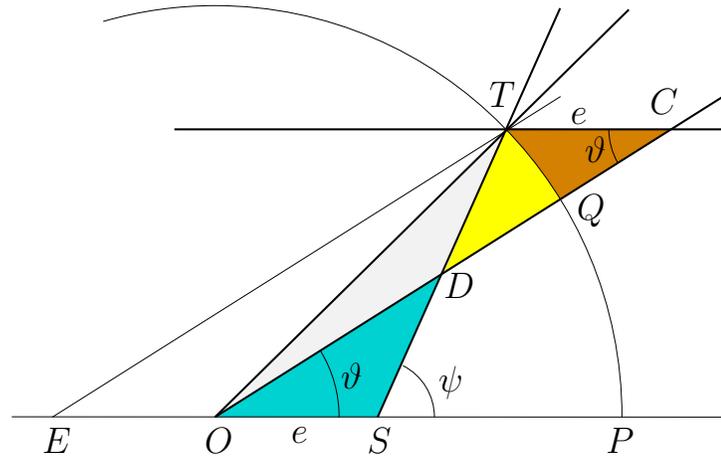
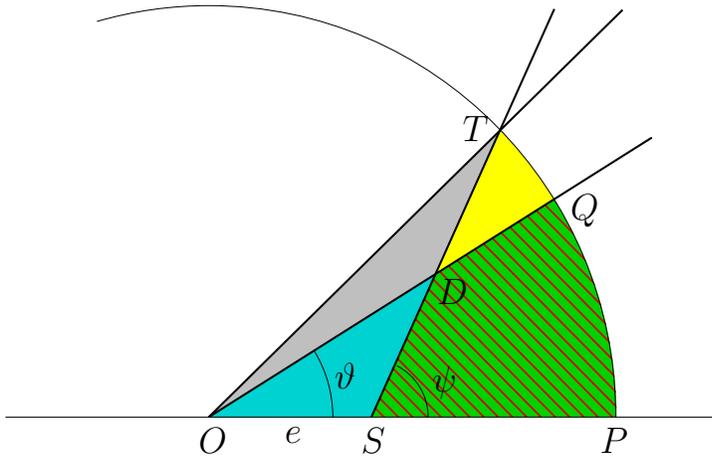
$$\frac{\delta s}{\delta t} = \frac{1}{r} \quad \text{oppure} \quad \delta t = r \delta s .$$

- Keplero ricorre alla somma di piccole aree al fine di calcolare l'*anomalia media*.
  - L'introduzione dell'area è giustificata da una lunga discussione: *Astronomia Nova*, ch. L.



- Più in generale:
  - Simboli:  $S$ : Sole;  $O$ : centro dell'orbita;  $E$ : equante;  $T$ : Terra, o altro pianeta;  $P$ : perielio;  $\psi$ : anomalia vera;  $u$ : anomalia eccentrica;  $\vartheta$ : anomalia dell'equante, che misura il tempo.
- Trasla  $ET$  in  $OQ$ ;
  - $\text{area}(OPQ)$  (rossa) evolve uniformemente nel tempo;
  - $\text{area}(SPT)$  (verde) è l'area spazzata dal raggio congiungente  $S$  con  $T$ ;
- Problema: confrontare l'area rossa con la verde.

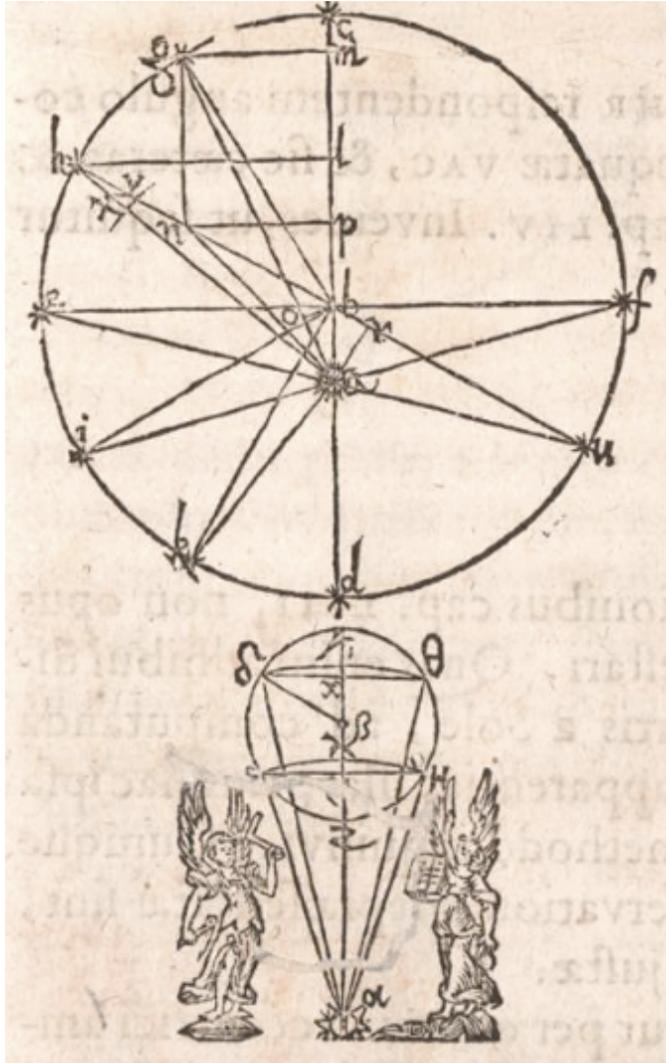




- Basta confrontare  $\text{area}(DSO)$  (azzurro) con  $\text{area}(DTQ)$  (giallo);
  - traccia la retta  $TC \parallel OP$ ;
  - $|TC| = |OS| = e$ ;
  - ricava  $\text{area}(DSO) = \text{area}(DTC)$ ;
  - traccia il segmento  $TQ' \perp CQ$ ;
  - ricava  $\text{area}(TQC) = \text{area}(TQ'C) + \mathcal{O}(e^3)$ ;
  - $\text{area}(DSO) - \text{area}(DTQ) \sim \frac{e^2 \sin 2\vartheta}{4}$ .
- Conclusione:

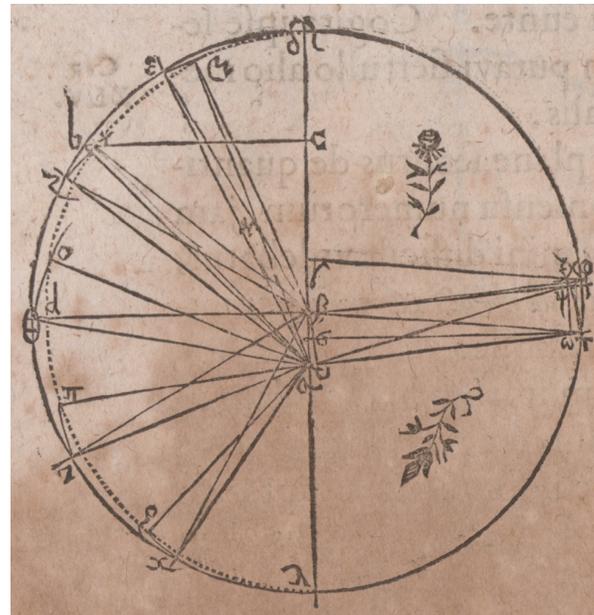
$$|\text{area}(SPT) - \text{area}(OPQ)| \sim \frac{e^2 \sin 2\vartheta}{4}.$$

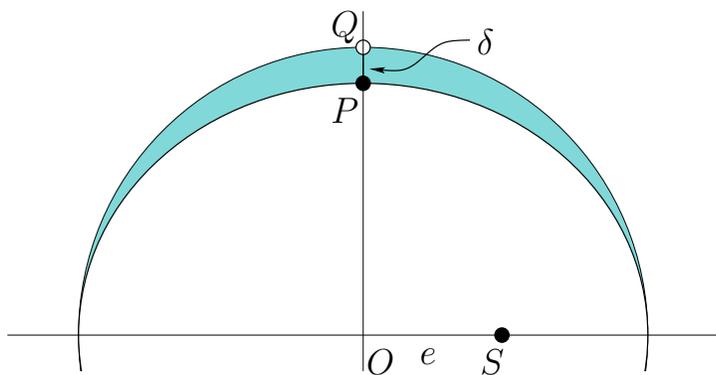
Enunciato della seconda legge in termini di area: Newton, *Principia*, sect. II, Prop. I theorem I.



### 1.3.2 L'orbita ellittica di Marte

- L'orbita di Marte, qualificato come *inobservabile sidus*:
  - il metodo degli equanti dà gli angoli corretti;
  - ma le distanze dal Sole non si accordano con le osservazioni di Tycho Brahe.
- L'orbita sembra avere una forma ovale:
  - lo spostamento del pianeta dal cerchio suggerisce un'oscillazione lungo il diametro di un epicyclo;
  - difficile attribuirlo a una causa *fisica*.
  - tra i cerchi e l'orbita si forma una *lunula*.



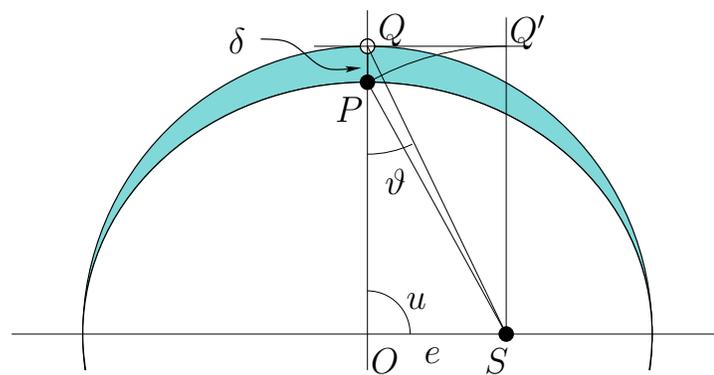


*Cum igitur duobus argumentis (...) non obscure colligerem, lunulæ illius latitudinem dimidiam tantum assumendam, scilicet 429, correctius 432, (...); cœpi de causis & modo cogitare, quibus tantæ latitudinis lunula rescinderetur.*

*Qua in cogitatione dum versor anxie, ... forte fortuito incido in secantem anguli  $5^{\circ}18'$  quæ est mensura æquationis Opticæ maximæ. Quem cum viderem esse 100429, hic quasi e somno expergefactus, & novam lucem intuitus, sic cœpi ratiocinari.*

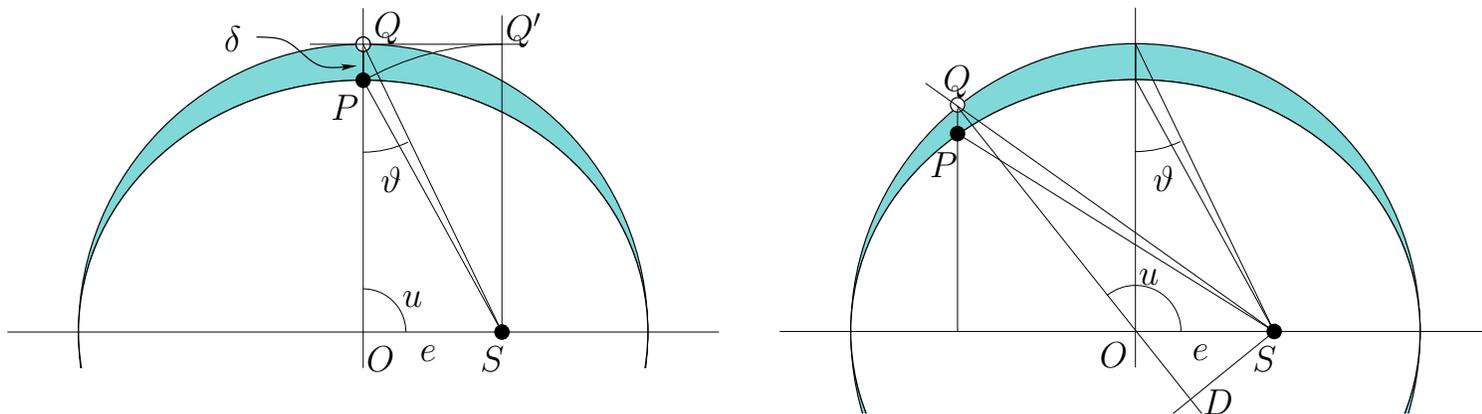
Per Marte: equazione ottica  $\vartheta \simeq 5^{\circ}18'$ ; ampiezza della lunula  $\delta \simeq 0.00429$ ).

(*Astronomia Nova*, ch. LVI)



Così, avendo concluso sulla base di due argomenti che l'ampiezza di quella lunula debba essere dimezzata, ossia posta 429, o più correttamente 432, (...); cominciai a riflettere su come e perché si debba sottrarre una lunula così ampia.

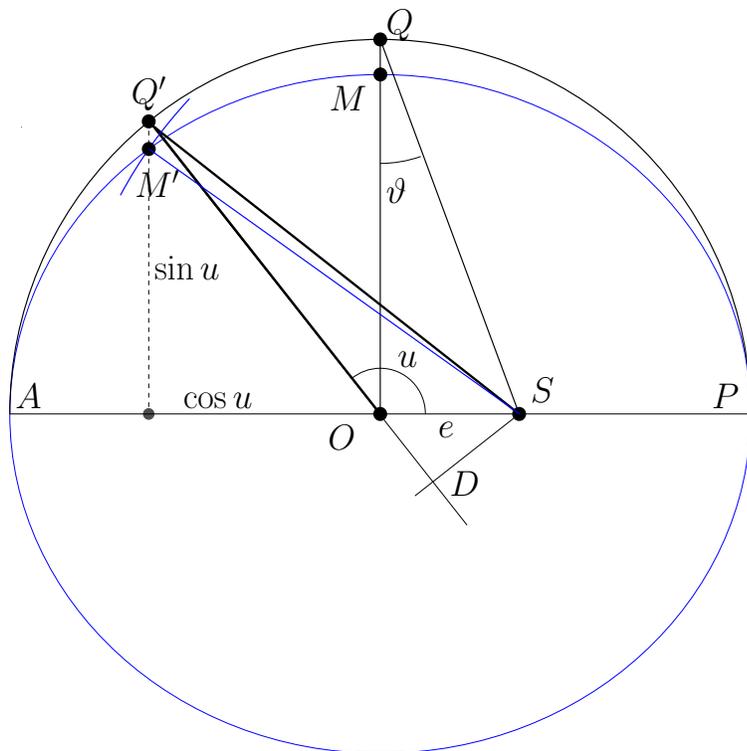
Mentre mi arrovello con ansia in quella riflessione, per puro caso mi cade l'occhio sulla secante dell'angolo  $5^{\circ}18'$ , che è l'ampiezza massima dell'equazione ottica. Quando vidi che era 100429, fu come risvegliarmi improvvisamente dal sonno e vedere una nuova luce; e presi a ragionare così.



*In longitudinibus mediis, æquationis pars Optica fit maxima. In longitudinibus mediis lunula seu curtatio distantiarum est maxima, etque tanta, quantus est excessus secantis æquationis opticae maximæ 100429 supra radius 100000. Ergo si pro secante usurpetur radius in longitudine media, efficitur id, quod suadent observationes. Et in schemate cap. XL conclusi generaliter, si pro HA usurpes HR, pro VA vero VR, & pro EA substituas EB, & sic in omnibus, fiet idem in locis cæteris eccentrici, quod hic factum est in longitudinibus mediis.*

In corrispondenza ai valori medi delle longitudini la parte ottica dell'equazione raggiunge il suo massimo. Sempre alle longitudini medie l'ampiezza della lunula, e dunque l'accorciamento delle distanze, è anch'essa massima, e vale quanto l'eccesso della secante dell'equazione ottica 100429 rispetto al raggio 100000. Dunque, se per la longitudine media si sostituisce il raggio al posto della secante si ottiene quello che risulta dalle osservazioni. Allora, seguendo la traccia del capitolo XL, sono giunto alla seguente conclusione generale : se al posto di HA prendi HR, al posto di VA prendi VR e al posto di EA sostituisci EB, e così ovunque, allora negli altri punti del cerchio eccentrico si verificherà la stessa cosa che accade qui per le longitudini medie.

(Il testo si riferisce alla figura di Keplero, pag. 14. Qui si deve leggere: avendo fissato  $|SP| = |QD|$ , traccia l'arco con centro in S e raggio QD, poi sostituisci Q con P).

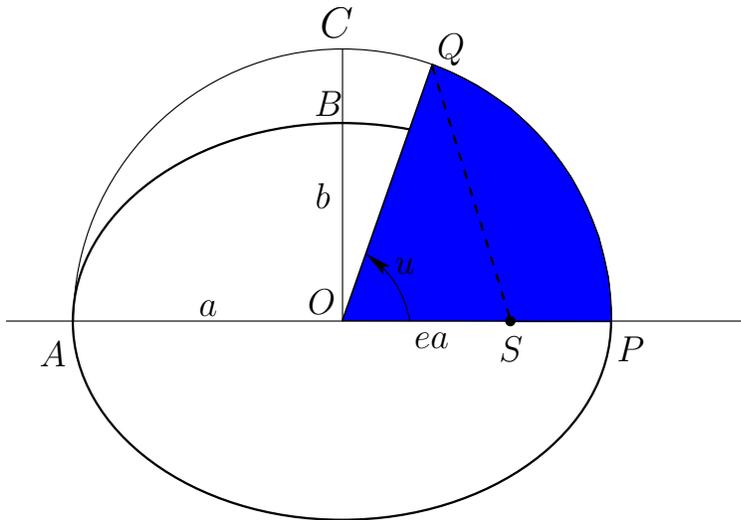


### 1.3.3 La prima legge di Keplero

- Svolgiamo il calcolo dell'orbita facendo uso di coordinate cartesiane.
  - $O$  è l'origine; la linea degli apsi, ovvero la retta  $AP$ , è l'asse  $x$ ;
  - $S$  è il Sole;  $Q, Q'$  sono due posizioni apparenti di Marte sul cerchio;
  - $M, M'$  sono due posizioni vere di Marte;
  - $u$  è l'anomalia eccentrica;
- Calcola:
  - $SQ' = (\cos u - e, \sin u)$ ;
  - $OQ' = (\cos u, \sin u)$ ;
  - $|DQ'| = 1 - e \cos u$  (prodotto scalare tra  $OQ'$  e  $SQ'$ );
- Seguendo Keplero:
  - sia  $a = |OP|$  il semiasse maggiore;
  - fissiamo  $u$ , anomalia eccentrica di  $Q'$ ;
  - tracciamo l'arco di raggio  $r = |DQ'|$ ;
  - troviamo l'intersezione  $M'$  con la perpendicolare da  $Q'$  alla retta  $AP$ .
  - Concludiamo

$$r = a(1 - e \cos u) ,$$

**Questa è l'equazione dell'ellisse.**



1.3.4 Il calcolo della posizione del pianeta sull'orbita ellittica

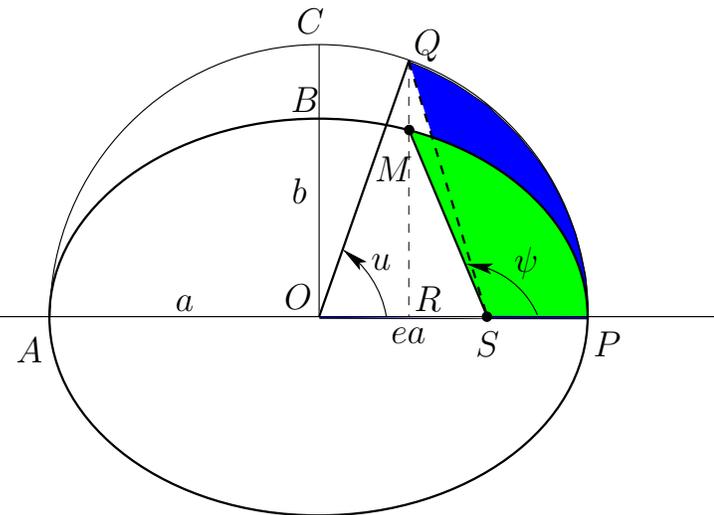
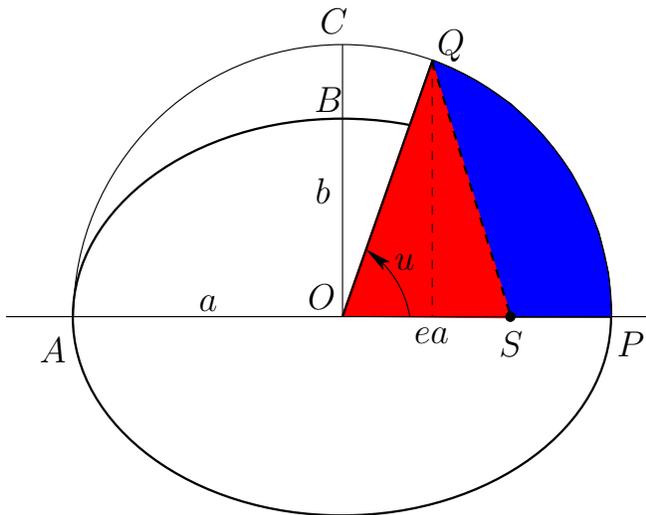
$$\text{area}(OQP) = \frac{1}{2} a^2 u ;$$

$$\text{area}(SPQ) = \frac{1}{2} a^2 u - \frac{1}{2} a^2 e \sin u ;$$

$$\text{area}(SPM) = \frac{b}{a} \left( \frac{1}{2} a^2 u - \frac{1}{2} a^2 e \sin u \right) = \frac{\pi ab}{T} t ;$$

**Equazione di Keplero:**

$$u - e \sin u = \ell , \quad \ell = \frac{2\pi}{T} t : \quad \text{anomalia media .}$$



- Keplero ammette di non saper risolvere l'equazione.
  - Suggestisce ai geometri il problema seguente:

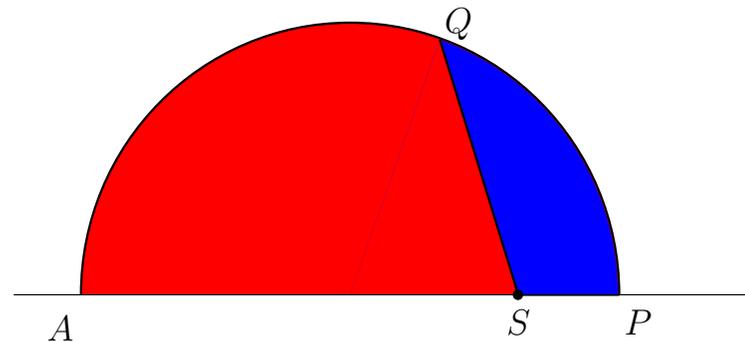
*Data area partis semicirculi, datoque puncto diametri, invenire arcum, & angulum ad illud punctum: cujus anguli cruribus, & quo arcu, data area comprehenditur. Vel: Aream semicirculi ex quocunque puncto diametri in data ratione secare. Mihi sufficit credere, solvi a priori non posse propter arcus & sinus ἑτερογένειαν. Erranti mihi, quicunque viam monstraverit, is erit mihi magnus Apollonius.*

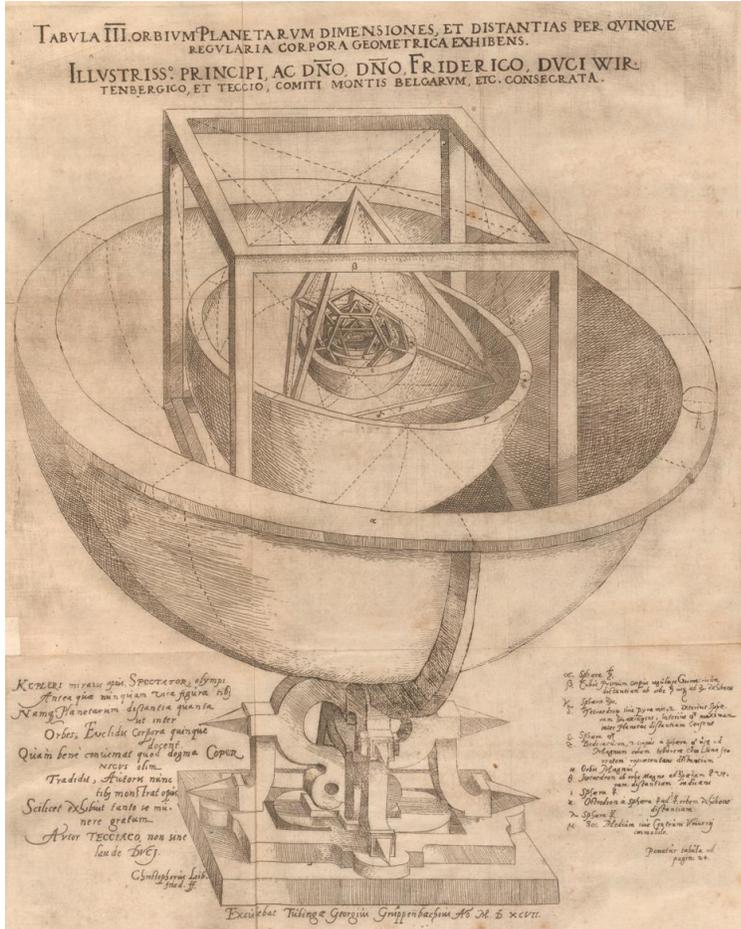
(Astronomia Nova, ch. LX.)

Assegnata l'area di una parte del semicerchio e un punto del diametro, trovare l'arco e l'angolo con un vertice in quel punto tali che l'arco e i lati dell'angolo comprendano l'area assegnata. Ovvero: dividere l'area del semicerchio in un rapporto assegnato a partire da un punto del diametro.

A me basta credere che la soluzione sia a priori impossibile, perché l'arco e il seno sono di genere diverso. Io sto vagando senza meta, e se qualcuno saprà indicarmi la via, egli sarà ai miei occhi un grande Apollonio.”

- L'equazione è stata risolta da Lagrange (1771).





### 1.3.5 La perfezione del mondo

- Alla scoperta del piano divino nella creazione.
  - *Mysterium Cosmographicum* (1596): le orbite dei pianeti e i solidi platonici (a sinistra).

... anni di lavoro ...

- *Harmonice Mundi* (1619): la musica dei pianeti in onore del Creatore (sotto).



### 1.3.6 La terza legge di Keplero

*Hactenus egimus de diversis moris vel arcubus unius et eiusdem Planetæ. Jam etiam de binorum Planetarum motibus inter se comparatis agendum. (...)*

*Rursum igitur hic aliqua pars mei Mysteriorum Cosmographici, suspensa ante 22 annos, quia nondum liquebat, absolvenda et huc inferenda est. Inventis enim veris orbium intervallis per observationes Brahei, plurimi temporis labore continuo, tandem, tandem genuina proportio temporum periodicorum at proportionem orbium —*

*sera quidem respexit inertem,*

*Respexit tamen et longo post tempore venit;(\*)*

*eaquem si temporis articulos petis, 8 Mart. hujus anni millesimi sexcentissimi decimi octavi animo concepta, sed infeliciter ad calculos vocata, eoque pro falsa rejecta, denique 15 Maji reversa, novo capto impetu expugnavit mentis meae tenebras, tanta comprobatione et laboris mei septendecennalis in observationibus Braheanis et meditationis hujus in unum conspirantibus, ut somniare me et præsumere quæsitum inter principia primo crederem.*

Fin qui abbiamo preso in considerazione gli archi e i tempi di un singolo pianeta. Ora dobbiamo procedere al confronto dei movimenti di coppie di pianeti. (...)

Pertanto diventa possibile portare a compimento un'altra parte del mio *Mistero Cosmografico*, sospesa ventidue anni fa perché non ancora matura. Infatti, sfruttando le osservazioni di Brahe, ho calcolato i veri intervalli delle orbite, e grazie a un lavoro lungo e impegnativo finalmente, finalmente la proporzione genuina tra periodi e dimensione delle orbite —

*tardi mi vide, ormai privo di forze,*

*ma volse a me lo sguardo e dopo tanto tempo venne;*

e se vuoi sapere esattamente quando, la prima idea fu concepita il giorno 8 marzo di quest'anno 1618, ma la rigettai a causa di un calcolo mal impostato. In seguito si ripresentò il 15 maggio, e acquisita maggior forza espugnò le tenebre della mia mente, con la complicità e il sostegno dei diciassette anni di fatiche, spesi nella meditazione sulle osservazioni di Brahe, sicché mi sembrò di sognare, e mi convinsi ad assegnare alla mia scoperta il valore di un principio primo.

(\*) Publius Vergilius Maro: *Bucolica*, Ecloga I.

*Sed res est certissima exactissimaque, quod **proportio quæ est inter binorum quorumcunque Planetarum tempora periodica, sit præcise sesquialtera proportionis mediarum distantiarum, id est orbium ipsorum**; attento tamen hoc, quod medium arithmeticum inter utramque diametrum ellipticæ orbitæ sit paulo minus longiore diametro. Itaque si quis ex periodo, verbi causa Telluris, quæ est annus unus, et ex periodo Saturni triginta annorum, sumserit tertiam proportionis partem, id est, radices cubicas, et huius proportionis duplum fecerit, radicibus quadrate multiplicatis, is habet in prodeuntibus numeris intervallorum Terræ et Saturni a Sole mediorum proportionem justissimam. Nam cubica radix de 1 est 1, ejus quadratum 1. Et cubica radix de 30 est major quam 3, eius igitur quadratum majus quam 9. Et Saturnus mediocriter distans a Sole, paulo altior est noneuplo mediocris distantia Telluris a Sole.*

(Harmonices Mundi Libri V, Liber V, Caput III.)

**Il piano perfetto di Dio nella creazione è stato rivelato!**

*... ma è proprio vero? ...*

(†) *sesquialterum*: contrazione di *unum semisque alterum*, cioè uno più una metà; quindi  $3/2$ .

Ma è verità assolutamente certa ed esatta che la *proporzione tra i periodi di due pianeti comunque scelti è precisamente la sesquialtera*<sup>(†)</sup> *della proporzione tra le loro distanze medie, ossia le dimensioni delle loro orbite*; ciò in considerazione del fatto che la media aritmetica tra i due diametri dell'orbita ellittica è di poco inferiore al diametro maggiore. Così se si considera ad esempio il periodo della Terra, che è un anno, e quello di di Saturno di 30 anni e se ne calcola la terza parte proporzionale, ovvero la radice cubica, e poi si raddoppia questa proporzione, ossia se ne fa il quadrato, i numeri che risultano daranno esattamente la proporzione tra le distanze medie della Terra e di Saturno dal Sole. Infatti la radice cubica di 1 è 1, mentre la radice cubica di 30 è di poco superiore a 3 e il suo quadrato è maggiore di 9. E la distanza media di Saturno dal Sole è di poco superiore a nove volte la distanza media della Terra dal Sole.

## 1.4 Le “Tabulæ Rudolphinæ

- Le date:
  - Il progetto di Tycho Brahe (a 17 anni) nel 1564;
  - Inizio della compilazione nel 1572;
  - Nel 1600 ha inizio la collaborazione di Keplero;
  - Tycho Brahe muore nel 1601;
  - Keplero completa la compilazione nel 1623;
  - La stampa viene completata nel 1627.

*Et de certitudine quidem calculi testabuntur observationes præsentium temporum, imprimis Braheanæ; de futuris vero temporibus plura præsumere non possumus, quam vel observationes veterum, quibus usus sum, vel ipsa motuum mediorum conditio, nondum penitus explorata, concursusque causarum physicarum præstare possunt, cum observationes Regiomontani et Waltheri testentur, omnino de æquationibus secularibus esse cogitandum, ut singulari libello reddam demonstratum suo tempore; quæ tamen æquationes quales et quantæ sint, ante plurimum sæculorum decursum observationesque eorum, a gente humana definiri nequaquam possunt.*

(*Tabulæ Rudolphinæ*, prefazione)

E l'accuratezza dei nostri calcoli verrà confermata dalle osservazioni raccolte nella nostra epoca, in primo luogo quelle di Brahe; sul futuro però non possiamo nutrire certezze. Le osservazioni degli antichi di cui sono a conoscenza, la determinazione dei moti medi non ancora esplorata a sufficienza e il concorso di diverse cause fisiche possono metterne in discussione la validità. Infatti le osservazioni di Regiomontano e Walther mostrano che si devono prendere in considerazione delle equazioni secolari; lo mostrerò a suo tempo in un apposito libretto. Quante e quali siano quelle equazioni, l'umanità non potrà stabilirlo se non dopo aver accumulato osservazioni per molti secoli.

#### 1.4.1 Osservazioni di Regiomontano e Walther: qualche esempio

Anno 1478, 22 Aug. h. 3 post medium noctis fuerant in una linea ♃ et duo oculi ♃, et erat ♃ occidentalior, distans per medietatem distantia, qua duo oculi distant, ab oculo occidentaliori; sic visui apparuit.

1478, 24 Sept, 40' ante ortum solis vidi lunam circa ♃, quasi coniunctos; distabat Luna modicum ad septentrionem, ita ut inter circumferentiam eius et ♃ videretur mediare spatium unius palmæ.

(...) stella ♃ videbatur inter duas Virginis, quarum lucidior est circa medietatem alæ sinistræ Virginis, alia obscurior circa oculum eius versus Leonem (...).

Magna cum perplexitate diu conflictatus sum, quænam essent hæc duæ stellæ.

#### 1.4.2 Un'osservazione riportata da Tolomeo

(...) a. 82 die 2 Xantichi vesperi, quod ex fide Ptolemæi interpretis fuit ante Chr. anno 229 d. 1 Mart. Tunc ♃ sub australi humero ♃ visus est 2 digitos.

Il 22 agosto dell'anno 1478, tre ore dopo mezzanotte, Giove e i due occhi del Toro erano allineati, e Giove si trovava ad occidente, distante dall'occhio occidentale circa la metà della distanza tra i due occhi. Così mi sembrava.

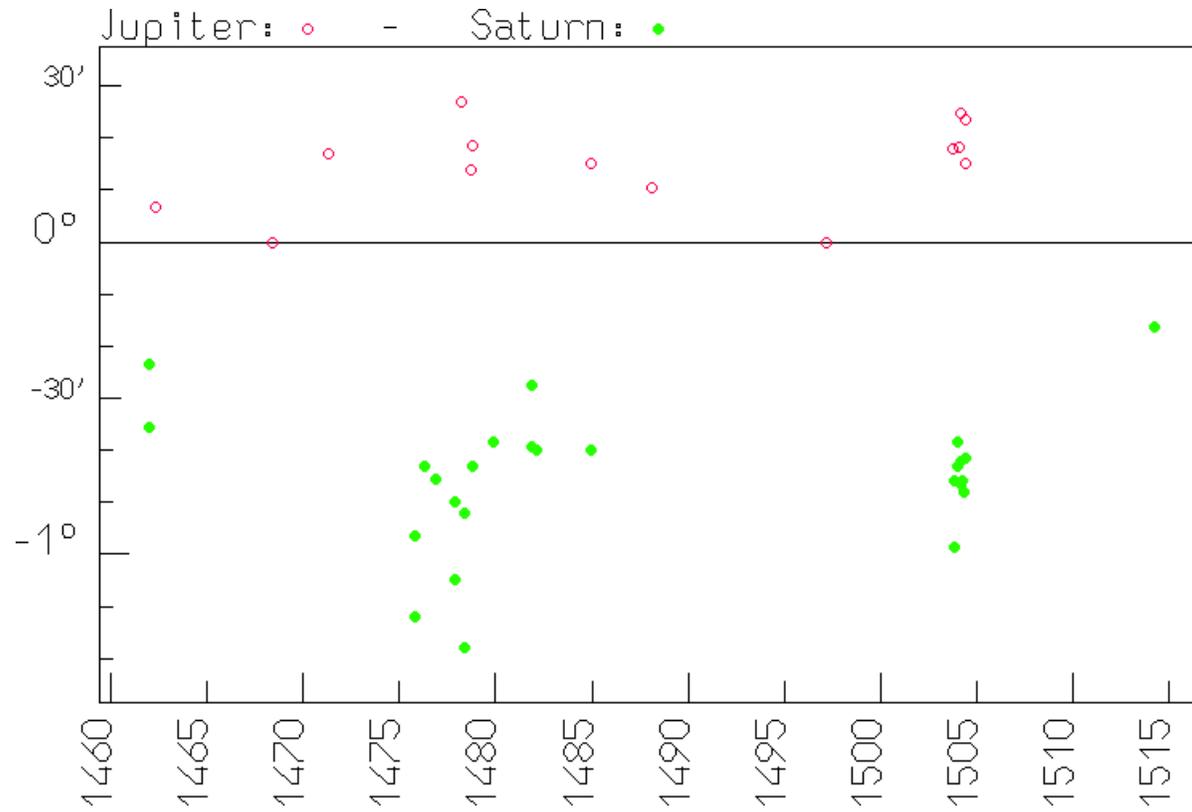
Il 24 settembre del 1478, 40 minuti prima dell'alba, vidi Saturno a la Luna vicini alla congiunzione. La Luna era di poco a nord, e tra la sua circonferenza e Saturno sembrava esserci lo spazio di un palmo.

(...) Si vedeva la stella Giove tra due stelle della Vergine. La più brillante era vicina al centro dell'ala sinistra della Vergine; l'altra, meno brillante, era vicina al suo occhio, dal lato del Leone (...).

A lungo, e con grande perplessità, mi sono arrovellato cercando di immaginare quali fossero quelle due stelle.

(...) alla sera del secondo giorno del mese Xantico dell'anno 82, ossia 1 marzo 229 aC secondo interpreti di Tolomeo. In quell'occasione si vedeva Saturno circa due dita sotto l'ala meridionale della Vergine.

### 1.4.3 Confronto tra i dati osservativi e quelli calcolati per Giove e Saturno



- I dati mostrano che Giove è sempre in anticipo e Saturno sempre in ritardo rispetto alle posizioni calcolate.

#### 1.4.4 Le conclusioni di Keplero

*At cum ex his epochis computarem postea Waltherianas et Regiomontani observationes exque iis appareret clarissime,  $\eta$  motus indigere æquatione seculari, eoque frustra nos medium affectare inter longe distantes, si inter se pugnent, nec in unam certis vicinis observationibus confirmatam commensurationem se cogi patiantur; (...)*

*Nam quod Tychonicum attinet, videor ex oppositionibus acronychiis per totam triacontaëderis periodum jam sentiscere effectum æquationis secularis. Id autem fieri solet non in æquatione maxima, tunc enim quantitas consistit, insensibili existente varietate, sed in æquatione prope nulla, tunc enim desinente adjectoria, incipiente subtractoria, vel e contrario, quantum potest maxima sentitur.*

(Keplero: *Consideratio observationum Regiomontani et Waltheri.*)

- Conclude Keplero: *se vogliamo determinare le equazioni secolari da aggiungere dobbiamo accumulare osservazioni per molti secoli.*

Per di più ho calcolato le osservazioni di Walther e Regiomontano, per la loro epoca, e da esse si vede con chiarezza che Saturno obbedisce a un'equazione secolare. Pertanto è vano insistere a cercare una media tra osservazioni molto distanti nel tempo, se esse sono tra loro in conflitto e non è possibile rappresentarli in una forma confermata da osservazioni affidabili e vicine nel tempo; (...)

Infatti, riguardo all'epoca di Tycho, considerando opposizioni acroniche sull'arco di un intero periodo trentennale di Saturno mi sembra che già si possa percepire l'effetto di un'equazione secolare. Questo però non si vede in prossimità del massimo di quell'equazione, ove la variazione è insensibile, ma in corrispondenza al valore nullo, perché in quest'ultimo caso la correzione da aggiungere all'inizio o da sottrarre in seguito, o viceversa, raggiunge il massimo.

**Abbiamo ancora molto lavoro da fare.**

# 2

## LA NASCITA E LO SVILUPPO DELLA DINAMICA

- La dinamica di Newton.
- La classificazione degli equilibri secondo Poincaré.
- Alcuni modelli classici.
- La dinamica a tempo discreto.

## 2.1 La dinamica di Newton

*Hactenus de modis computandi, quorum post hac frequens est usus. Jam restat, ut, in illustrationem Artis Analyticæ, tradam aliquot Problematum specimina, qualia præsertim natura Curvarum ministrabit. Sed imprimis observandum venit, quod hujusmodi difficultates possunt omnes ad hæc duo tantum Problemata reduci, quæ circa spatium motu locali, utcunque accelerato vel retardato, descriptum ponere licebit.*

*I. Spatii longitudine continuo (sive ad omne tempus) data, Celeritatem Motus ad tempus propositum invenire.*

*II. Celeritate Motus continuo data, longitudinem descripti spatii ad tempus propositum invenire.*

### 2.1.1 Le equazioni differenziali

#### PROBLEMA PRIMUM

*Relatione quantitatum Fluentium inter se data, Fluxionum relationem determinare.*

#### PROBLEMA SECUNDUM

*Exposita æquatione Fluxiones quantitatum involvente relationem quantitatum inter se invenire.*

(Newton: *Principia*)

Quanto esposto fin qui spiega il metodo di calcolo di cui si farà uso frequente in seguito. Ora, ad illustrazione dell'Arte Analitica, tratterò alcuni esempi tipici, che prendono in esame principalmente la natura delle curve. Conviene osservare anzitutto che tutte le difficoltà di questo genere si possono riassumere nei due soli problemi che seguono, e si possono trattare riferendosi allo spazio percorso nel moto locale, accelerato o ritardato.

I. Dato con continuità (ossia ad ogni tempo) lo spazio percorso, trovare la velocità del movimento ad un tempo assegnato.

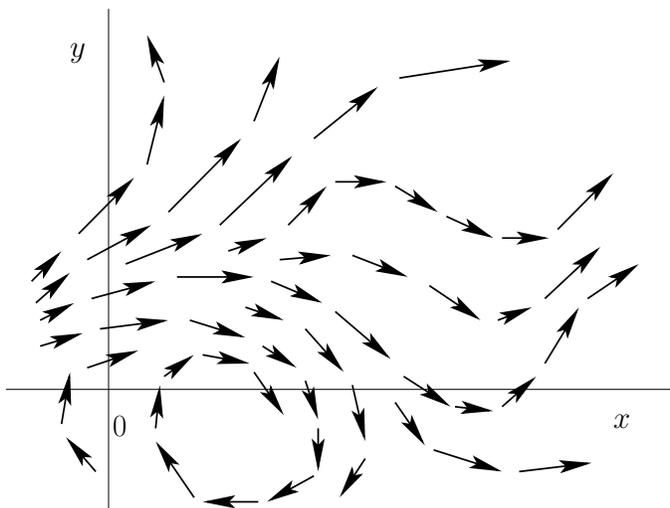
II. Data con continuità la velocità del movimento, trovare lo spazio percorso ad un tempo assegnato.

#### PRIMO PROBLEMA

Assegnata le relazione reciproca tra due quantità fluenti, determinare la relazione tra le flussioni.

#### SECONDO PROBLEMA

Data l'equazione tra le flussioni di due quantità, trovare la relazione reciproca tra le quantità.



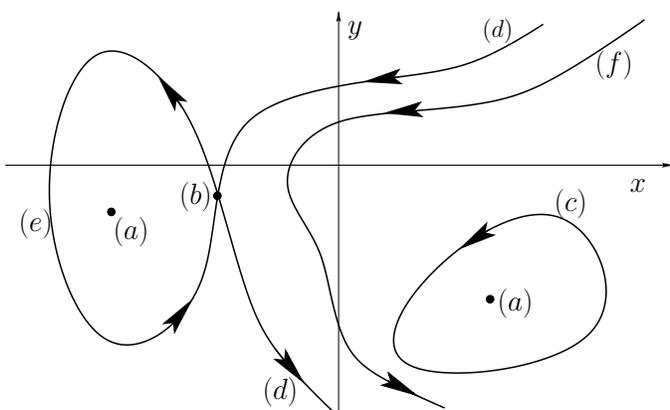
### 2.1.2 Il piano di fase

- Rappresenta lo stato di un sistema descritto da due variabili  $x, y$ .
  - Equazioni

$$\dot{x} = f(x, y) , \quad \dot{y} = g(x, y)$$

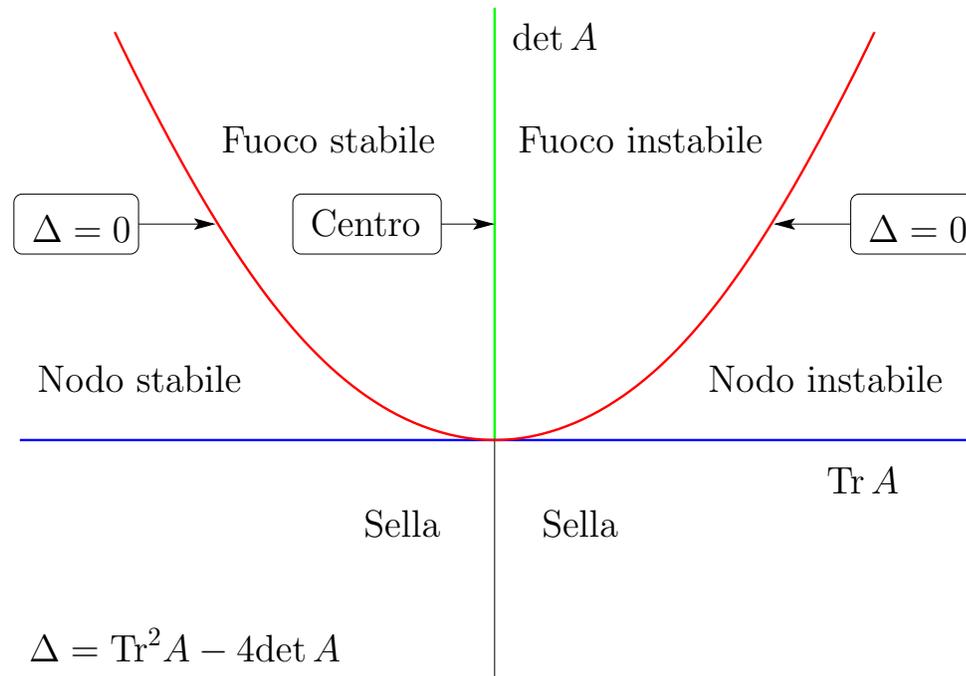
con  $f, g$  regolari quanto serve, caso per caso.

- In ogni punto  $(x, y)$  i secondi membri definiscono un campo vettoriale.
- Problema: *trovare le curve che in ogni punto sono tangenti al campo vettoriale.*



- Il campo vettoriale genera un flusso  $\phi^t$ .
- Diversi tipi di orbite:
  - Punti di equilibrio:  $\phi^t(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y})$ .  
Deve essere  $f(\bar{x}, \bar{y}) = g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ .  
(a) equilibrio stabile;  
(b) equilibrio instabile.
  - Orbite periodiche: (c), (d)  
 $\phi^T(x, y) = (x, y)$  per un fissato  $T > 0$ .
  - Orbite asintotiche a un equilibrio:  
(d) asintotiche a (b) nel passato o nel futuro;  
(e) asintotica a (b) sia nel passato che nel futuro
  - Orbite aperte (f).

## 2.2 La classificazione degli equilibri secondo Poincaré



### 2.2.1 Il diagramma di biforcazione

- Si considera il caso piano.
  - Nell'intorno di un equilibrio si approssimano le equazioni con un sistema lineare

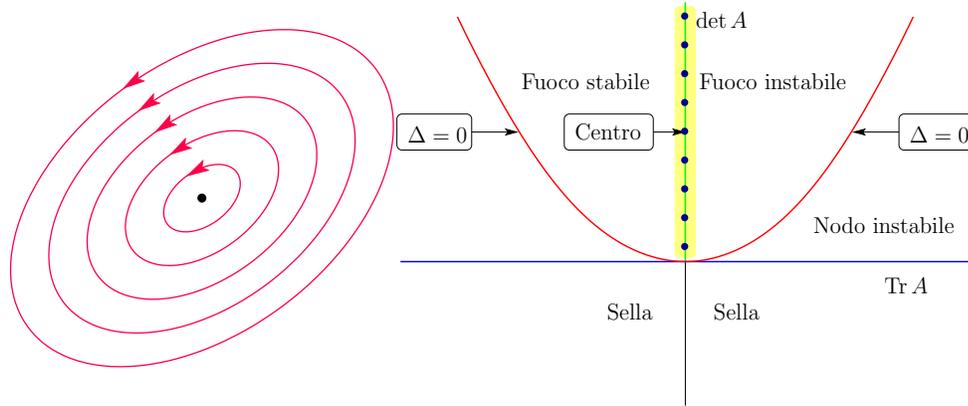
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

- Il comportamento qualitativo locale si determina risolvendo l'equazione caratteristica (detta anche *secolare*)

$$\lambda^2 - \lambda \text{Tr } \mathbf{A} + \det \mathbf{A} = 0 .$$

e determinando gli autovalori.

- Le diverse regioni nel diagramma di biforcazione (figura a lato) individuano i vari comportamenti possibili (pagine successive).

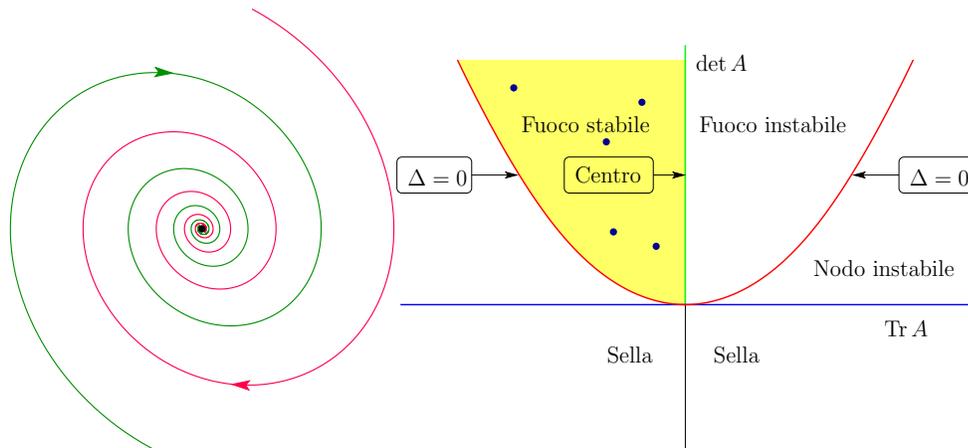


**i. Centro.**

- Autovalori immaginari puri

$$\lambda = \pm i\omega :$$

- le soluzioni sono periodiche, combinazioni di  $\cos \omega t$  e  $\sin \omega t$ .
- nel piano di fase vi sono curve chiuse intorno all'equilibrio.
- L'equilibrio è stabile in approssimazione lineare.

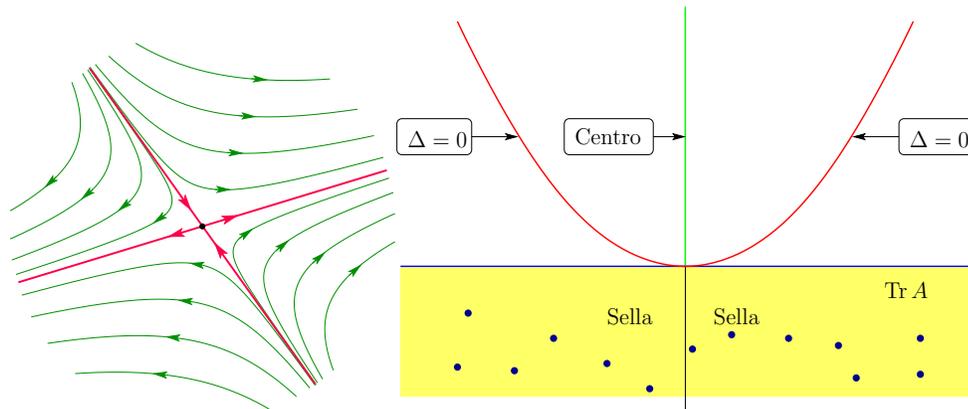


**ii. Fuoco.**

- Autovalori complessi coniugati

$$\lambda = \mu \pm i\omega$$

- le soluzioni sono oscillazioni con ampiezza variabile, combinazioni di  $e^{\mu t} \cos \omega t$  e  $e^{\mu t} \sin \omega t$ ;
- le orbite nel piano di fase sono spirali attorno all'origine.
- L'equilibrio è asintoticamente stabile per  $\mu < 0$ , asintoticamente instabile per  $\mu > 0$ .

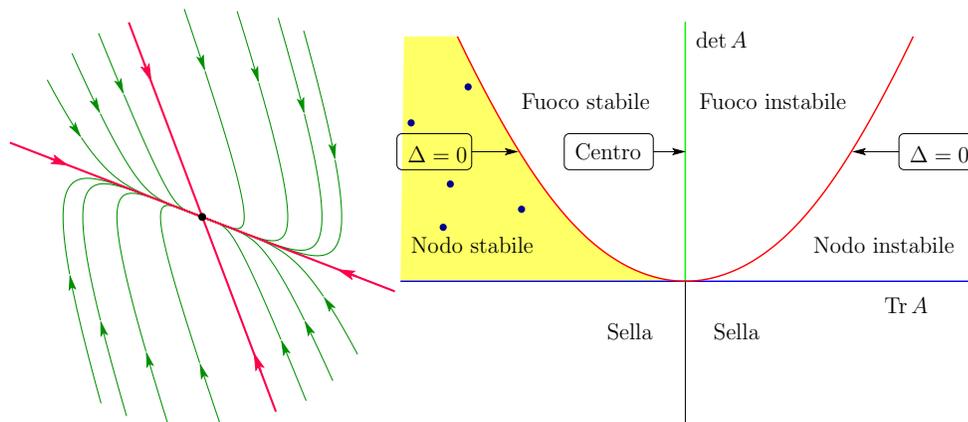


**iii. Sella.**

- o Autovalori reali, non nulli e di segno opposto

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 .$$

- o Le soluzioni sono combinazioni lineari di  $e^{\lambda_1 t}$  e  $e^{\lambda_2 t}$ ;
- o le orbite nel piano di fase hanno forma simile a iperboli.
- o L'equilibrio è instabile.

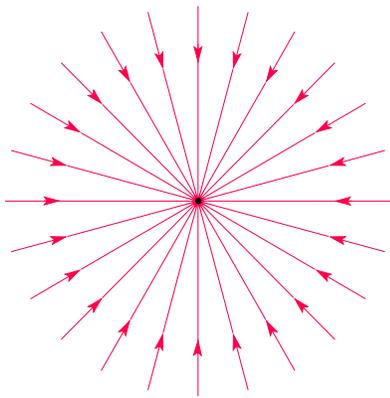
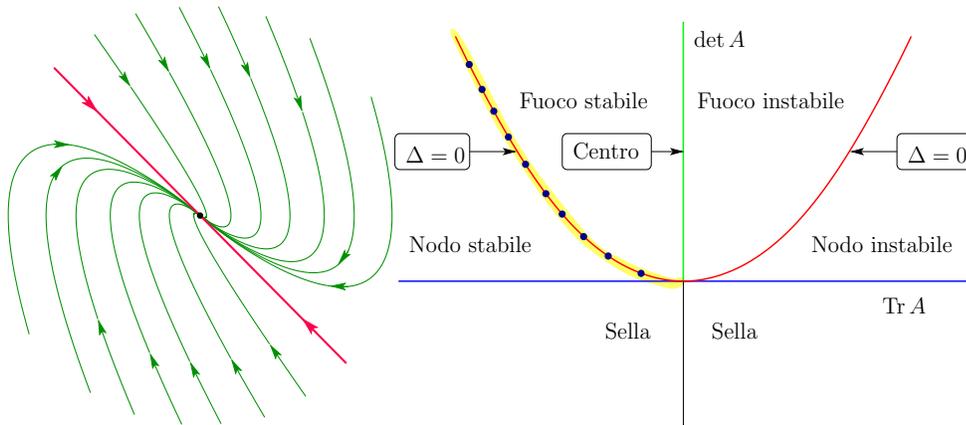


**iv. Nodo.**

- o Autovalori reali, non nulli e distinti, con lo stesso segno

$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0 \quad \text{o} \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 .$$

- o Le soluzioni sono combinazioni lineari di  $e^{\lambda_1 t}$  e  $e^{\lambda_2 t}$ ;
- o Le orbite nel piano di fase sono tangenti alla direzione dell'autovettore di  $\lambda_1$  nell'equilibrio e asintoticamente parallele all'autovettore di  $\lambda_2$ , che dà anche una direzione invariante.
- o L'equilibrio è asintoticamente stabile per autovalori negativi e instabile per autovalori positivi.



**v. *Nodo degenerare.***

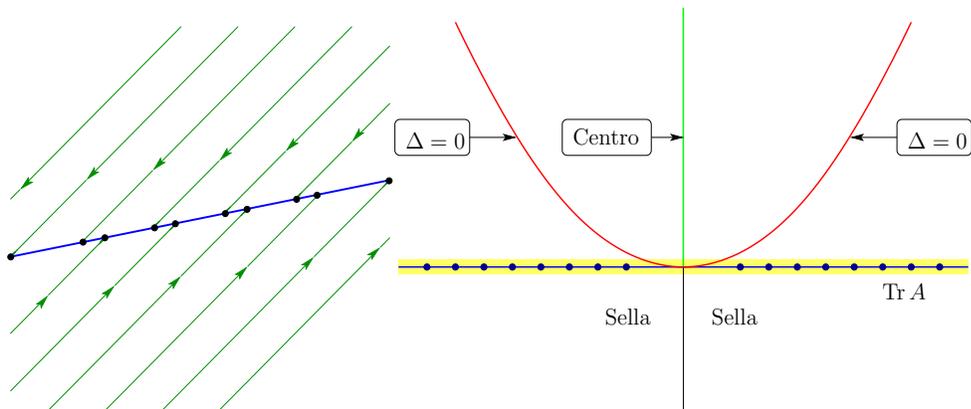
- Autovalori reali, non nulli e coincidenti,  $\lambda \neq 0$ .
- Le soluzioni sono combinazioni lineari di  $e^{\lambda t}$  e  $te^{\lambda t}$ .
- Le orbite sono tutte asintotiche all'equilibrio, simili al caso iv; ma le direzioni degli autovettori degenerano in una sola.
- L'equilibrio è asintoticamente stabile per  $\lambda < 0$ , instabile per  $\lambda > 0$ .

**vi. *Nodo degenerare a stella.***

- Autovalori coincidenti, come nel caso v, ma la matrice  $A$  è diagonale,

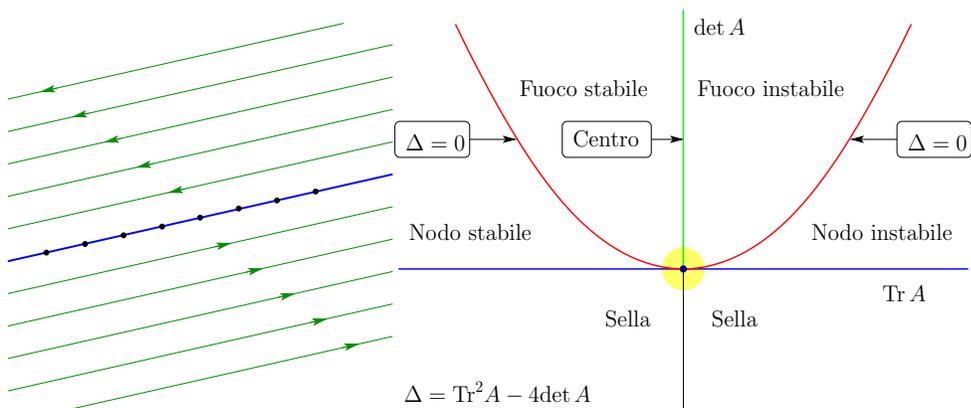
$$A = \text{diag}(\lambda, \lambda) .$$

- Le soluzioni hanno la forma  $e^{\lambda t}$ .
- Le orbite sono semirette spiccate dall'equilibrio.
- L'equilibrio è asintoticamente stabile per  $\lambda < 0$ , instabile per  $\lambda > 0$ .



**vii. Caso degenere, un autovalore nullo**

- La retta dell'autovalore nullo è formata da equilibri.
- Le soluzioni hanno la forma  $e^{\lambda t}$ .
- Le orbite sono semirette tra loro parallele, spiccate da ciascuno dei punti fissi; con moto asintotico al punto fisso corrispondente.



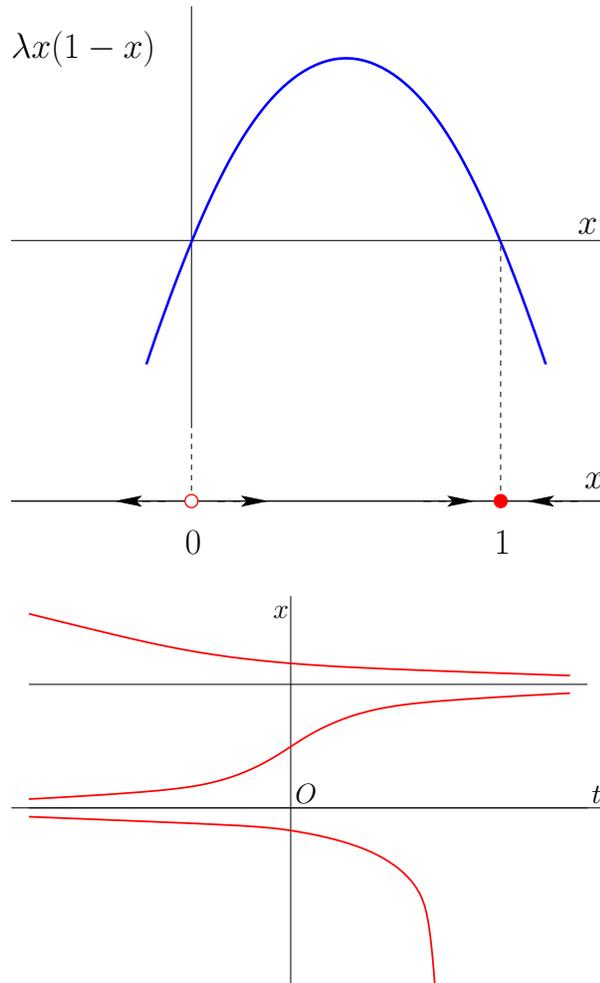
**viii. Caso degenere, due autovalori nulli**

- La matrice è riconducibile alla forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Infiniti equilibri su una retta.
- le orbite sono rette parallele a quella degli equilibri.
- Il caso  $\lambda = 0$  è banale: solo punti fissi.

## 2.3 Alcuni modelli classici



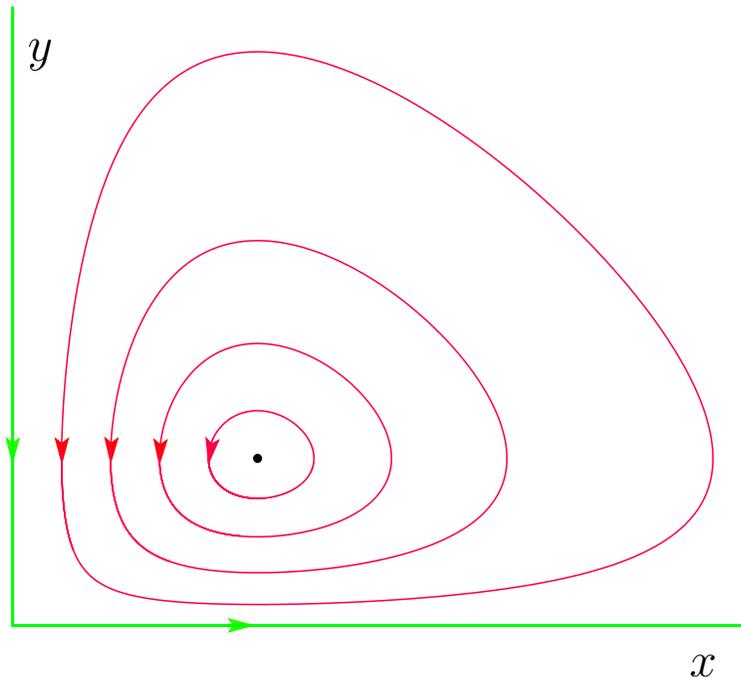
### 2.3.1 L'equazione logistica

- Equazione:

$$\dot{x} = \lambda x(1 - x) .$$

- Un modello di crescita di una popolazione o di diffusione di un'epidemia.
- $x$  rappresenta la frazione rispetto a una popolazione massima ammissibile.
- $\lambda > 0$ : parametro che tiene conto delle condizioni ambientali.
- Descrizione qualitativa (anche per  $x$  negativi, come esercizio matematico):
  - $x = 0$ : popolazione vuota, o nessun malato.
  - $x = 1$ : popolazione massima, o tutti malati.
- Soluzione con dato iniziale  $x_0$ :

$$x(t) = \frac{x_0 e^{\lambda t}}{1 - x_0 + x_0 e^{\lambda t}} .$$



### 2.3.2 Il modello di Lotka–Volterra

- Descrive due popolazioni, ad esempio di pesci. Equazioni, con parametri  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  positivi:

$$\dot{x} = \alpha x - \beta xy, \quad \dot{y} = -\gamma y + \delta xy.$$

- $x$ : pesci piccoli; si nutrono di plancton (abbondante); la crescita è proporzionale al numero di individui esistenti;
- $y$ : pesci grossi; si nutrono mangiando i pesci piccoli; in mancanza di cibo la decrescita è proporzionale al numero di individui esistenti.
- I termini  $xy$  descrivono l'interazione (i pesci grossi che mangiano i piccoli).
- Il sistema ammette una costante del moto (quantità invariante nel tempo).

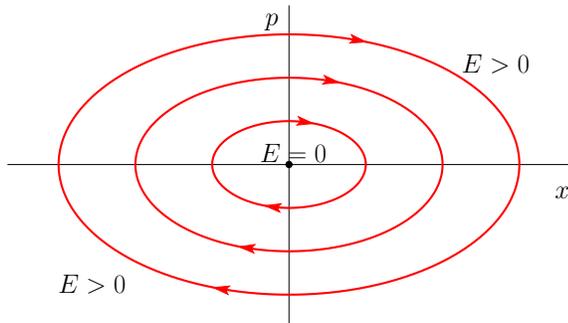
- Si elimina il tempo tra le equazioni

$$\frac{\alpha - \beta y}{y} dy = \frac{\gamma - \delta x}{x} dx$$

- Per integrazione si trova la costante

$$\Phi(x, y) = \gamma \log x - \delta x + \alpha \log y - \beta y$$

- Le orbite sono contenute nelle curve di livello della costante del moto.



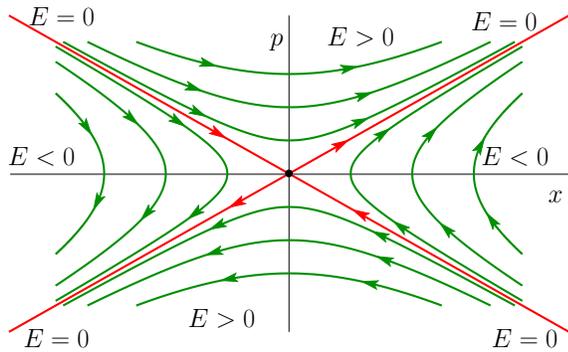
### 2.3.3 Sistemi meccanici conservativi

(a) *L'oscillatore armonico:*

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{ovvero} \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2 x.$$

○ L'energia è costante del moto

$$E = \frac{y^2 + \omega^2 x^2}{2}.$$

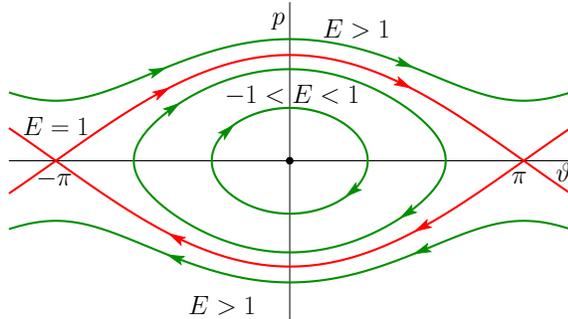


(b) *Il repulsore armonico:*

$$\ddot{x} - \lambda^2 x = 0, \quad \text{ovvero} \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = \lambda^2 x.$$

○ L'energia è costante del moto

$$E = \frac{y^2 - \lambda^2 x^2}{2}.$$

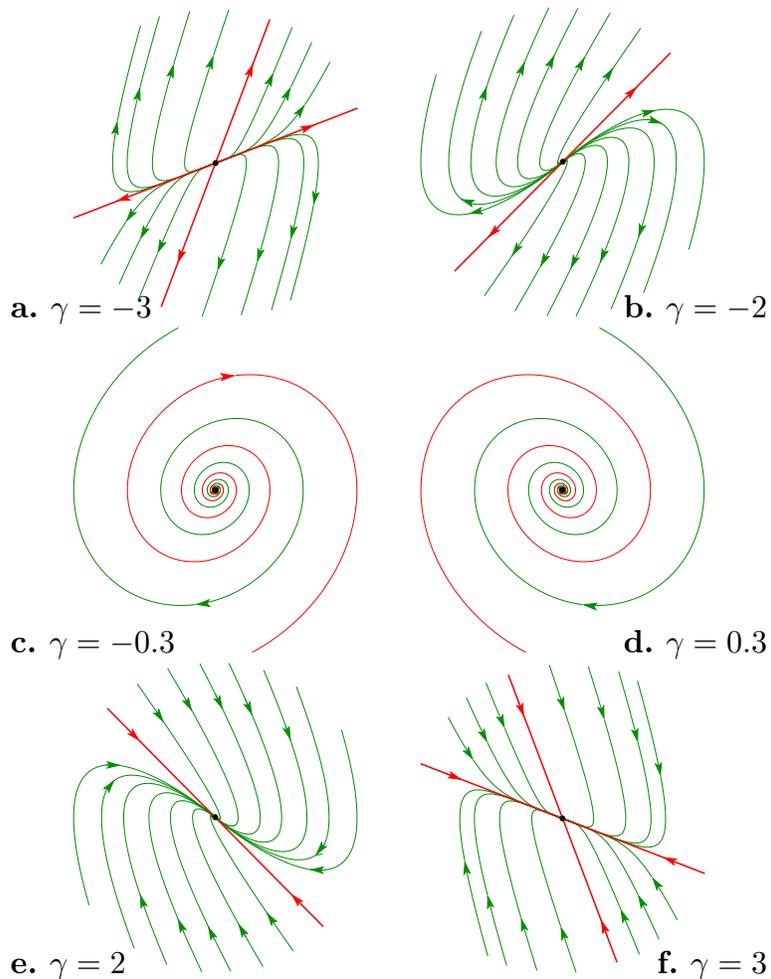


(c) *Il pendolo, modello non lineare:*

$$\ddot{x} + \sin x = 0, \quad \text{ovvero} \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x.$$

○ L'energia è costante del moto

$$E = \frac{y^2 - \cos x}{2}.$$



### 2.3.4 L'oscillatore smorzato

• Equazione:

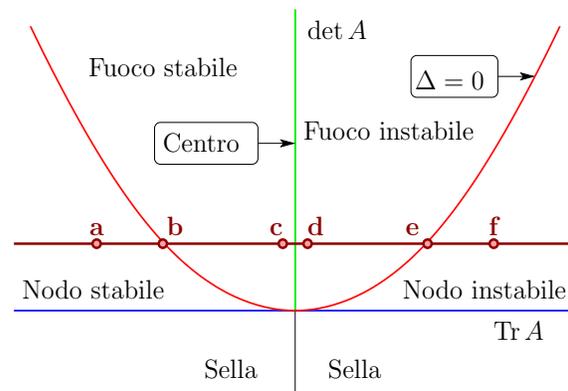
$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

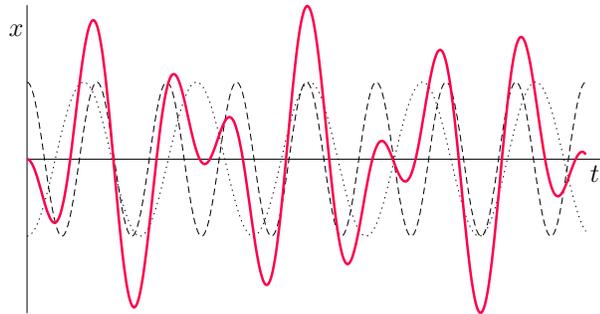
ovvero

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\gamma v - x.$$

◦  $\text{Tr } A = -\gamma$ ,  $\det A = \omega^2$ .

◦ Le biforcazioni al variare di  $\gamma \in \mathbb{R}$  (anche negativo, come curiosità matematica).





### 2.3.5 Le oscillazioni forzate e la risonanza

- Equazione nel caso di forzante periodica:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t), \quad f(t+T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

- Ci si può ricondurre al caso semplice

$$\ddot{x} + \omega^2 x = a \cos \nu t .$$

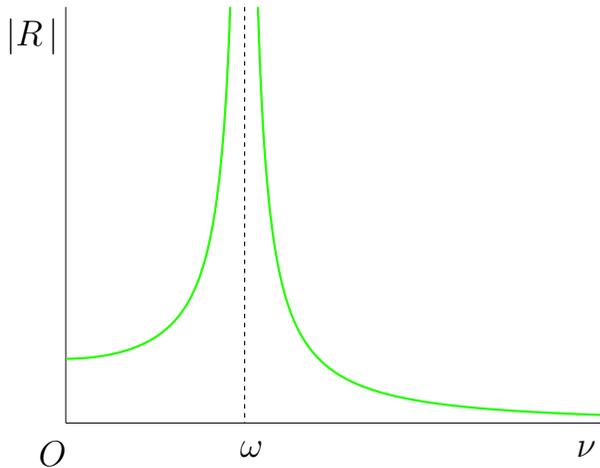
- Soluzione generale

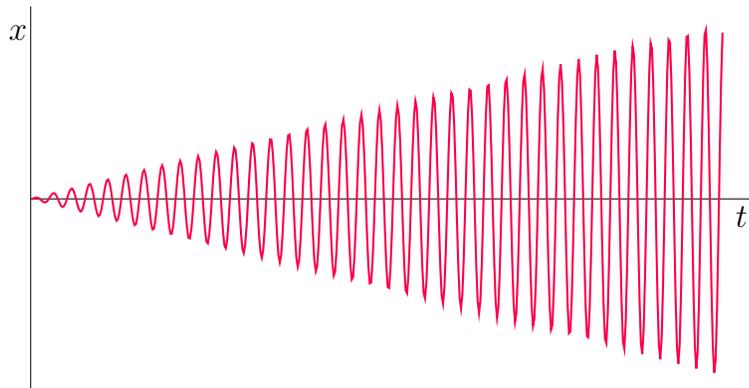
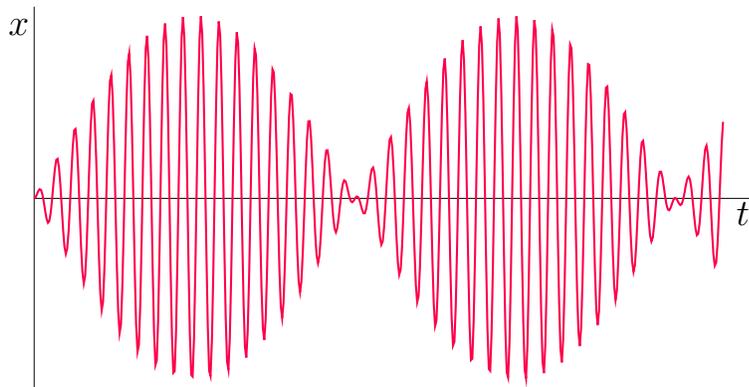
$$x(t) = R \cos \nu t + A \cos(\omega t + \varphi), \quad R = \frac{a}{\omega^2 - \nu^2},$$

sovrapposizione di un'oscillazione propria di frequenza  $\omega$  e una di frequenza  $\nu$  eguale a quella della forzante (figura sopra).

- La risposta dell'oscillatore e la risonanza:

- L'ampiezza dell'oscillazione indotta dalla forzante tende all'infinito quando le frequenze sono eguali (figura sotto).





- Il fenomeno dei *battimenti*:
  - se  $|\omega - \nu|$  piccolo allora si può porre  $\omega = \Omega + \varepsilon$  e  $\nu = \Omega - \varepsilon$ .
  - Con qualche calcolo la soluzione per dato iniziale  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  si scrive

$$x(t) = \frac{a}{2\Omega\varepsilon} \sin \varepsilon t \sin \Omega t .$$

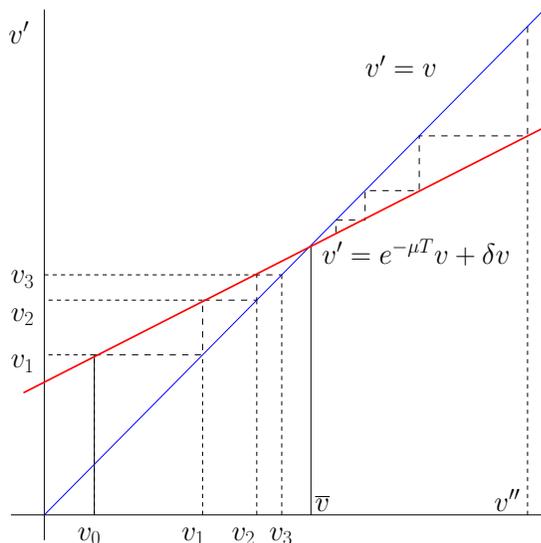
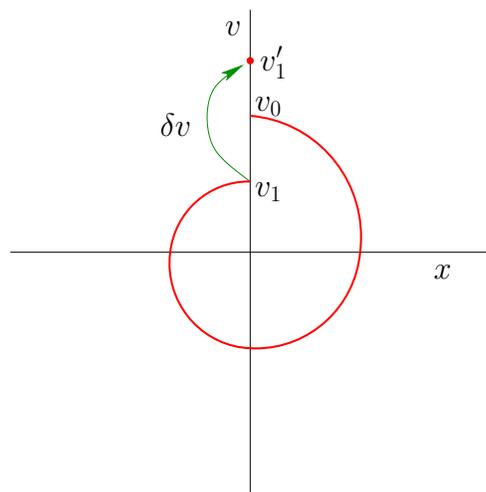
- Nel caso del suono l'orecchio percepisce la frequenza  $\Omega$  e un'intensità oscillate con frequenza  $2\pi/\varepsilon$  (figura sopra).

- Il caso di risonanza esatta,  $\nu = \omega$ :
  - la soluzione per dato iniziale  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  si scrive

$$x(t) = \frac{a}{2\omega} t \sin \omega t ;$$

- l'ampiezza di oscillazione cresce indefinitamente (figura sotto).

- Tutto questo è vero in approssimazione lineare. Se si aggiunge una non linearità il problema diventa molto più complesso. (un esempio nel paragrafo 5.4.3.)



### 2.3.6 Il ciclo limite e la misura del tempo

- Modello semplificato: un oscillatore smorzato con una forzante impulsiva.

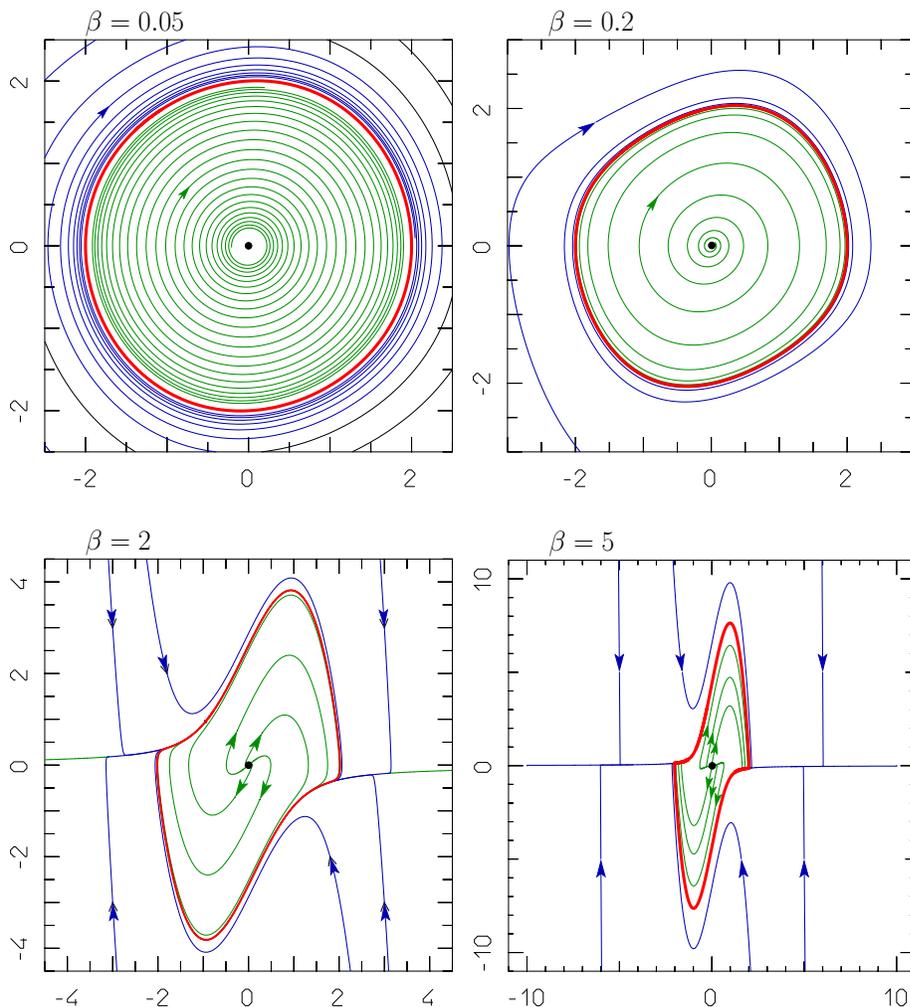
- Dato iniziale:  $x(0) = 0, v(0) = v_0 > 0$ .
- Evoluzione per un ciclo

$$x(t) = \frac{v_0}{\nu} e^{-\mu t} \sin \nu t, \quad v(t) = v_0 e^{-\mu t} \cos \nu t - \frac{\mu v_0}{\nu} e^{-\mu t} \sin \nu t$$

con  $\mu = \gamma/2$  e  $\nu = \frac{1}{2} \sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}$ , fino a  $T = \frac{2\pi}{\nu}$ .

- Dopo un ciclo la velocità è diminuita,  $v_1 = e^{-\mu T} v_0$ .
- In quell'istante si esercita un piccolo impulso che incrementa la velocità di  $\delta v$ ;
- il movimento riprende con velocità iniziale  $v' = v_1 + \delta v$ .
- Descrive in prima approssimazione il meccanismo di scappamento ad ancora del pendolo di Huygens.

- La successione delle velocità a tempi multipli di  $T$ .
  - Il grafico della retta  $v' = e^{-\mu T} v + \delta v$  interseca l'identità in un punto  $\bar{v}$ .
  - La successione  $v_0, v_1, v_2, \dots$  generata dal dato iniziale  $v_0$  arbitrario converge a  $\bar{v}$ .
  - Dopo un transiente il sistema si stabilizza su un'oscillazione con periodo fissato, indipendente dal dato di partenza.
- Informazione rilevante: *una piccola variazione di  $\delta v$  dipendente da  $v$  non cambia il fenomeno: il limite  $\bar{v}$  continuerà a esistere.*



### 2.3.7 L'equazione di Van der Pol

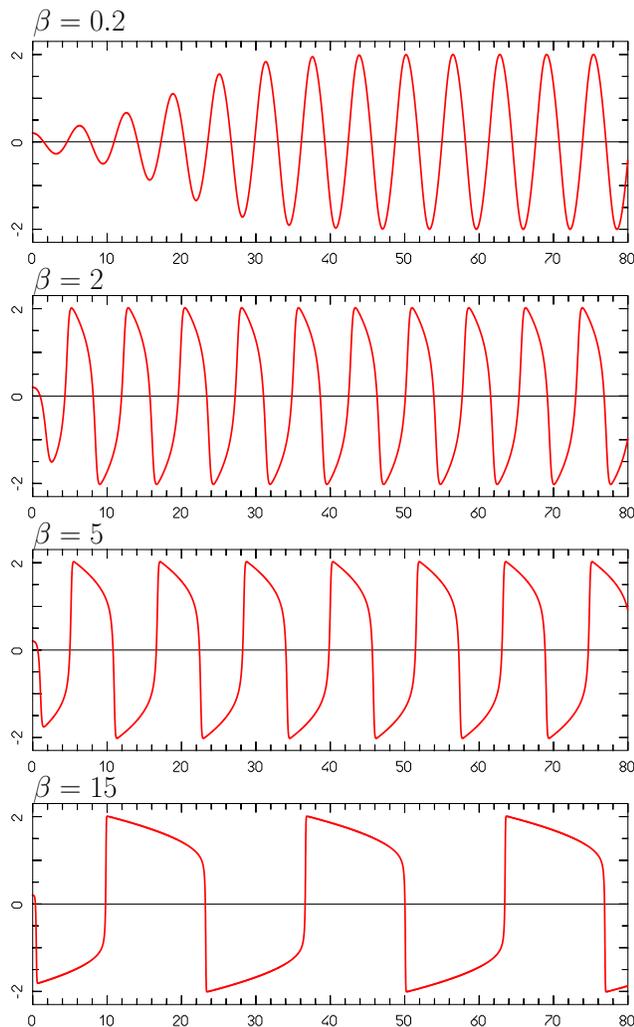
• Equazione:

$$\ddot{x} - \beta(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 ,$$

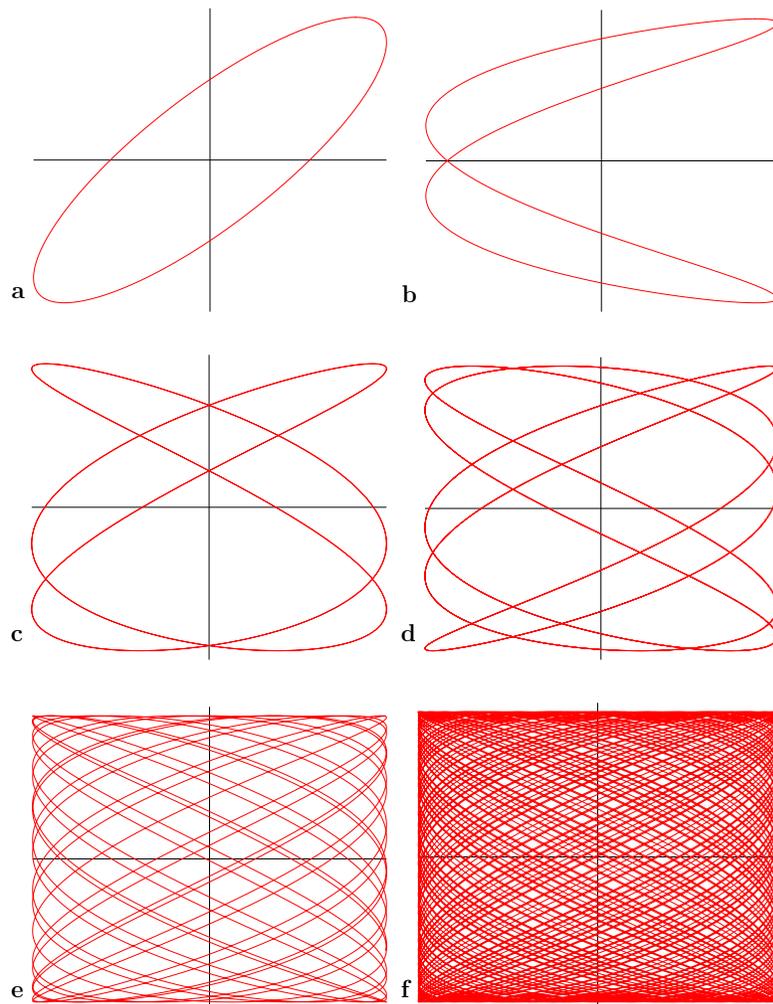
ovvero

$$\dot{x} = v , \quad \dot{v} = -x + \beta(1 - x^2)v .$$

- Ideata per scrivere un circuito con una valvola termoionica.
- Il coefficiente  $\beta(1 - x^2)$  della velocità  $\dot{x}$  cambia il segno: per  $x < 1$  ha un effetto forzante; per  $x > 1$  ha effetto smorzante.
- Per  $\beta$  piccoli si trova un'orbita periodica prossima a quella di un oscillatore armonico: il circuito si stabilizza su una funzione oscillante (circuiti radio).
- Per  $\beta$  alto il ciclo si deforma, ma appare un fenomeno interessante (pagina seguente).



- I grafici di  $x(t)$  per diversi valori di  $\beta$ .
  - Per  $\beta$  piccoli il transiente è abbastanza breve: il ciclo limite viene praticamente raggiunto abbastanza rapidamente.
- Le oscillazioni di rilassamento.
  - Per  $\beta$  grande si ha un andamento a scatti, che assomiglia a quello di un'onda quadra (circuiti digitali).



### 2.3.8 Il flusso di Kronecker sul toro

- Una coppia di oscillatori; equazioni

$$\ddot{x} + \omega_x^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega_y^2 y = 0.$$

- Soluzioni:

$$x(t) = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x),$$

$$y(t) = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y)$$

con ampiezze  $A_x, A_y$  e fasi  $\varphi_x, \varphi_y$ .

- Periodi:

$$T_x = \frac{2\pi}{\omega_x}, \quad T_y = \frac{2\pi}{\omega_y}$$

- Le figure di Lissajous

- La forma delle orbite nel piano  $x, y$  dipende dal rapporto tra le frequenze.

**a.**  $\omega_y/\omega_x = 1/1$ ;

**b.**  $\omega_y/\omega_x = 1/2$ ;

**c.**  $\omega_y/\omega_x = 2/3$ ;

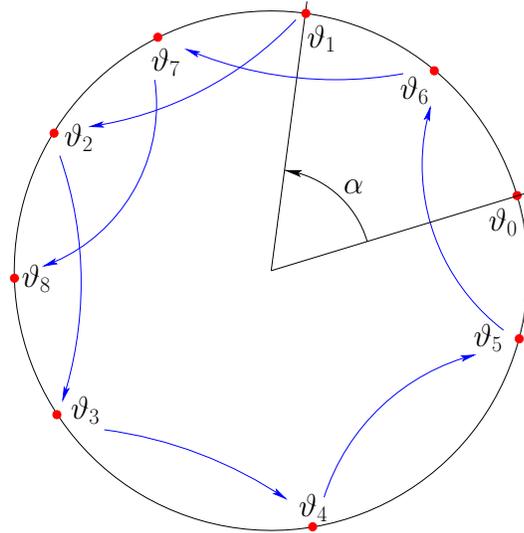
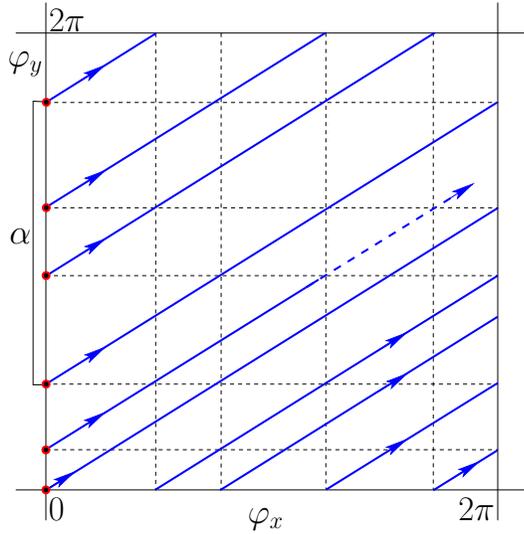
**d.**  $\omega_y/\omega_x = 3/5$ ;

**e.**  $\omega_y/\omega_x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  fino a  $t = \frac{10}{\pi}$ ;

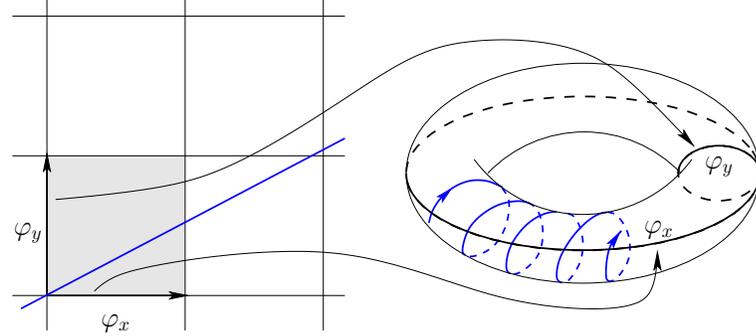
**f.**  $\omega_y/\omega_x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  fino a  $t = \frac{50}{\pi}$ .

- Se  $r\omega_x - s\omega_y = 0$  con  $r, s$  interi allora l'orbita ha periodo  $T = rT_x = sT_y$ .

- Se  $\omega_y/\omega_x$  è irrazionale l'orbita sembra riempire progressivamente il rettangolo.



- Il flusso sul toro  $\varphi_x, \varphi_y$ :
  - Rappresentazione del toro mediante il quadrato di lati  $2\pi$



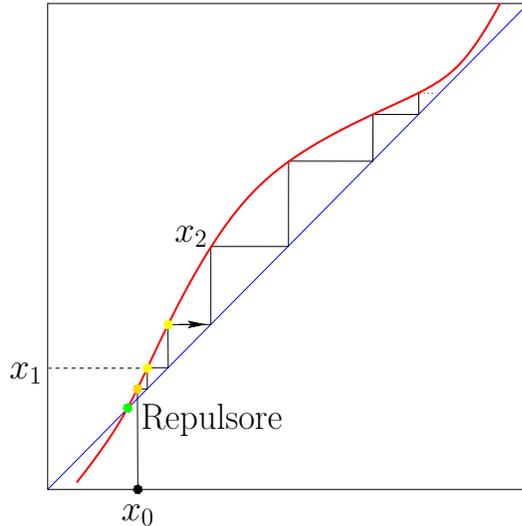
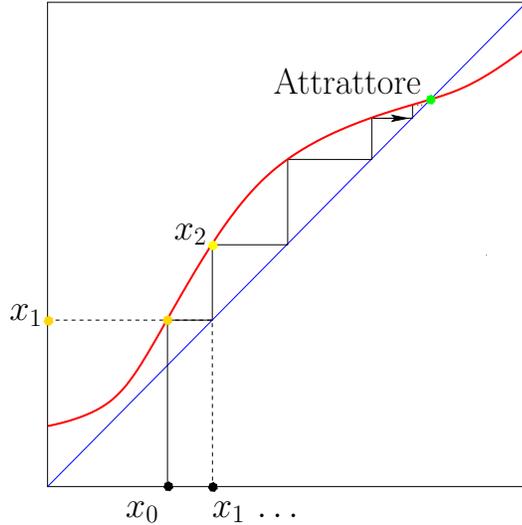
- *flusso di Kronecker*:

$$\varphi_x = \omega_x t, \quad \varphi_y = \omega_y t .$$

- La *mappa del cerchio*.
  - La sezione di Poincaré su  $\varphi_x = 0$ .
  - Le intersezioni dell'orbita con l'asse  $\varphi_y$  generano una successione di punti sulla circonferenza.
  - Rotazione di un angolo  $\alpha = 2\pi\omega_y/\omega_x$ , con  $\vartheta_0$  arbitrario:

$$\vartheta_{s+1} = \vartheta_s + \alpha \pmod{2\pi} .$$

- Orbita periodica:  $\vartheta_s = \vartheta_0 + 2r\pi$ , quindi  $s\alpha = 2r\pi$ . Vero se e solo se il rapporto  $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{r}{s}$  è razionale.
- Se  $\alpha$  è irrazionale allora l'orbita è densa sul cerchio.

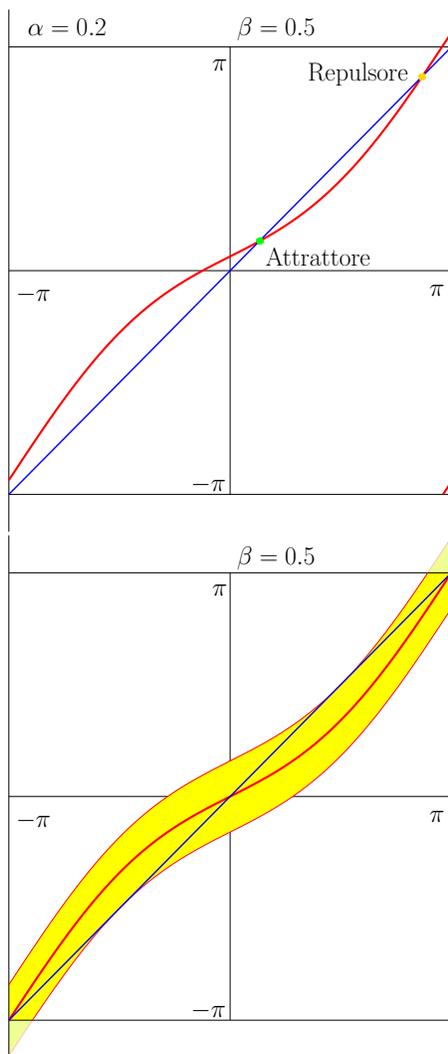


## 2.4 La dinamica a tempo discreto

- Una funzione continua  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ , su un intervallo  $\mathcal{I}$ .
  - La dinamica è definita come *mappa*  $x \rightarrow \phi x = f(x)$ .
  - L'orbita viene definita mediante iterazione: dato il punto iniziale  $x$ , per  $n$  intero non negativo si definisce

$$\phi^0 x = x, \quad \phi^n x = \phi \circ \phi^{n-1} x;$$

- se  $f(x)$  è invertibile ha senso anche  $n$  negativo.
- Punto *stazionario* (o *fisso*, o anche *equilibrio*):  $\phi x = x$ .
  - Nell'intorno di un punto stazionario si può approssimare la mappa con la parte lineare (come per le equazioni differenziali: esercizio per il lettore).
- Due casi semplici di punto stazionario:
  - *Attrattore*: un punto fisso  $\bar{x}$  con un intorno  $U(\bar{x})$  tale che  $\phi^n x \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \bar{x}$  per ogni  $x \in U(\bar{x})$  (figura sopra).
  - *Repulsore*: un punto fisso  $\bar{x}$  con un intorno  $U(\bar{x})$  tale che  $\phi^n x \rightarrow_{n \rightarrow -\infty} \bar{x}$  per ogni  $x \in U(\bar{x})$  (figura sotto).



### 2.4.1 La mappa del cerchio perturbata

- Modifico la mappa del cerchio in (ad esempio)

$$\vartheta \rightarrow \phi\vartheta = \vartheta + \alpha + g(\vartheta)$$

con un funzione  $g(\vartheta)$  ad esempio continua (per semplificare).

- Per  $|\alpha|$  abbastanza piccolo il grafico interseca la retta dell'identità:
- vengono generati due punti fissi, un repulsore e un attrattore (figura in alto).
- tutte le orbite con punto iniziale diverso dal repulsore tendono asintoticamente all'attrattore.
- Per  $|\alpha|$  abbastanza grande non ci sono punti fissi (figura in basso).

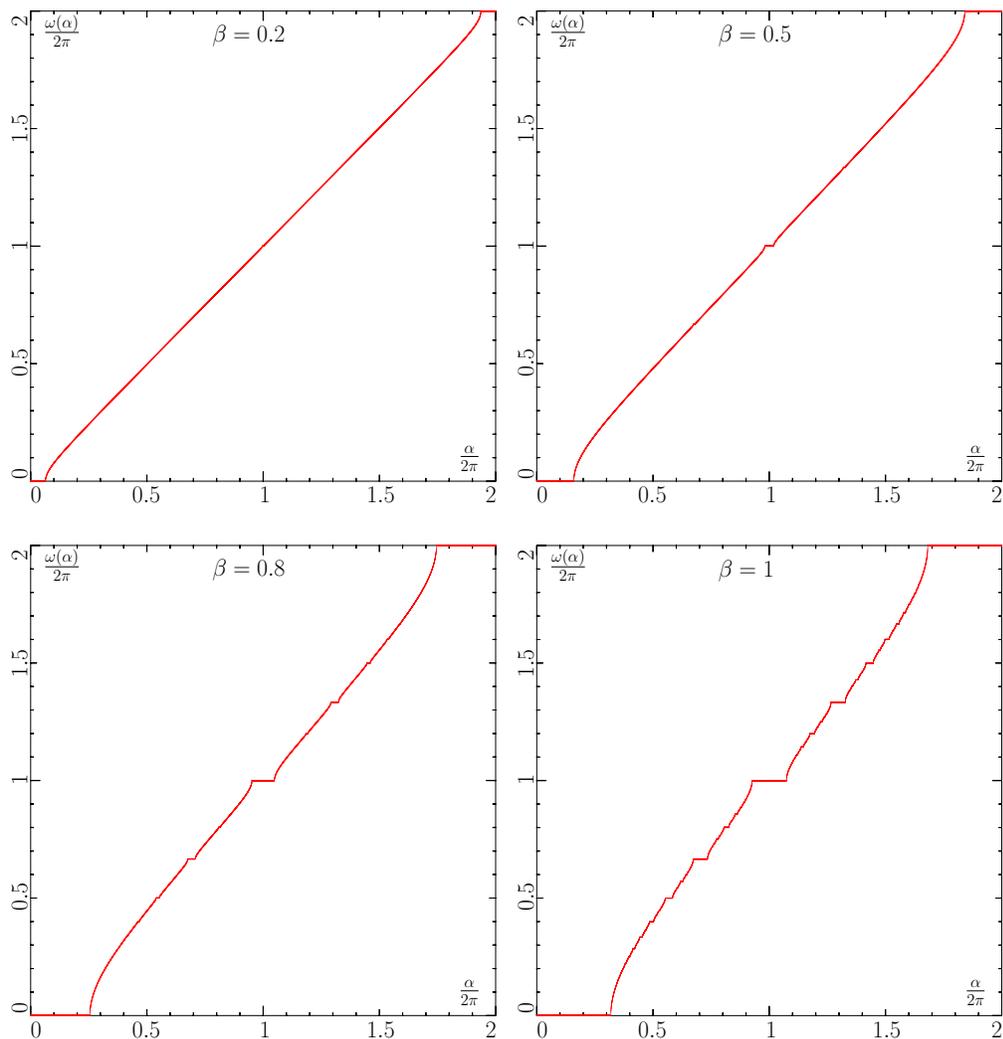
- Esempio: considero la mappa

$$\vartheta \rightarrow \phi\vartheta = \vartheta + \alpha - \beta \sin \vartheta, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

- Posso determinare  $c > 0$  tale che per  $-c < \alpha < c$  la mappa ha due punti fissi (area gialla nella figura a sinistra);
- per  $\alpha = \pm c$  i due punti fissi coincidono (caso degenere);
- per  $c < |\alpha| < 2\pi - c$  la mappa non ha punti fissi.
- (se  $|\alpha| \geq 2\pi$  basta sostituirlo con  $\alpha \pmod{2\pi}$ )

#### Domanda:

*Cosa possiamo dire sul comportamento qualitativo delle orbite?*



### 2.4.2 Il numero di rotazione

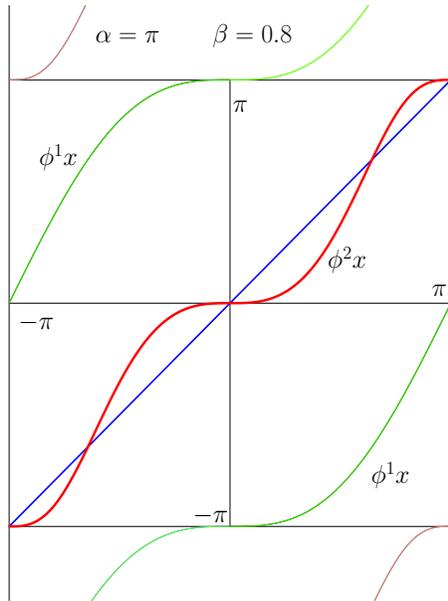
- La distanza sul cerchio:  
 $\text{dist}(\vartheta, \vartheta') = \min(|\vartheta - \vartheta'|, 2\pi - |\vartheta - \vartheta'|)$
- Numero di rotazione  $\omega(\vartheta)$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \text{dist}(\vartheta_s, \vartheta_{s-1})$$

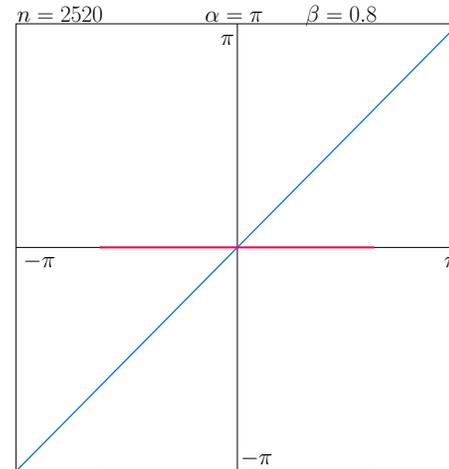
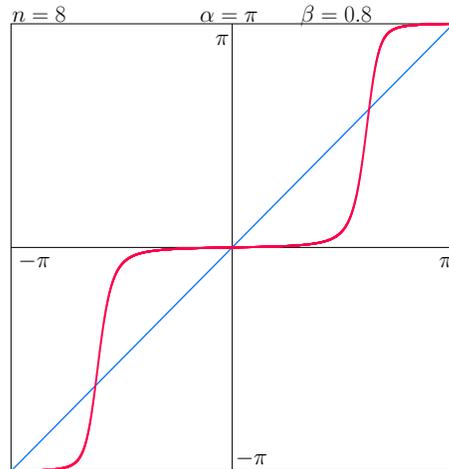
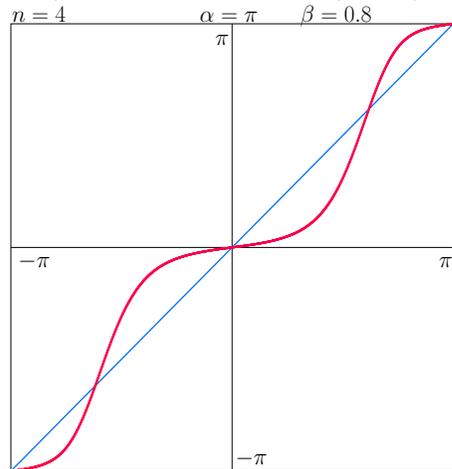
Se la mappa è continua e invertibile il numero di rotazione esiste e non dipende dal punto iniziale  $\vartheta$  (Poincaré),

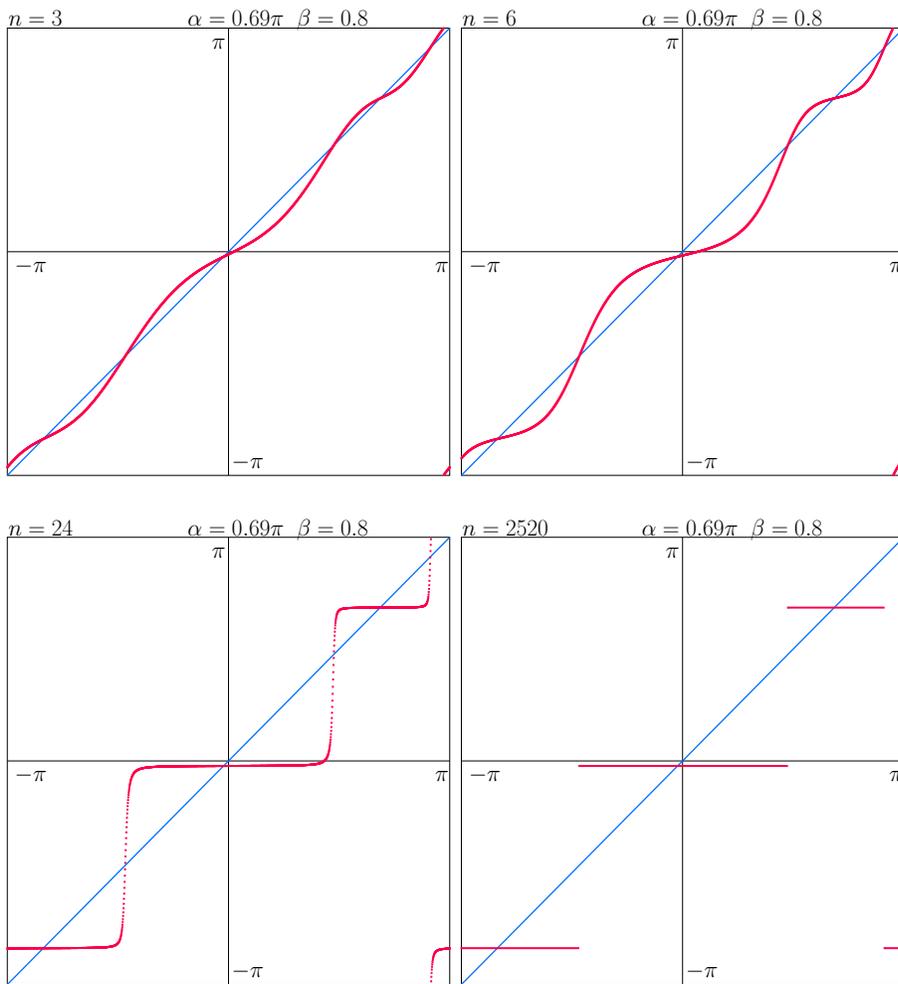
- nel nostro caso, per  $|\beta| \leq 1$ , dipende da  $\alpha$ ; denotiamo  $\omega(\alpha)$ .
- La “scala del diavolo”.
  - Se  $\beta = 0$  ho  $\omega(\alpha) = \alpha$ .
  - Calcolo di  $\omega(\alpha)$  per  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  (numerico).
  - Richiama l’insieme ternario di Cantor.
  - Cosa sono i gradini?

### 2.4.3 La cattura in risonanza

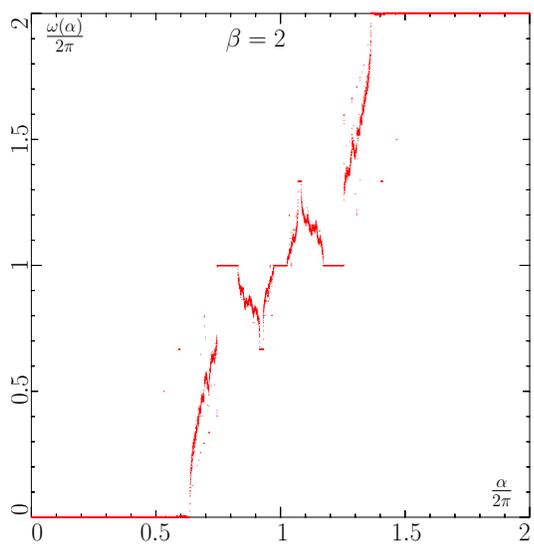
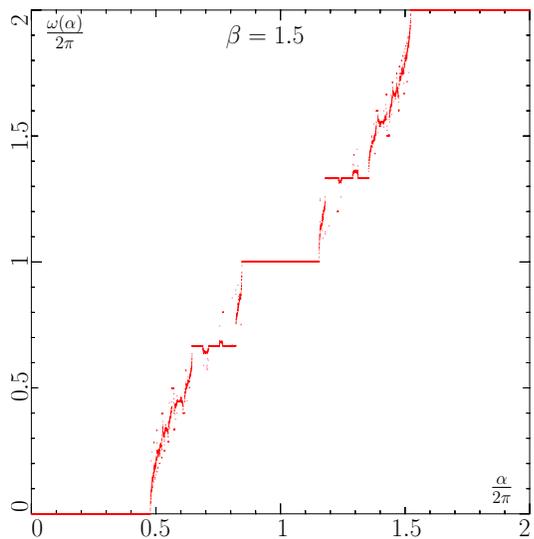


- Risonanza:  $s\alpha - 2r\pi = 0$ , ovvero  $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{r}{s}$ .
  - Per  $\alpha'$  vicino alla risonanza si verifica la cattura:  $\omega(\alpha') = \alpha$ .
- Poniamo  $\alpha = \pi$ ; risonanza 2 : 1.
  - La mappa  $\phi^2$  non ha punti stazionari (curva verde);
  - La mappa  $\phi^2 \vartheta$  ha 4 punti stazionari (curva rossa) che sono orbite di periodo 2 per  $\phi$ :
    - $\vartheta = 0, \pi$  sono attrattori;
    - gli altri due punti sono repulsori.
  - Per  $\beta$  non troppo grande e  $\alpha$  prossimo a  $\pi$  abbiamo  $\omega(\alpha) = \pi$ . L'orbita è stata catturata in risonanza 2 : 1.
  - È il gradino di  $\omega(\alpha)$  vicino a  $\pi$ .
  - Per  $n$  grande il grafico di  $\phi^n \vartheta$  tende a una funzione a gradino con due valori 0 e  $\pi$  sui bacini di attrazione dei due punti stazionari attrattori.



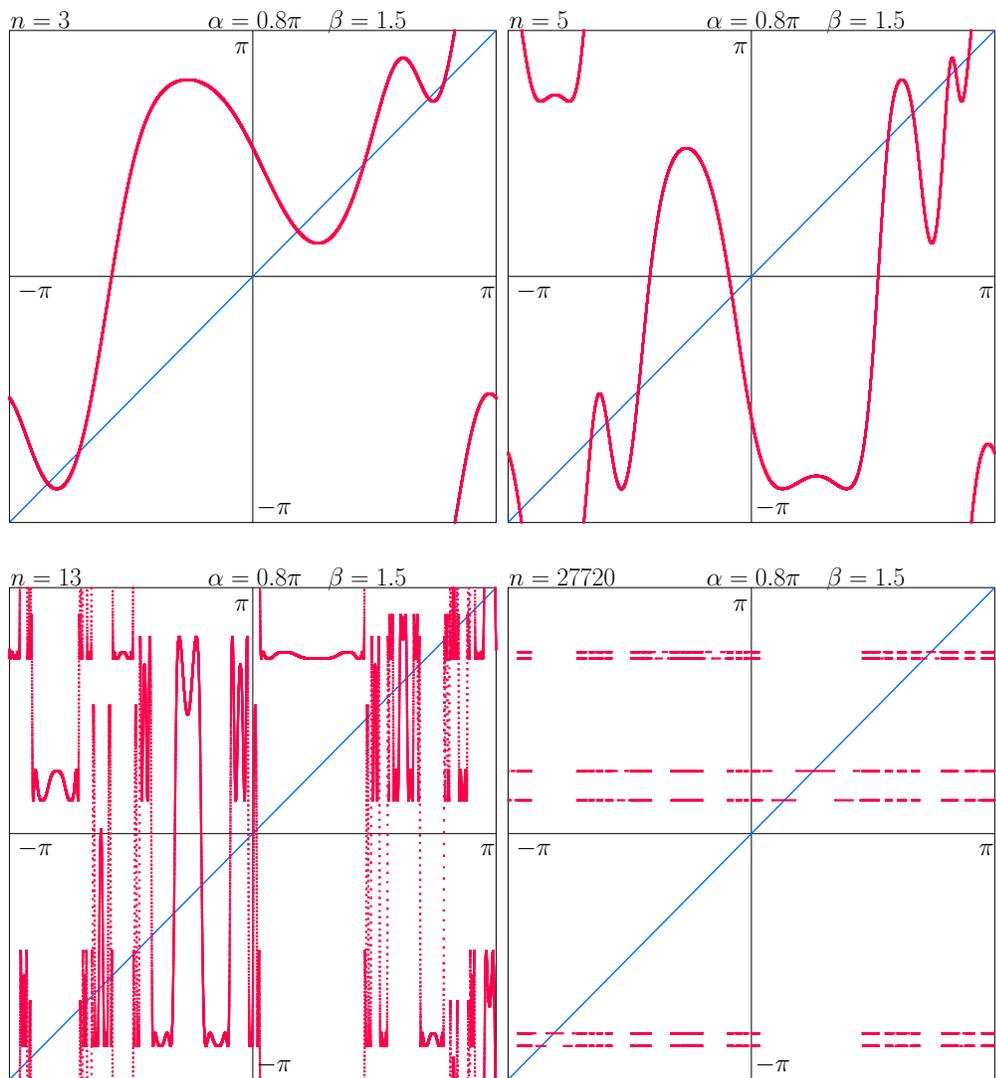


- Risonanza 3 : 1;  $\alpha = 0.69\pi$ .
  - La mappa  $\phi^3$  ha 6 punti stazionari.
  - tre punti sono attrattori; gli altri 3 sono repulsori (scoprire quali).
  - I tre attrattori formano un'orbita di periodo 3 per  $\phi$ .
  - I tre repulsori formano un'orbita di periodo 3 per  $\phi$ .
  - Per  $n$  grande il grafico della mappa  $\phi^n$  tende a una funzione con tre gradini, che corrispondono all'orbita dell'attrattore.
- Il fenomeno della cattura si verifica per tutte le risonanze.
  - L'ordine della risonanza  $r : s$  è il periodo  $s$  dell'orbita corrispondente.
  - L'ampiezza dell'intervallo di  $\alpha$  catturati decresce come  $O(\beta^s)$ .
  - La decrescita così rapida rende di fatto invisibili le risonanze di ordine elevato sul grafico della scala del diavolo.
  - Per  $\beta$  piccoli resta comunque un insieme non numerabile di valori di  $\alpha$  le cui orbite sono non risonanti.

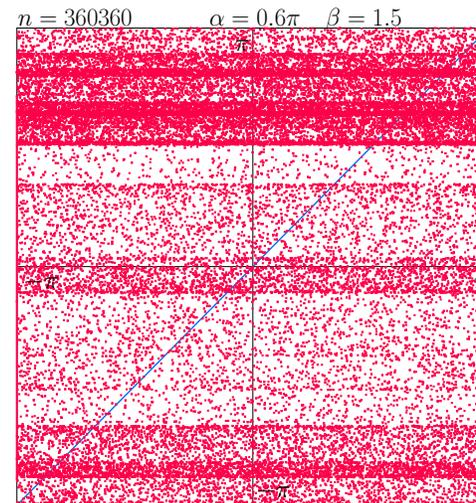
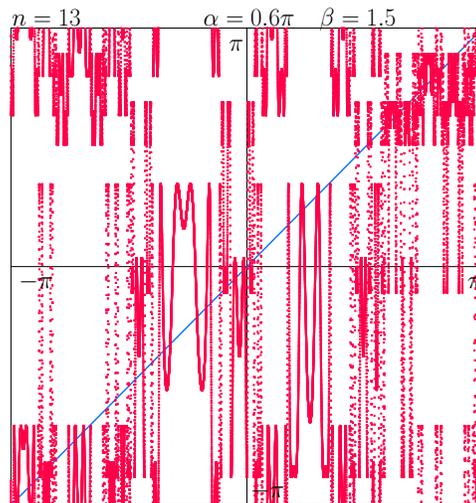
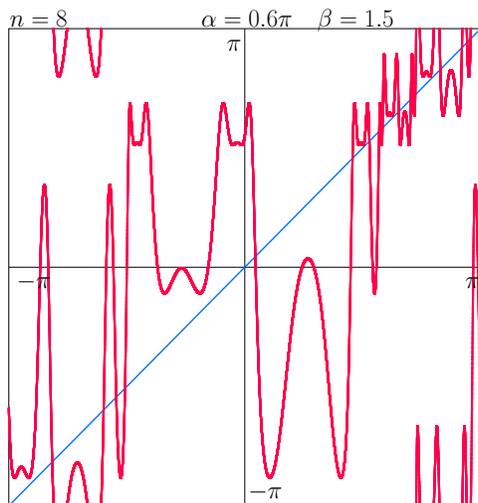
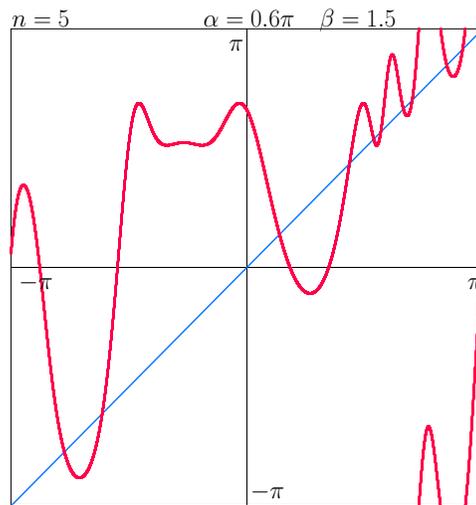
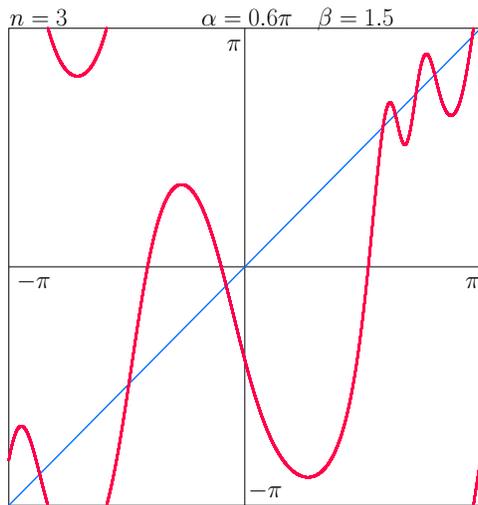


#### 2.4.4 Il caos nella mappa del cerchio

- Per  $|\beta| > 1$  la mappa perturbata del cerchio è ancora continua, ma non è più invertibile (non è un omeomorfismo).
  - Non si applica il teorema di Poincaré:
  - il numero di rotazione  $\omega$  dipende dal punto iniziale  $x$ , oltre che da  $\alpha$ .
  - Il grafico della scala del diavolo ha ancora degli scalini, ma su certi intervalli di  $\alpha$  si vedono dei valori che sembrano distribuiti a caso.
  - Il motivo è che il grafico è calcolato scegliendo una sola orbita per ciascun  $\alpha$ .
- Che succede al variare del punto iniziale  $x$  dell'orbita?
  - Possiamo vedere qualcosa sul grafico di  $\phi^n$  per  $n$  crescenti ...
  - ... ma senza pretendere troppo!



- Fissiamo  $\alpha = 0.8\pi$  e  $\beta = 1.5$ 
  - La mappa  $\phi^3$  presenta 3 coppie punti stazionari, alternativamente attrattori e repulsori.
  - La mappa  $\phi^5$  presenta 5 coppie.
  - La mappa  $\phi^{13}$  presenta parecchie coppie — 26? difficile contarle tutte sul grafico.
  - Il grafico di  $\phi^n$  dovrebbe associare un gradino a ciascun attrattore, ma diventa difficile distinguerli — anche perché la discretizzazione li nasconde.
  - Si vede comunque che i gradini corrispondono a orbite periodiche diverse, a cui è associato un diverso numero di rotazione.



- Un altro valore  $\alpha = 0.6\pi$ , sempre con  $\beta = 1.5$ .
  - Per  $n$  bassi i grafici di  $\phi^n$  sono qualitativamente simili a quelli della pagina precedente.
  - Per  $n$  alti  $\phi^n$  sembra essere molto caotico.

• Conclusione:

**C'è ancora molto da capire!**

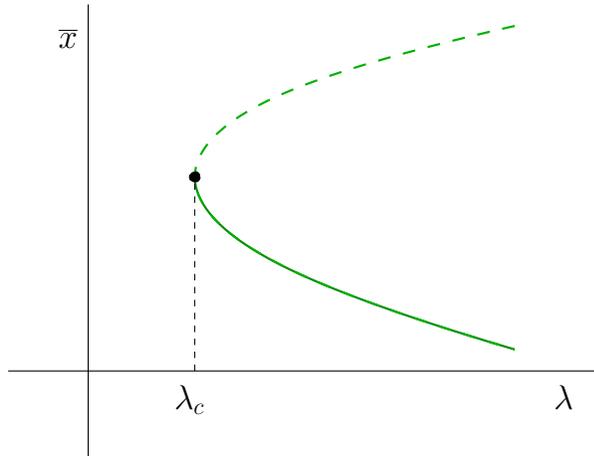


# 3

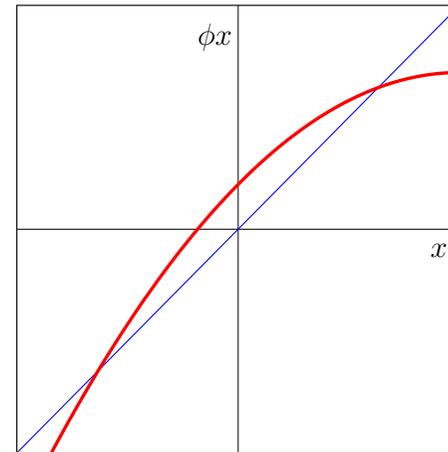
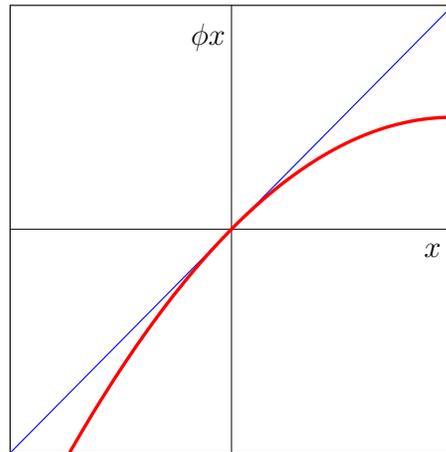
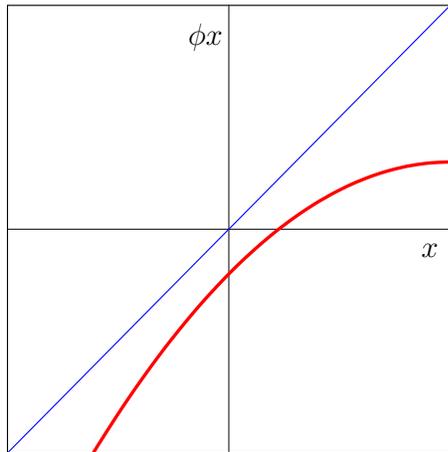
## I SISTEMI CAOTICI

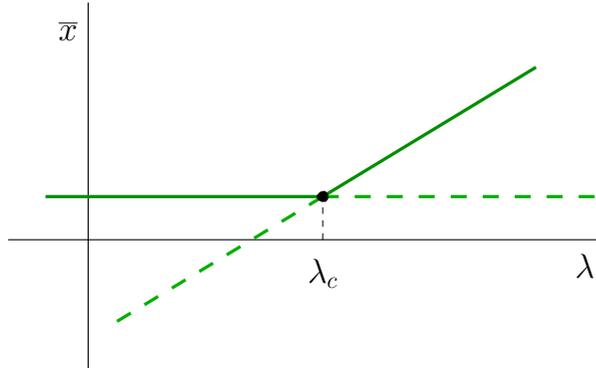
- I fenomeni di biforcazione per una mappa dell'intervallo.
- La mappa logistica e la cascata di biforcazioni.
- Il meccanismo di espansione-contrazione.
- La dinamica simbolica.
- La divergenza esponenziale delle orbite.

### 3.1 I fenomeni di biforcazione per una mappa dell'intervallo

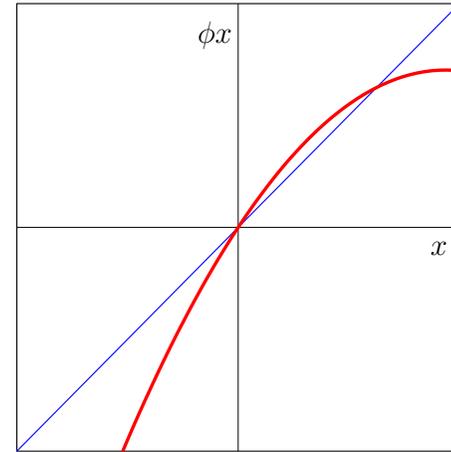
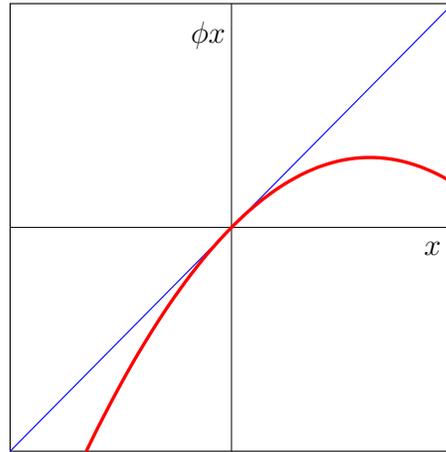
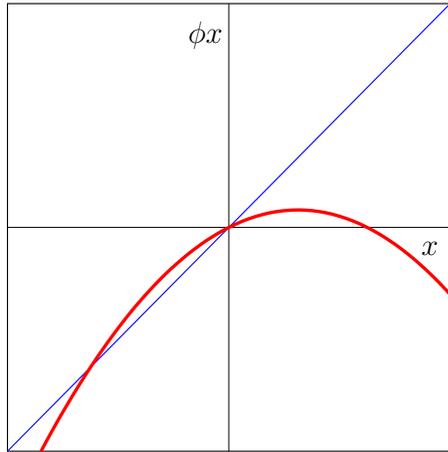


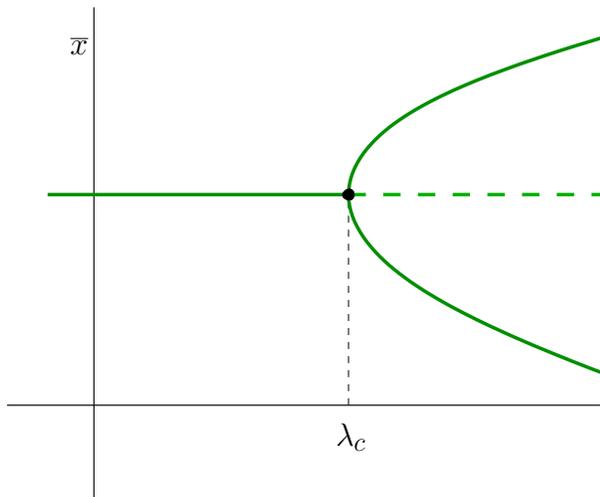
- Un cambiamento repentino della dinamica al variare di un parametro  $\lambda$ , al passaggio per un valore critico  $\lambda_c$ .
  - Condizione di biforcazione:  $|\frac{d}{dt}\phi x| = 1$ .
  - Si verificano diversi casi.
- Biforcazione tangente:
  - Prima,  $\lambda < \lambda_c$ : la mappa non ha punti stazionari.
  - $\lambda = \lambda_c$ : il grafico della mappa è tangente alla retta identità.
  - $\lambda > \lambda_c$ : nascono due punti stazionari, rispettivamente stabile (curva continua) e instabile (curva tratteggiata).



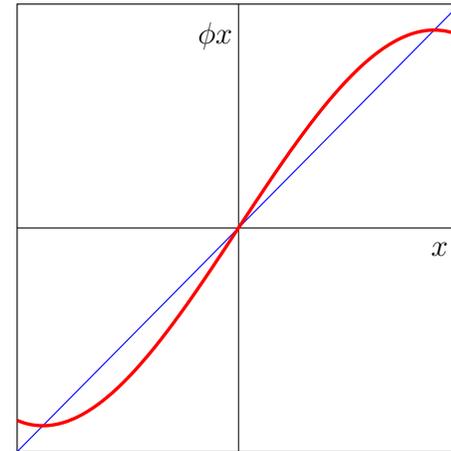
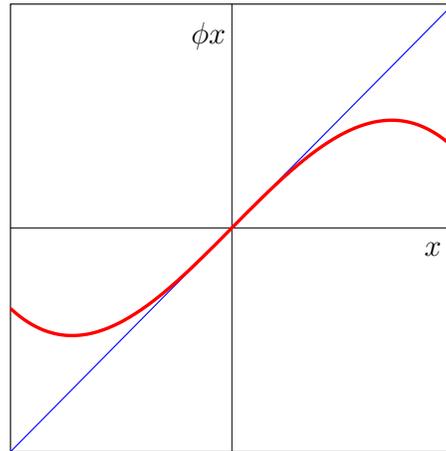
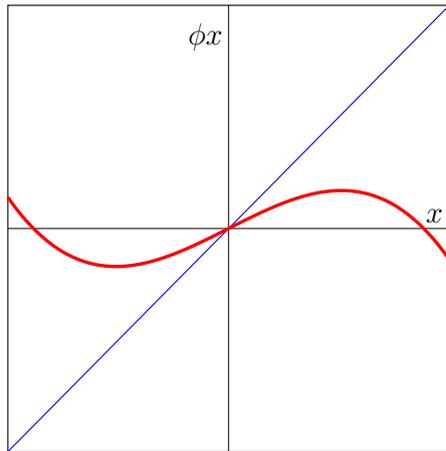


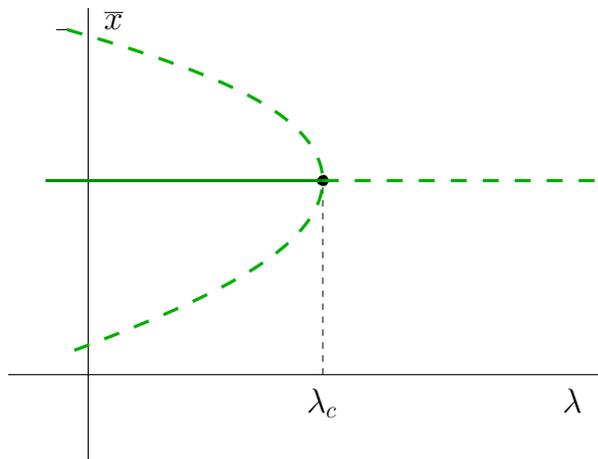
- Biforcazione di scambio: la mappa ha sempre un punto stazionario; la derivata nel punto stazionario passa per 1.
  - Prima,  $\lambda < \lambda_c$ : la mappa ha due punti stazionari, rispettivamente stabile (curva continua) e instabile (curva tratteggiata).
  - $\lambda = \lambda_c$ : il grafico della mappa è tangente alla retta identità; i due punti stazionari coincidono.
  - $\lambda > \lambda_c$ : i punti stazionari si scambiano, e si formano ancora due orbite periodiche di stabilità opposta.



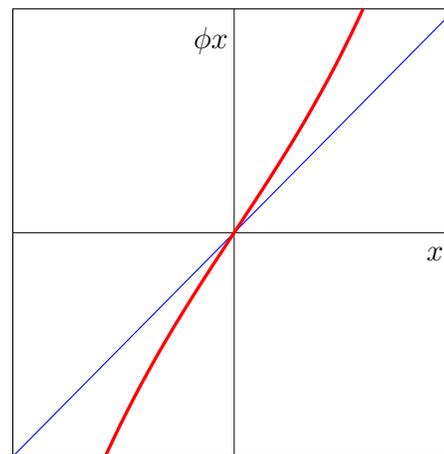
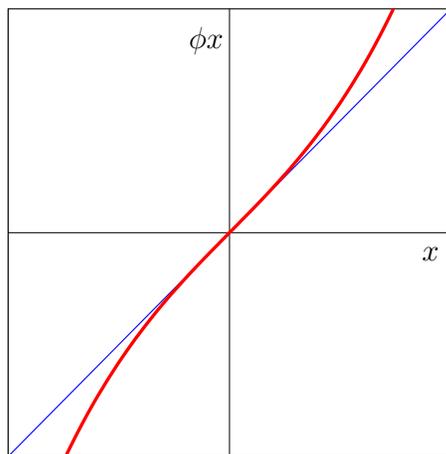
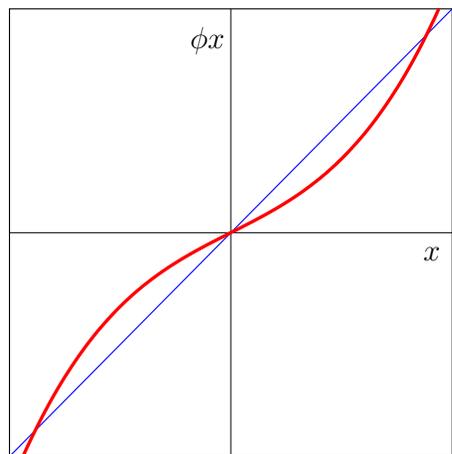


- Biforcazione a forchetta: un punto stazionario stabile si sdoppia in due stabili, e continua a esistere perdendo la stabilità.
  - La derivata nel punto stazionario passa per 1.
  - Prima,  $\lambda < \lambda_c$ : la mappa ha un punto stazionario stabile, che è punto di flesso.
  - $\lambda = \lambda_c$ : il grafico della mappa è tangente alla retta identità.
  - $\lambda > \lambda_c$ : il punto stazionario diventa instabile, e nascono due punti stazionari stabili.

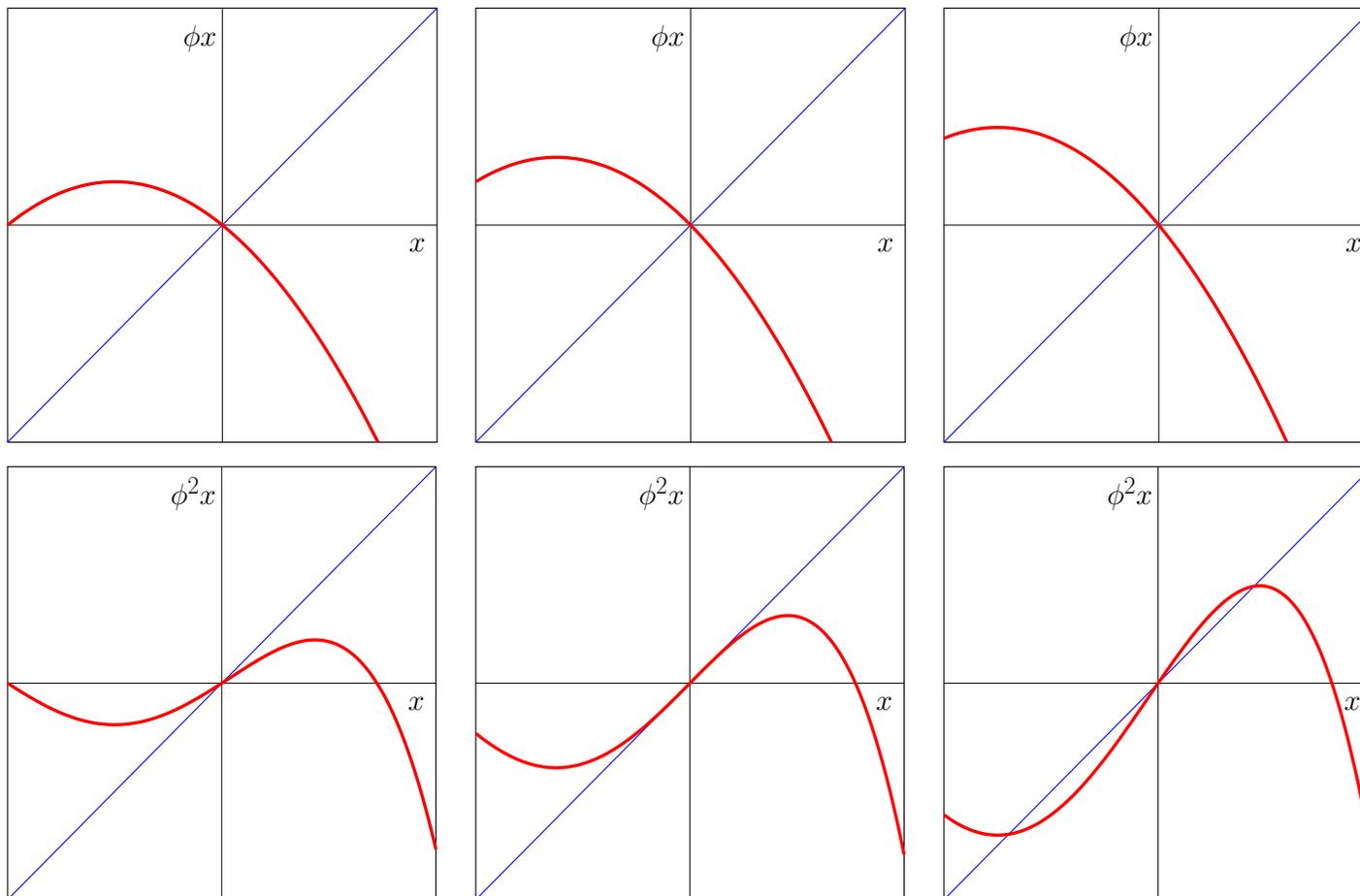




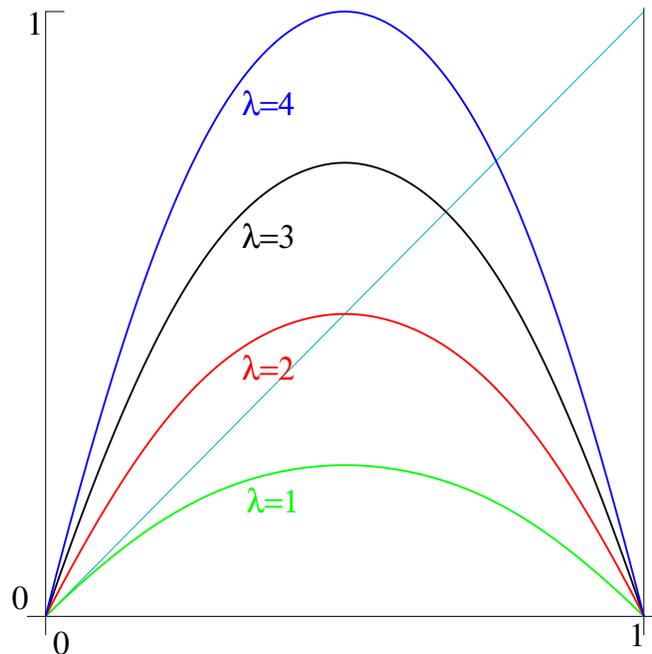
- Biforcazione a forchetta inversa: un punto stazionario stabile e due instabili si fondono in un singolo punto, che diventa instabile.
  - Simile alla biforcazione a forchetta, con i dovuti cambiamenti.



- La biforcazione con raddoppio di periodo:
  - La mappa  $\phi$  ha un punto stazionario con derivata nell'intorno di  $-1$ ;
  - La mappa  $\phi^2$  ha una biforcazione a forchetta.



## 3.2 La mappa logistica e la cascata di biforcazioni



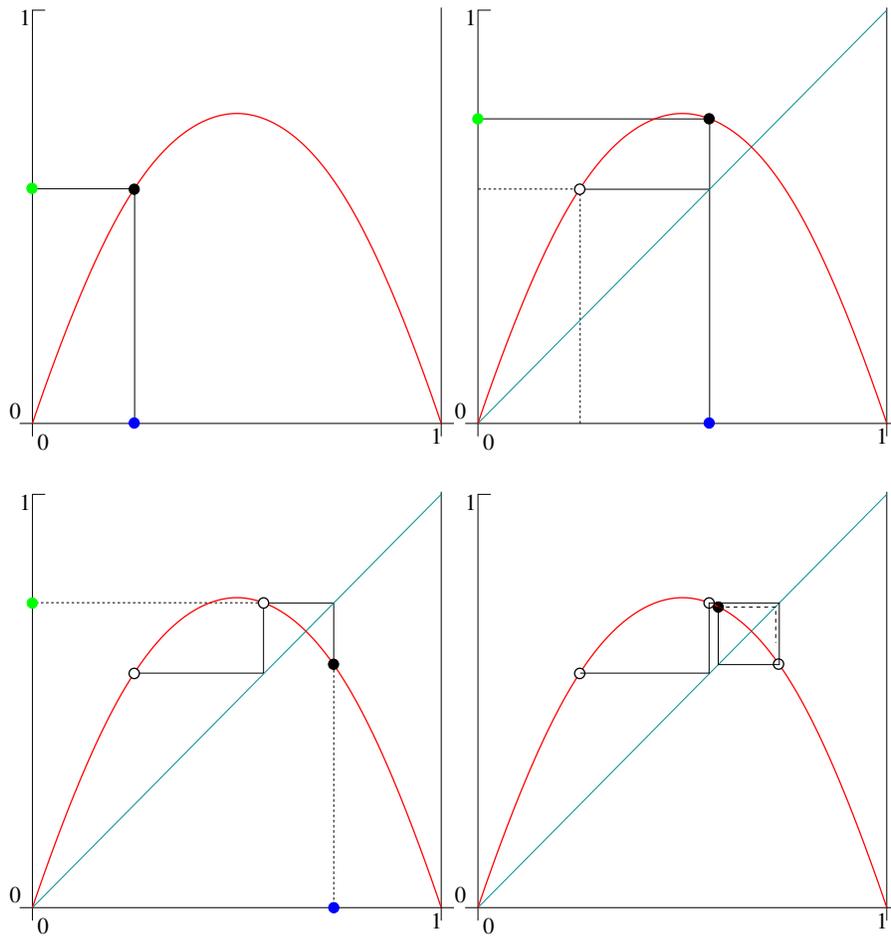
### 3.2.1 Il modello

- Mappa dell'intervallo  $[0, 1]$  su se stesso

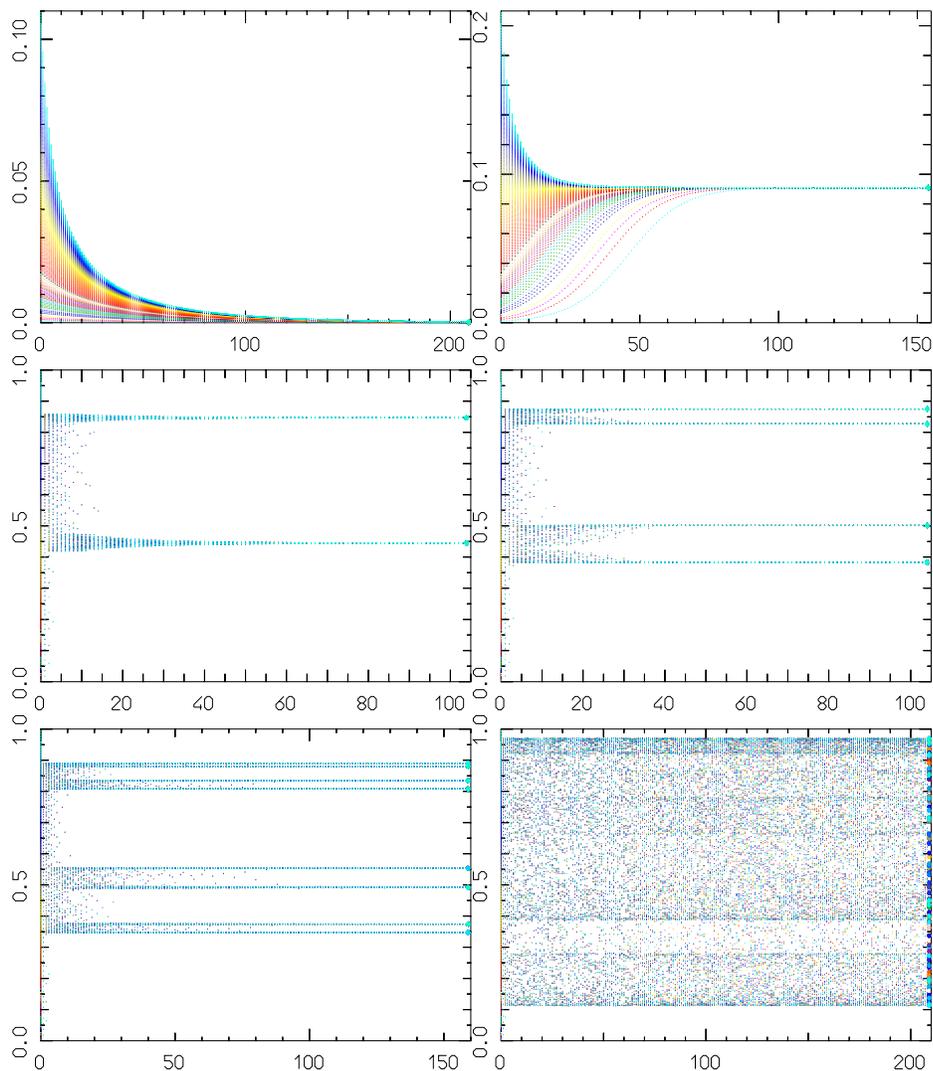
$$\phi x = \lambda x(1 - x) .$$

- Rappresenta l'evoluzione a tempo discreto di una popolazione.
  - (i) Evoluzione per generazioni, a intervalli regolari.
  - (ii) Ci importa il numero di individui di una data generazione (al tempo  $n$ ).
  - (iii) Il parametro  $\lambda$  riassume le condizioni ambientali (cibo, affollamento, &c).
  - (iv)  $x$  rappresenta la frazione rispetto a un numero massimo  $N$  compatibile con l'ambiente.
- La caratteristica qualitativa rilevante è la forma “a gobba” della mappa:
  - (v) Per  $x$  piccolo il numero di nuovi nati è proporzionale a quello degli individui esistenti.
  - (vi) Per  $x$  crescente si ha competizione per le risorse (spazio, cibo, rischio di epidemie, &c).
- Nota: da non confondere con il flusso continuo dell'equazione logistica.

- Problema: *studiare l'evoluzione temporale della popolazione.*

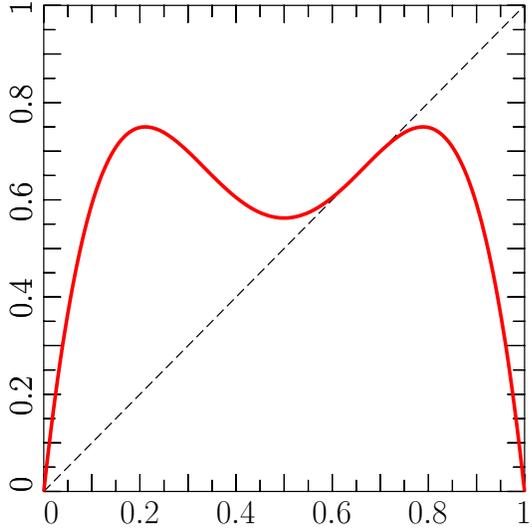


- Le prime 4 iterazioni per un  $\lambda$  fissato:
  - Per  $\lambda < 1$  si ha certamente  $\phi^n x \rightarrow 0$ .
  - Nel caso in figura si ha convergenza su un attrattore, non monotona.
  - Che succede al variare di  $\lambda$ ?

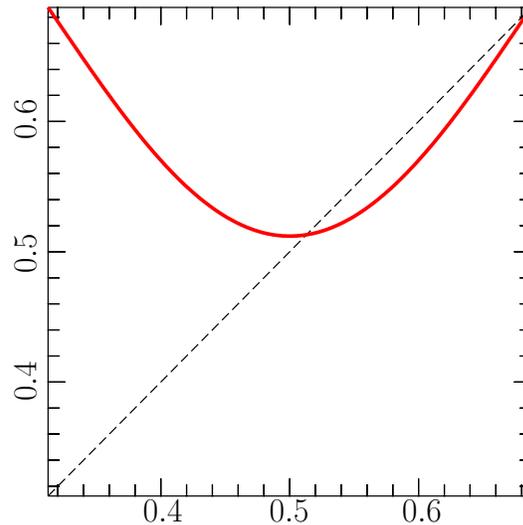
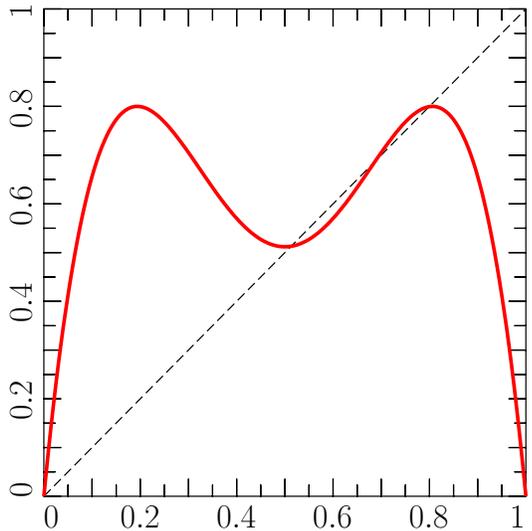


### 3.2.2 La dinamica

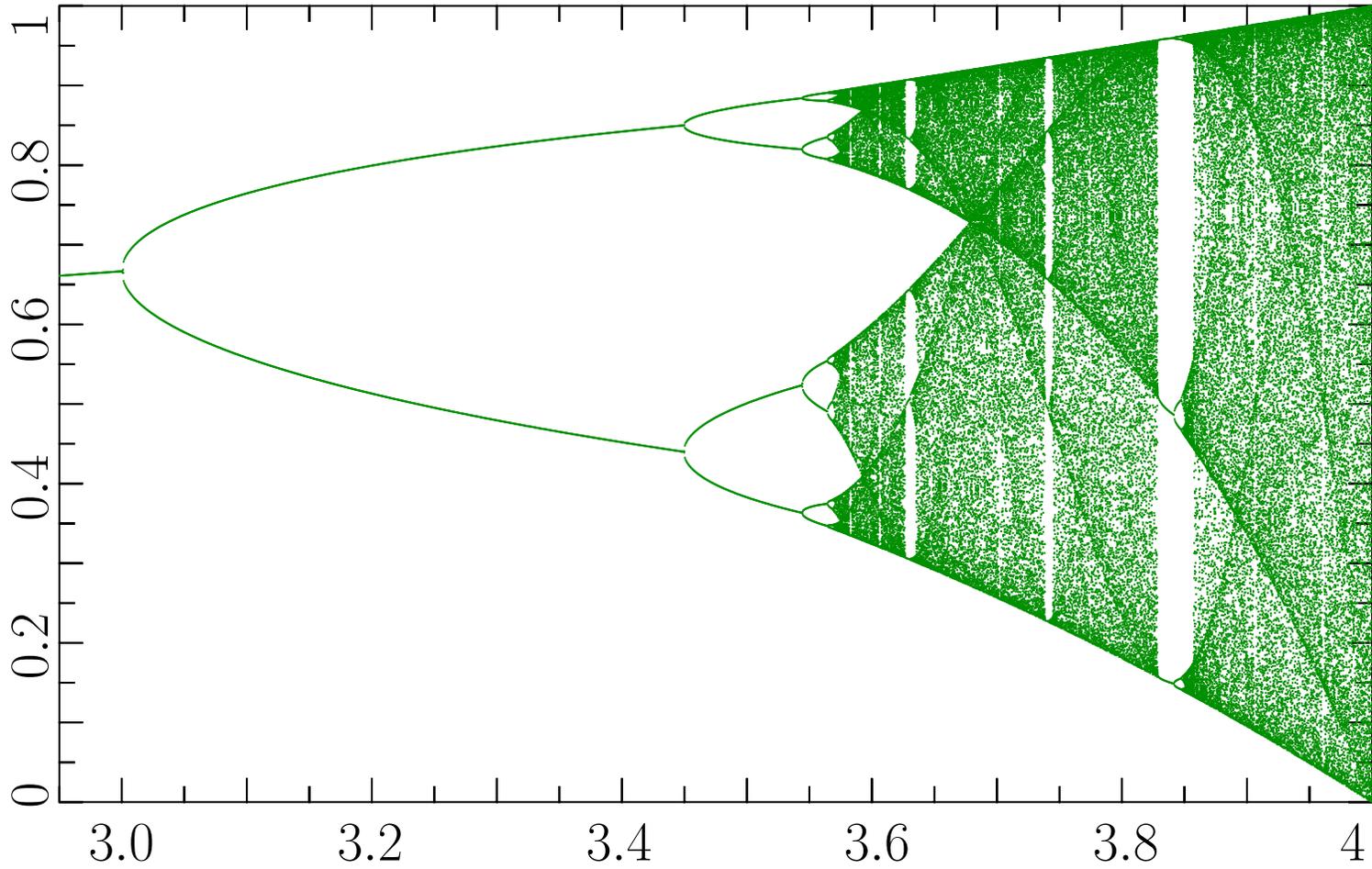
- Evoluzione per diversi valori di  $\lambda$ .
  - $\lambda = 0.98$ : estinzione,  $\phi^n \rightarrow 0$ .
  - $\lambda = 1.1$ : punto stazionario positivo (vita!).
  
  - $\lambda = 3.43$ : orbita di periodo 2.
  - $\lambda = 3.5$ : orbita di periodo 4.
  
  - $\lambda = 3.563$ : orbita di periodo 8.
  - $\lambda = 3.88$ : nessun attrattore; comportamento caotico.



- La mappa  $\phi^2$ .
  - Al crescere di  $\lambda$  si ha una biforcazione a forchetta che genera una coppia di punti stazionari stabili.
  - I due punti sono un'orbita periodica per la mappa  $\phi$ .
- Il comportamento locale della mappa  $\phi^2$ .
  - Un intervallo intorno al minimo centrale viene mappato su se stesso.
  - La forma "a gobba", qualitativa è la stessa della mappa originale, salvo un'inversione dell'asse verticale, del resto innocua.
  - Al variare di  $\lambda$ , nell'intervallo isolato la mappa  $\phi^2$  riproduce il comportamento qualitativo della mappa  $\phi$  sull'intervallo iniziale.



- La cascata di biforcazioni al variare di  $\lambda$ .



$j$	$\lambda_j$	$\Delta_j = \lambda_j - \lambda_{j-1}$	$\Delta_j/\Delta_{j-1}$
1	3.000000		
2	3.449489	$4.4949 \times 10^{-1}$	
3	3.544090	$9.4611 \times 10^{-2}$	4.7514
4	3.564407	$2.0316 \times 10^{-2}$	4.6562
5	3.568759	$4.3521 \times 10^{-3}$	4.6682
6	3.569692	$9.3219 \times 10^{-4}$	4.6687

- La costante di Feigenbaum.
  - Per  $\lambda_0 = 3$  nasce il punto stazionario non banale ( $\bar{x} \neq 0$ ); è un'orbita di periodo 1.
  - Si ha una successione  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  di valori critici per cui avviene un biforcazione con raddoppio di periodo.
  - A ogni biforcazione si genera un'orbita periodica stabile di periodo  $2, 2^2, 2^4, \dots$ , mentre le orbite precedenti continuano a esistere diventando instabili.
  - È interessante calcolare la successione  $\Delta_j = \lambda_j - \lambda_{j-1}$  e il rapporto  $\Delta_j/\Delta_{j-1}$ . I primi valori nella tabella a lato.

- La costante universale trovata da Feigenbaum: esiste il limite

$$\frac{\lambda_j - \lambda_{j-1}}{\lambda_{j+1} - \lambda_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} = 4.6692016091029 \dots$$

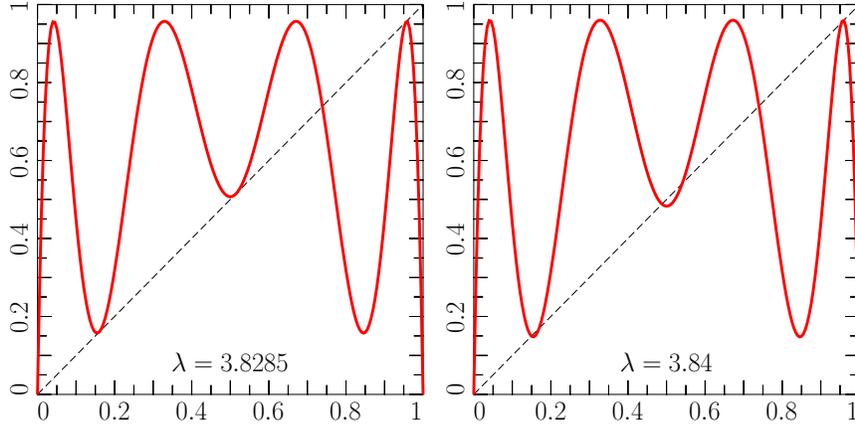
*indipendente dalla mappa*, purché abbia il comportamento qualitativo “a gobba”.

- Per la mappa logistica si identifica anche un limite

$$\lambda_j \rightarrow \lambda_\infty = 3.5699456 \dots$$

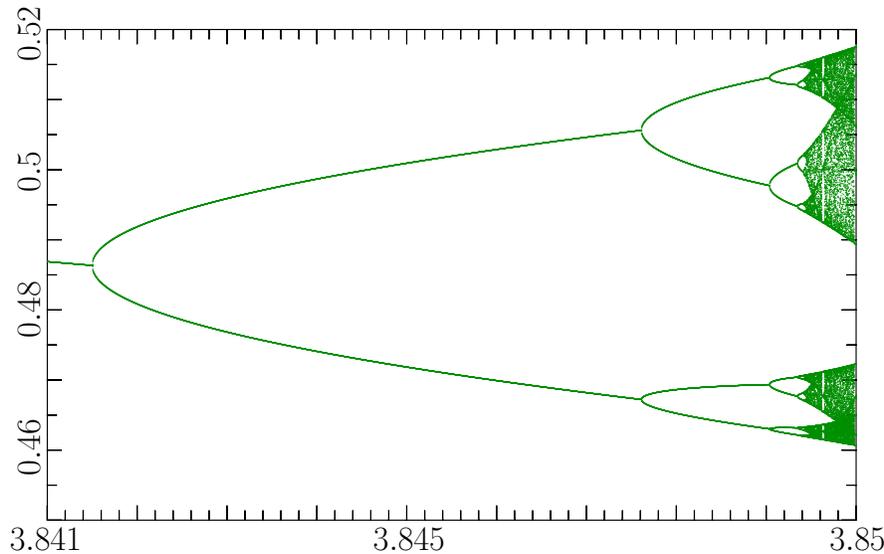
(questo non indipendente dalla mappa).

- Per  $\lambda > \lambda_\infty$  la mappa diventa caotica, ma ...

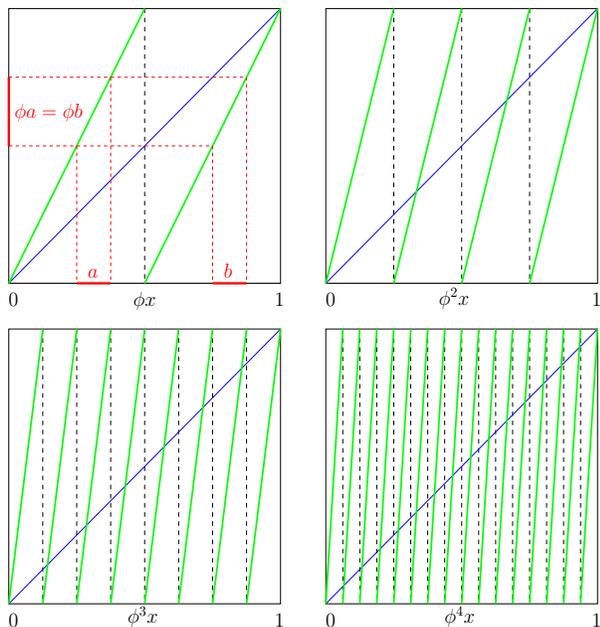


- Una biforcazione tangente genera un punto stazionario per la mappa  $\phi^3$ ; orbita di periodo 3.
  - Al crescere di  $\lambda$  si ripete il fenomeno del raddoppio di periodo:
  - I periodi sono  $3, 3 \times 2^1, 3 \times 2^2, \dots$
  - Si trova ancora il limite

$$\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} = 4.6692016091029 \dots$$



- Il grafico ingrandito delle biforcazioni di  $\phi^3$  sull'intervallo interessato.
  - si osserva la cascata di biforcazioni, simile a quella della mappa  $\phi$ .
- Lo stesso fenomeno si ripete per infiniti numeri dispari, ciascuno con il suo intervallo.



### 3.3 Il meccanismo di espansione-contrazione

#### 3.3.1 La mappa del raddoppio del cerchio

- Mappa:

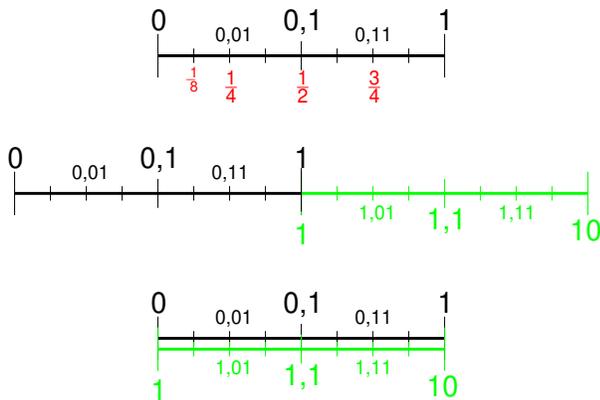
$$\phi x = 2x \pmod{1} .$$

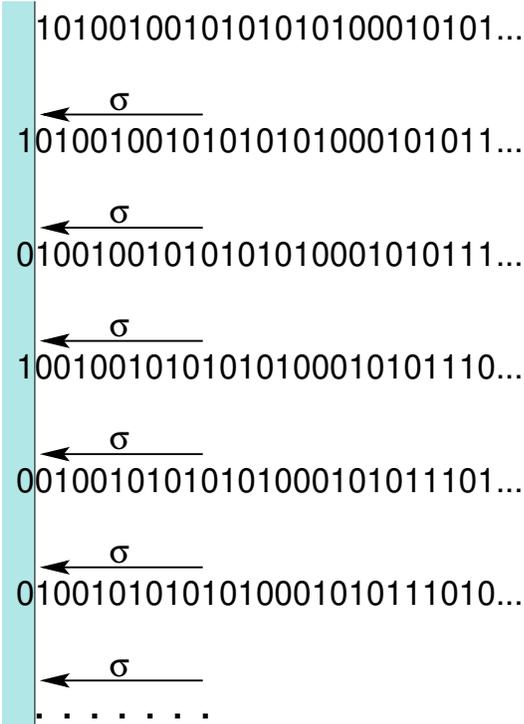
- La mappa non è univoca: ogni punto ha due antecedenti distinti; ogni intervallino ha due intervallini antecedenti distinti.
- Conserva la misura: la lunghezza di un intervallino è pari alla somma delle lunghezze dei suoi antecedenti.
- Proprietà di espansione: la distanza tra punti vicini viene raddoppiata a ogni iterazione.

- Coordinata  $x \in [0, 1]$  sul cerchio.

- La circonferenza viene stirata di un fattore 2 e riavvolta su se stessa.
- Rappresentazione dei numeri in base 2.
- Esempio:  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  ha la rappresentazione

0.1011010100000100111100110011001111110011101111...



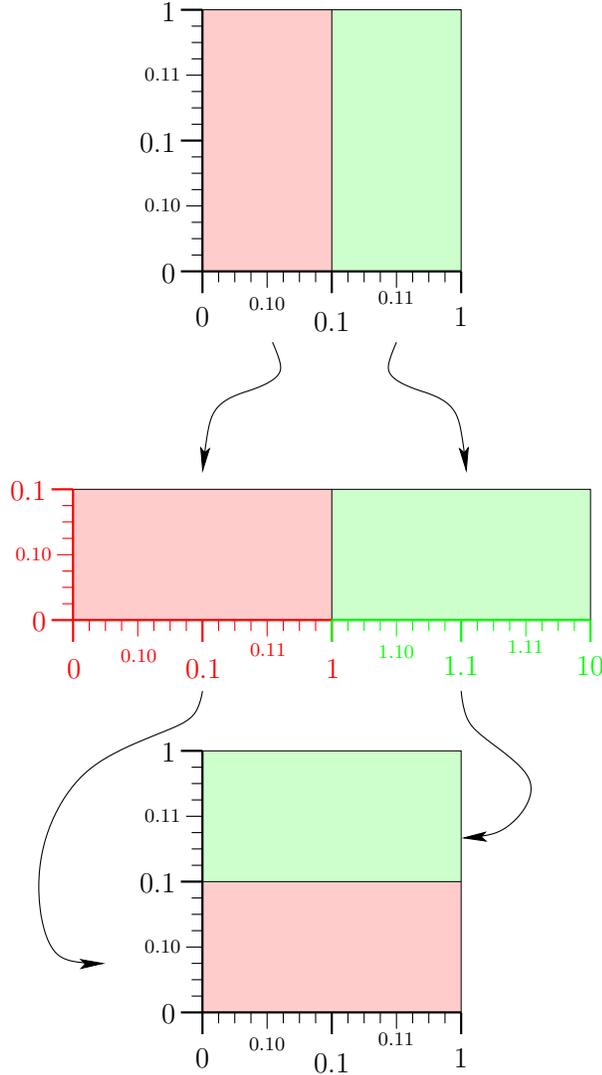


### 3.3.2 Lo shift di Bernoulli

- Successioni  $\{x_0x_1x_2x_3\dots\}$  di cifre  $\{0, 1\}$ , infinite a destra,
- Lo shift di Bernoulli:

$$\sigma(x_0x_1x_2x_3x_4\dots) = (x_1x_2x_3x_4\dots) :$$

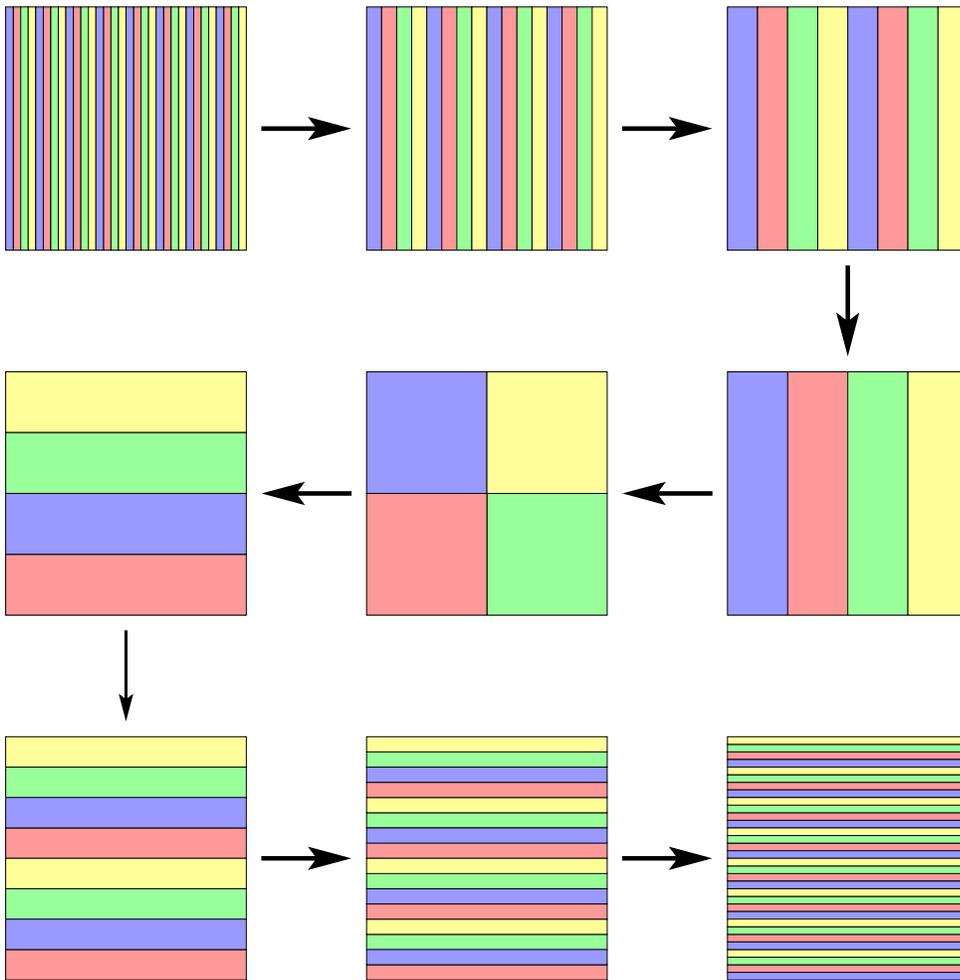
- si fa scivolare a sinistra tutta la successione e si elimina la prima cifra.
- La connessione con la mappa del raddoppio del cerchio.
  - Ogni successione rappresenta un numero dell'intervallo  $[0, 1]$ : è la *mantissa*.
  - In questo caso bisogna escludere tutte le successioni che terminano con infinite cifre 1:  $0.011111111111111\dots = 0.1$ , &c;
  - ma sono ammesse le successioni che terminano con infinite cifre 0: sono razionali con rappresentazione binaria finita, ossia frazioni con denominatore potenza di 2.
  - Lo shift a sinistra corrisponde alla moltiplicazione per 2.
  - L'eliminazione della prima cifra corrisponde all'operazione mod 1.



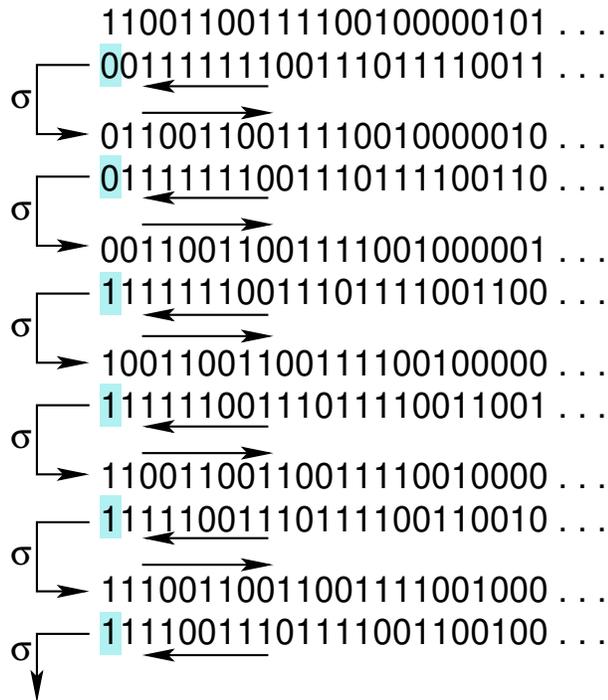
### 3.3.3 La mappa del panettiere

- Rappresentazione topologica:
  - Si parte con un quadrato (di lato 1, diciamo).
  - Si raddoppia la larghezza e si dimezza l'altezza; si trova un rettangolo di base 2 e altezza 1/2. *L'area viene conservata.*
  - Si taglia il rettangolo a metà (figura) in due rettangoli di base 1 e altezza 1/2.
  - Si sovrappone il rettangolo di destra a quello di sinistra, riottenendo un quadrato di lato 1.
  
- Proprietà di espansione-contrazione: *la distanza tra punti vicini viene raddoppiata in orizzontale e dimezzata in verticale.*
  
- Rappresentazione algebrica:
  - Mappa del quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$ 

$$x' = 2x - [2x] , \quad y' = \frac{1}{2}(y + [2x]) .$$
  - Conviene ancora scrivere le coordinate in rappresentazione binaria.
  - Si applica uno shift a sinistra alla mantissa di  $x$  e si rimuove la parte intera, come per il raddoppio del cerchio.
  - Si applica uno shift a destra della mantissa di  $y$  e si pone come prima cifra la parte intera di  $x$ .



- Iterazione della mappa.
  - La mappa è invertibile, con qualche cautela sui bordi: si toglie il lato destro e quello superiore del quadrato.
  - La mappa diretta  $\phi^n$  crea  $2^n$  strisce sovrapposte di altezza  $2^{-n}$ .
  - La mappa inversa  $\phi^{-n}$  crea  $2^n$  strisce accostate di altezza  $2^{-n}$ .
  - È più o meno come impastare il pane; da qui il nome “mappa del panettiere”.



- Ancora lo shift di Bernoulli, ma con qualche variante.
  - La successione  $\{\dots x_{-2}x_{-1}|x_0x_1x_2\dots\}$  è infinita sia a sinistra che a destra.
  - Conviene fissare un punto di separazione della successione nella parte sinistra e destra, indicato dal simbolo  $|$  qui sopra.
  - Lo shift a sinistra si definisce come
 
$$\sigma\{\dots x_{-2}x_{-1}|x_0x_1x_2\dots\} = \{\dots x_{-2}x_{-1}x_0|x_1x_2\dots\},$$
 ossia si sposta a destra di un posto il segno di separazione.
- La connessione con la mappa del panettiere.
  - Convenzione:
    - la parte destra della successione è la mantissa della coordinata  $x$ ;
    - la parte sinistra della successione è la mantissa della coordinata  $y$ , letta da destra a sinistra.
  - Lo shift sposta la prima cifra delle mantissa di  $x$  al primo posto della mantissa di  $y$  (figura).
  - Si intuisce che il processo debba essere caotico, come per il raddoppio del cerchio, ... ma un po' di riflessione in più non guasta.

### 3.4 La dinamica simbolica

- Ingredienti:

- Un alfabeto di simboli; qui ci limitiamo a  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ , ma si può considerare un numero di simboli arbitrario; ad esempio l'alfabeto  $\{a, b, c, \dots, z\}$  che usiamo abitualmente.
- Lo spazio delle successioni infinite a destra

$$\Sigma = \{ \{x_0 x_1 x_2 \dots\}, x_j \in \mathcal{A} \} ,$$

- oppure lo spazio delle successioni  $\{\dots x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 x_2 \dots\}$  infinite sia a sinistra che a destra, ma qui ci limitiamo a  $\Sigma$  per semplicità.
- Una *distanza* tra due elementi (o punti) dello spazio:

$$\text{dist}(x, y) = \sum_{j \geq 0} \frac{|x_j - y_j|}{2^j} ,$$

ben definita perché la serie è certamente convergente.

- La *topologia* indotta dalla distanza.
- La dinamica: lo shift di Bernoulli su  $\Sigma$

$$\sigma\{x_0 x_1 x_2 x_3 \dots\} = \{x_1 x_2 x_3 \dots\} .$$

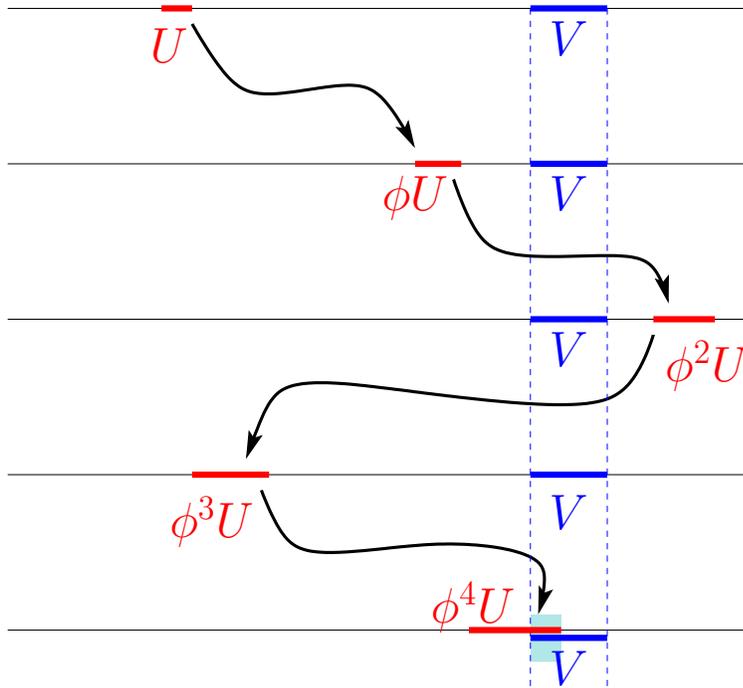
- Descrive, ad esempio, il meccanismo del “testa o croce”:

- Ogni successione rappresenta il risultato possibile di una sequenza infinita di lanci.
- Lo spazio  $\Sigma$  contiene tutti i risultati possibili, inclusi quelli tipo  $\{0000000000000000 \dots\}$  o  $\{1111111111111111 \dots\}$  che tenderemmo a considerare “strani” o “impossibili”.

- La connessione evidente col gioco del “testa o croce” induce a pensare che la mappa sia caotica, ma ...

**come possiamo caratterizzare il comportamento caotico?**

### 3.4.1 Una possibile caratterizzazione del caos (Devaney)

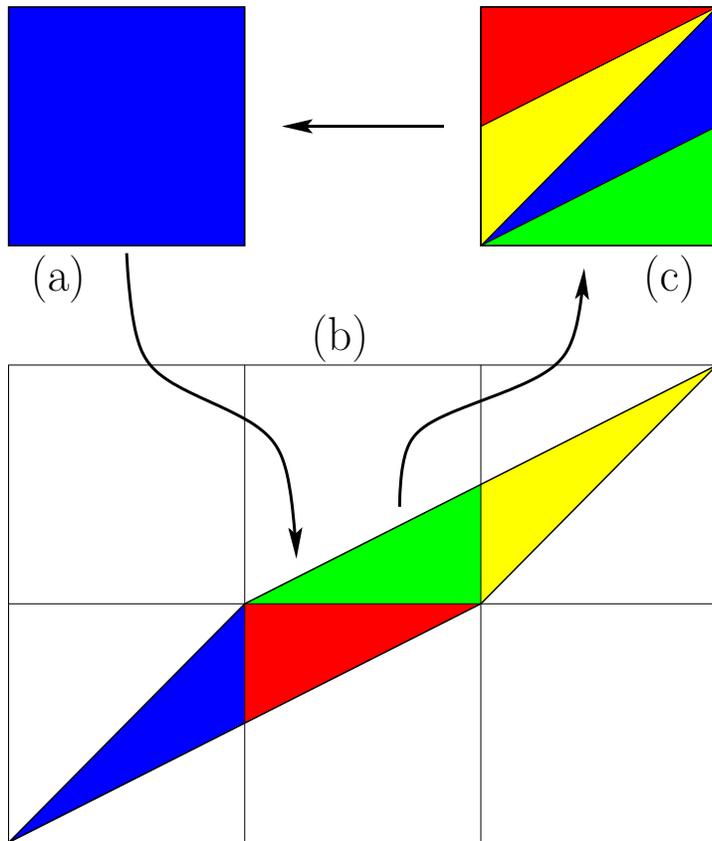


- Si richiedono due proprietà:
  - (i) *La mappa ammette un insieme denso di orbite periodiche.*  
In altre parole: in ogni aperto esiste almeno un punto che appartiene a un'orbita periodica.
  - (ii) *La mappa è topologicamente transitiva.*  
In termini più comprensibili (magari di poco, ma la figura lo illustra per gli intervalli): dati due aperti  $U$  e  $V$  disgiunti esiste un'immagine  $\phi^n U$  che soddisfa  $\phi^n U \cap V \neq \emptyset$ .
- Enunciati alternativi della proprietà (ii):
  - Dati due aperti  $U$  e  $V$  disgiunti esiste un punto  $x \in U$  tale che per un qualche  $n$  vale  $\phi^n x \in V$ .
  - La mappa ammette un'orbita densa (ossia: esiste  $x$  tale che l'orbita  $\phi^n x$  visita ogni aperto).

- *La dinamica dello shift in  $\Sigma$  soddisfa queste proprietà?*

- Premesse:
  - Ogni sequenza  $x = \{x_0 \dots x_n\}$  periodica genera un'orbita periodica. Esempio:  
 $x = \{1101\} = \{1101 1101 1101 \dots\}$  genera un'orbita periodica;
  - Una sequenza  $\{x_0 \dots x_k \langle x_{k+1} \dots x_{k+n} \rangle\}$  periodica con un antiperiodo genera un'orbita definitivamente periodica (lo diventa dopo  $k$  iterazioni). Esempio:  
 $x = \{10110101 \langle 1011 \rangle\}$  genera un'orbita che diventa periodica dopo 8 iterazioni:  $\phi^8 x = \{1011\}$ .
  - Un punto che ha una rappresentazione binaria non periodica genera un'orbita non periodica né definitivamente periodica.
- La proprietà topologica fondamentale: costruzione di una base di aperti.
  - Sono aperti tutti gli insiemi di successioni (o punti) che hanno in comune i primi  $k$  simboli, con  $k > 0$  arbitrario. Esempio:  
 $\{10101110 \dots\}$  e  $\{1011010 \dots\}$  appartengono allo stesso aperto  
 $\{0100101 \dots\}$  appartiene a un aperto diverso.
- La mappa ammette un insieme denso di orbite periodiche.
  - L'aperto delle successioni  $\{a_1 a_2 \dots a_k \dots\}$  con  $a_1, \dots, a_k$  fissati viene visitato da qualunque orbita periodica il cui periodo contenga la sequenza  $a_1 a_2 \dots a_k$ . Esempio:  
 l'orbita periodica con punto iniziale  $x = \{1011 \langle a_1 a_2 \dots a_k \rangle 1101\}$  visita l'aperto voluto dopo 4 iterazioni.
- La mappa ammette almeno un'orbita densa.
  - Il punto iniziale  $\{ \underbrace{0 1}_{1 \text{ cifra}} \underbrace{00 01 10 11}_{2 \text{ cifre}} \underbrace{000 001 010 011 100 101 110 111}_{3 \text{ cifre}} \dots \}$   
 contiene tutte le possibili sequenze finite di simboli; quindi l'orbita visita qualunque intervallo.
- Esercizi per l'ascoltatore:
  - Trovare un'orbita non periodica che non sia densa.
  - Trovare un'orbita non periodica che non visita mai un aperto assegnato.
  - Trovare un'orbita non periodica che abbia come unico punto di accumulazione la sequenza nulla  $\{0\}$ .

### 3.5 La divergenza esponenziale delle orbite



#### 3.5.1 Il gatto di Arnold

- La mappa (invertibile) del toro  $\mathbb{T}^2$  su se stesso

$$x' = 2x + y \pmod{1}, \quad y' = x + y \pmod{1},$$

o, in scrittura più compatta,

$$\phi \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

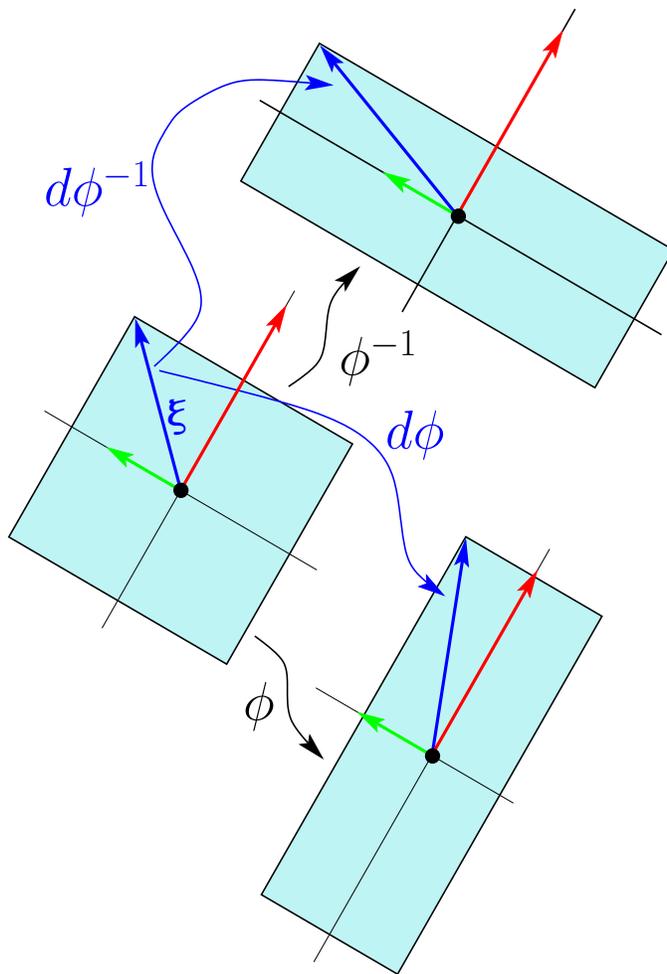
- Il determinante della matrice è 1; la mappa conserva l'area, ed è simile ai sistemi conservativi della Meccanica.
- La matrice ha autovalori e autovettori

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

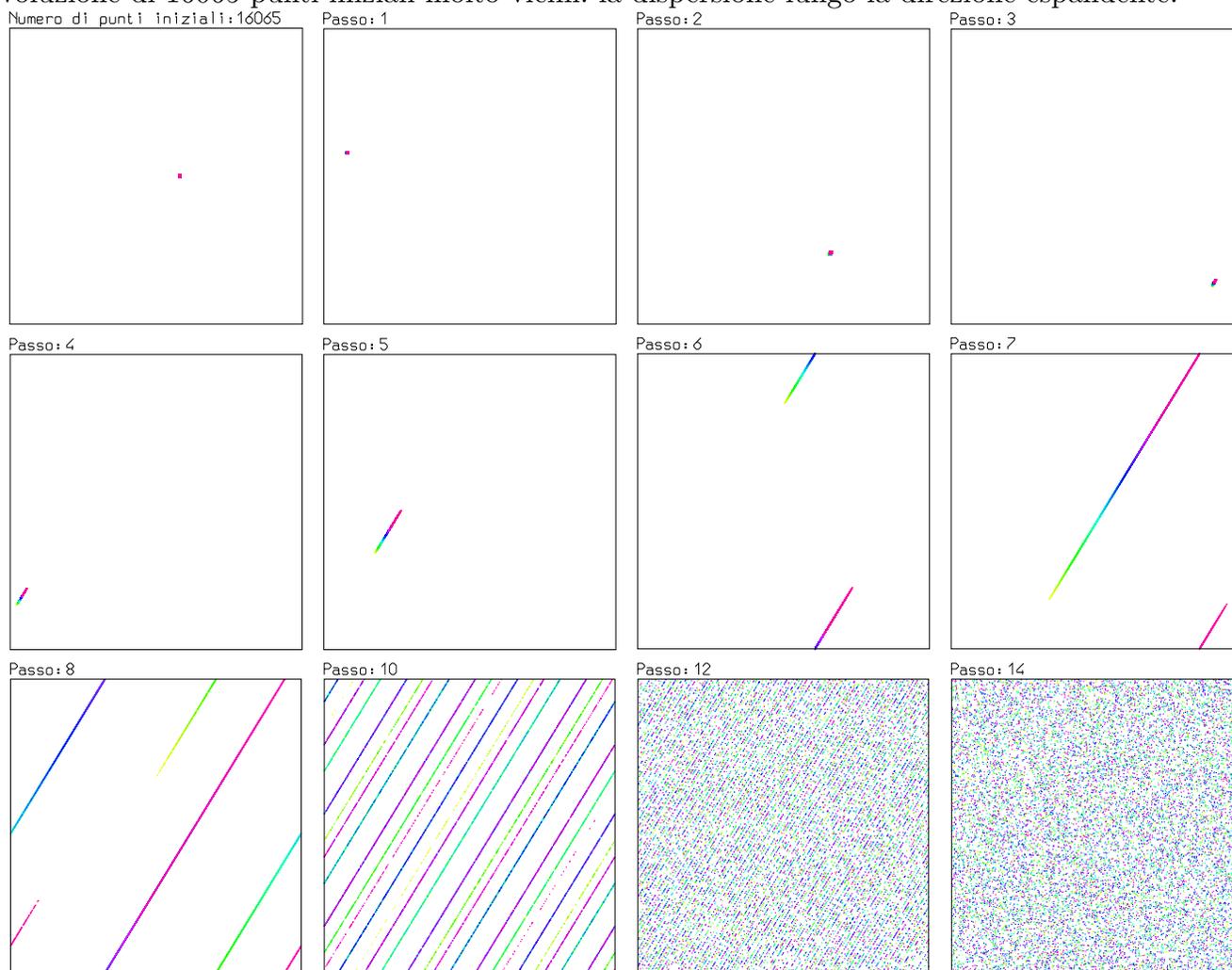
Gli autovettori sono ortogonali.

- L'autovettore  $\mathbf{u}_1$  identifica una direzione contraente:  $\lambda_1 < 1$ .
- L'autovettore  $\mathbf{u}_2$  identifica una direzione espandente:  $\lambda_2 > 1$ .
- Il quadrato viene trasformato nel piano in un parallelogramma di egual area; poi viene ricomposto sul toro  $\mathbb{T}^2$  (figura).



- L'evoluzione di orbite vicine.
  - Punti iniziali vicini:  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} + \xi$  con  $\|\xi\|$  piccola.
  - Applico la mappa:
 
$$\phi(\mathbf{x} + \xi) - \phi\mathbf{x} = d\phi\xi = A\xi ;$$
 descrive l'evoluzione della distanza tra punti vicini.
- Proprietà di iperbolicità:
  - In ogni punto il differenziale  $d\phi$  ha un autovettore contraente (verde) e uno espandente (rosso).
  - La mappa manda la direzione contraente nel punto  $\mathbf{x}$  nella direzione contraente nel punto  $\phi\mathbf{x}$ ; lo stesso per la direzione espandente.
- Evoluzione di una piccola area intorno al punto iniziale.
  - La mappa diretta  $\phi$  contrae l'area nella direzione dell'autovettore contraente e la espande nella direzione dell'autovettore espandente.
  - La mappa inversa  $\phi^{-1}$  espande l'area nella direzione dell'autovettore contraente e la contrae nella direzione dell'autovettore espandente.
  - L'azione è messa in evidenza prendendo un quadrato con lati paralleli agli autovettori.
- L'iterazione della mappa contrae ed espande sistematicamente *sempre nella stessa direzione*.

- Evoluzione di 16065 punti iniziali molto vicini: la dispersione lungo la direzione espandente.

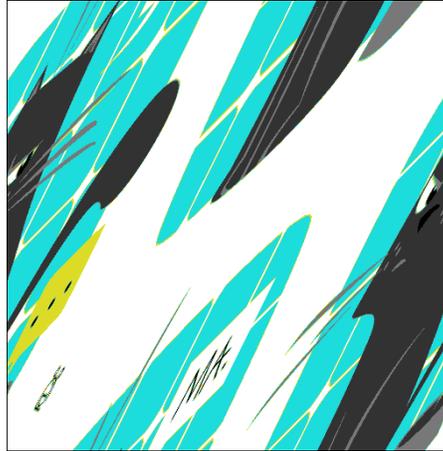


- Un'immagine globale dell'evoluzione: il mescolamento rapido delle orbite.

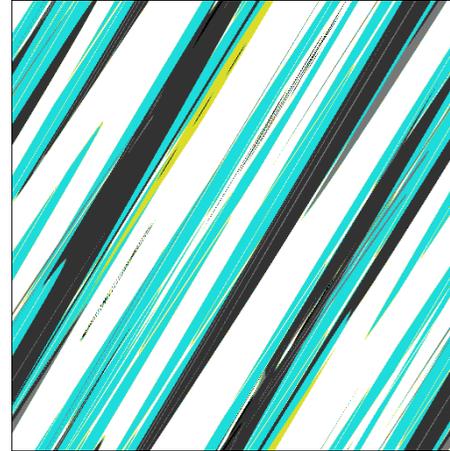
Passo 0



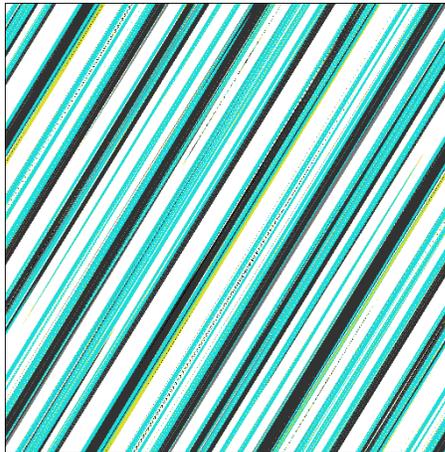
Passo 1



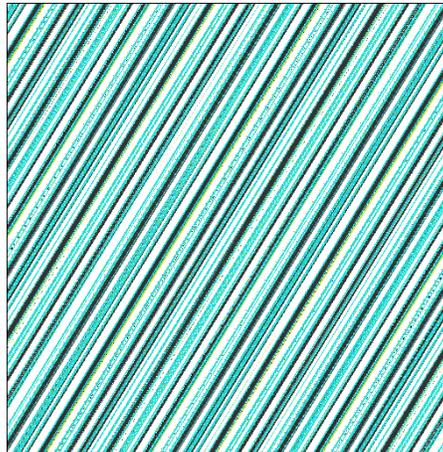
Passo 2



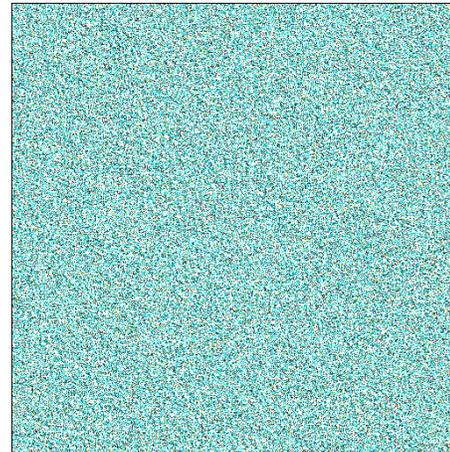
Passo 3



Passo 4



Passo 8





# 4

## LA COESISTENZA INESTRICABILE DI ORDINE E CAOS

- L'uragano Poincaré.
- La sezione di Poincaré.
- Modelli non lineari: mappe che conservano l'area.
- Separatrici e punti omoclini.
- La standard map di Chirikov (1969).

- La vicenda del premio del Re Oscar II di Svezia e Norvegia, bandito nel 1885.

*A system being given of a number whatever of particles attracting one another mutually according to Newton's law, it is proposed, on the assumption that there never takes place an impact of two particles to expand the coordinates of each particle in a series proceeding according to some known function of time and converging uniformly for any space of time.*

*It seems that this problem, the solution of which will considerably enlarge our knowledge regarding the system of the Universe, might be solved by means of the analytical resources at our present disposition; this may at least be fairly supposed, because shortly before his death Lejeune-Dirichlet communicated to a friend of his, a mathematician, that he had discovered a method of integrating the differential equations of mechanics, and he had succeeded, by applying this method, to demonstrate the stability of our planetary system in an absolutely strict manner. Unfortunately we know nothing about this method except that the starting point for his discovery seems to have been the theory of infinitely small oscillations. It may, however, be supposed almost with certainty that this method was not based on long and complicated calculations but on the development of a simple fundamental idea, which we may reasonably hope to find again by means of earnest and persevering study.*

Sia dato un sistema formato da un numero arbitrario di particelle che si attraggono mutualmente secondo la legge di Newton. Si propone, assumendo che non vi siano mai collisioni tra due particelle, di esprimere le coordinate di ciascuna particella come sviluppo in serie di funzioni note del tempo, uniformemente convergenti su qualunque intervallo temporale.

Ci sono ragioni per pensare che questo problema, la cui soluzione ampliirebbe in modo sostanziale la nostra conoscenza del sistema dell'universo, si possa risolvere con gli strumenti analitici disponibili. Questo si può perlomeno supporre ragionevolmente, perché Lejeune-Dirichlet, poco prima della sua morte, comunicò a un amico, un matematico, che aveva trovato il modo di integrare le equazioni della Meccanica, e applicando quel metodo era riuscito a dimostrare rigorosamente la stabilità del nostro Sistema Planetario. Purtroppo non sappiamo nulla di quel metodo, salvo il fatto che il punto di partenza della sua scoperta sembra essere la teoria delle oscillazioni infinitamente piccole. Si può però supporre, senza discostarsi troppo dal vero, che quel metodo non richiedesse calcoli lunghi e complessi, ma solo lo sviluppo di un'idea fondamentale ma semplice, che si può ragionevolmente sperare di riscoprire dedicandosi con assiduità e perseveranza allo studio.

## 4.1 L'uragano Poincaré

- Il premio viene assegnato a Poincaré.
  - Le motivazioni:

*Il ressort de ce rapport que la commission a été de l'opinion unanime, que le mémoire qui est intitulé "Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique" avec la devise "Numquam præscriptos transibunt sidera fines", est l'œuvre profonde et originale d'un génie mathématique dont la place est marquée parmi les grands géomètres du siècle. Les plus importantes et les plus difficiles questions, comme la stabilité du système du monde, l'expression analytique des coordonnées des planètes par des séries de sinus et de cosinus des multiples du temps, puis l'étude on ne peut plus remarquable, des mouvements asymptotiques, la découverte de formes de mouvement où les distances des corps restant comprises entre deux limites fixes, on ne peut cependant exprimer leurs coordonnées par des séries trigonométriques, d'autres sujets encore que nous n'indiquons point, sont traités par des méthodes qui ouvrent, il n'est que juste de le dire, une époque nouvelle dans la mécanique céleste.*

Si evince da quel rapporto che la commissione, unanime, ha espresso il parere che la memoria dal titolo *Sul problema dei tre corpi e le equazioni della dinamica*, contraddistinta dal motto "Numquam præscriptos transibunt sidera fines" è l'opera profonda e originale di un genio matematico che entra di diritto tra i grandi geometri del secolo. I problemi più importanti e difficili, quali la stabilità del sistema del mondo, l'espressione analitica delle coordinate dei pianeti mediante serie di seni e coseni di multipli del tempo, e poi lo studio notevolissimo dei movimenti asintotici, la scoperta di forme del movimento in cui le distanze tra i corpi restano comprese tra due limiti fissati, ma le cui coordinate non sono esprimibili mediante serie trigonometriche, e altri argomenti che non stiamo a elencare, vi sono trattati con metodi che, è più che giusto dirlo, aprono una nuova epoca per la meccanica celeste.

- Poincaré riscrive la memoria per correggere un errore non banale, ma fecondo:
- *La scoperta dei fenomeni caotici nel problema dei tre corpi.*

- Un brano misterioso di Poincaré: il tentativo di descrivere una curva estremamente complessa, senza osare tracciarla.



Cliché Henri Manuel.

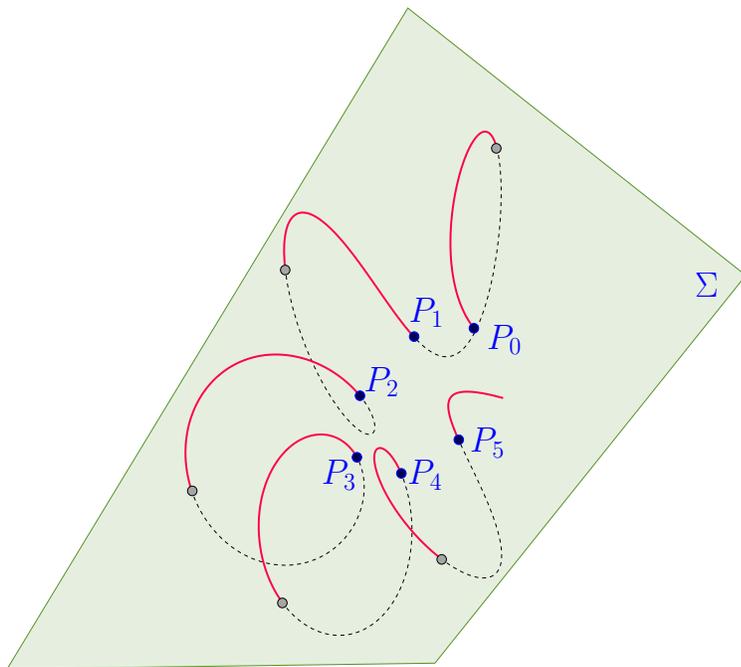
*Poincaré*

(Poincaré: *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Tome III)

- Un fenomeno ampiamente misconosciuto per oltre settant'anni.
  - È il fenomeno da capire, con pazienza!

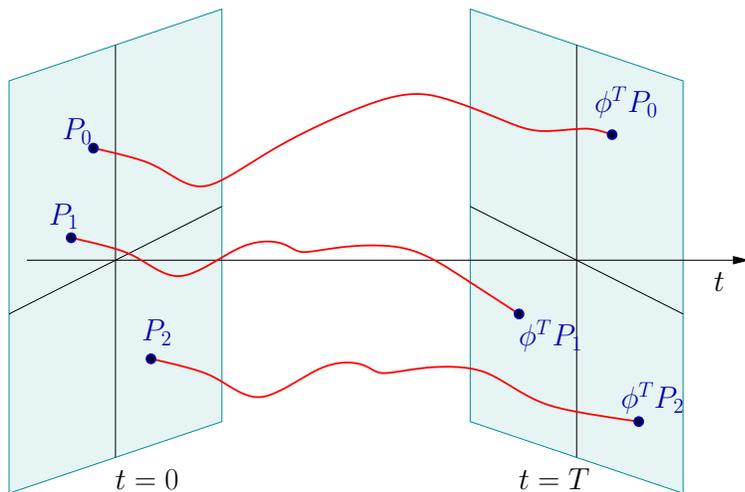
*Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune de ces deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer.*

Si provi a immaginare la figura formata da quelle due curve e dalle loro infinite intersezioni, ciascuna delle quali corrisponde a una soluzione doppiamente asintotica. Quelle intersezioni formano una sorta di intreccio, di tessuto, di rete a maglie infinitamente serrate; ciascuna di quelle due curve non deve mai tornare ad autointersecarsi, ma si deve ripiegare su se stessa in modo estremamente complicato per tornare a intersecare un'infinità di volte tutte le maglie della rete. Si resterà sbalorditi dalla complessità di quella figura, che io non provo neppure a tracciare.



## 4.2 La sezione di Poincaré

- Costruzione della sezione per un flusso.
  - È assegnato un punto iniziale  $P_0$ ;
  - Si sceglie una superficie  $\Sigma$  che passa per  $P_0$  e sia trasversale al campo vettoriale;
  - Si segue l'orbita fino all'intersezione successiva con la superficie  $\Sigma$  in un punto  $P_1$ , con lo stesso verso della velocità.
  - Si itera l'operazione, ottenendo una successione di punti  $P_0, P_1, P_2, \dots$
- Si ricava così una mappa  $\Psi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ , detta *sezione di Poincaré* o *mappa di Poincaré* per il flusso.
  - *Cave canem*: occorre scegliere opportunamente la superficie di sezione, in modo che l'orbita la intersechi un numero sufficiente di volte.
- La mappa  $\Psi$ , dove risulta definita, è un diffeomorfismo che eredita la regolarità del campo vettoriale  $X$ .
- Caso interessante:
  - $P_0$  è un punto fisso; corrisponde a un'orbita periodica.
  - $\Psi$  mappa un intorno di  $P_0$  in se stesso.



#### 4.2.1 Mappa su un periodo

- Un sistema di equazioni differenziali dipendente periodicamente dal tempo

$$\dot{x} = X(x, t), \quad X(x, t + T) = X(x, t),$$

- Spazio delle fasi esteso:  $\mathcal{G} \times \mathbb{T}$ , con  $\mathcal{G}$  varietà differenziabile;  $\mathbb{T}$  è il tempo.
- Mappa su un periodo  $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ : il flusso  $\phi^T$  al tempo  $T$ , il periodo: la *Théorie des conséquents* di Poincaré).
- Proprietà ovvia

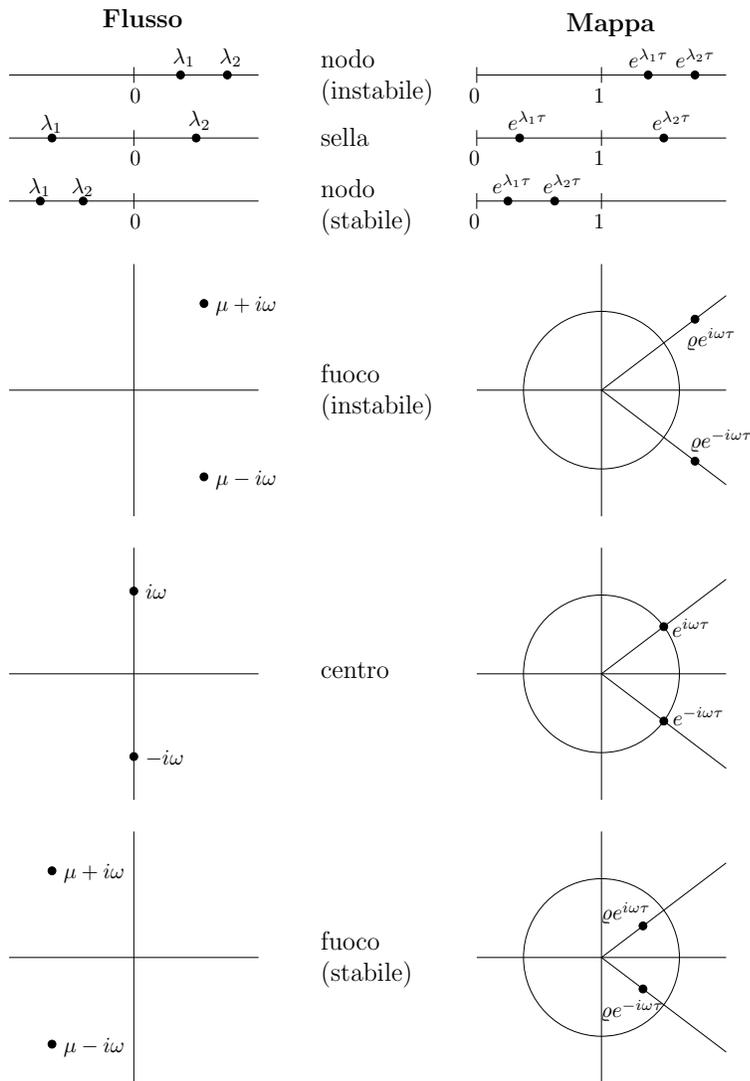
$$\phi^{kT} = \underbrace{\phi^T \circ \dots \circ \phi^T}_{k\text{-times}}.$$

- Altre proprietà:

- $\phi$  è un diffeomorfismo con le stesse proprietà di regolarità del campo vettoriale  $X(x, t)$ .
- Un'orbita periodica ha necessariamente periodo multiplo di  $T$ ;
- Un'orbita periodica di periodo  $T$  è rappresentata da un punto fisso della mappa  $\phi$ .
- Un'orbita periodica di periodo  $sT$  multiplo di  $T$  è rappresentata da un ciclo di  $s$  punti distinti:

$$\{P_0, P_1 = \phi^T(P_0), \dots, P_{s-1} = \phi^{s-1}(P_0)\}.$$

- Una varietà  $\Sigma$  invariante per il flusso nello spazio delle fasi esteso  $\mathcal{G} \times \mathbb{T}$  genera una varietà invariante per la sezione.



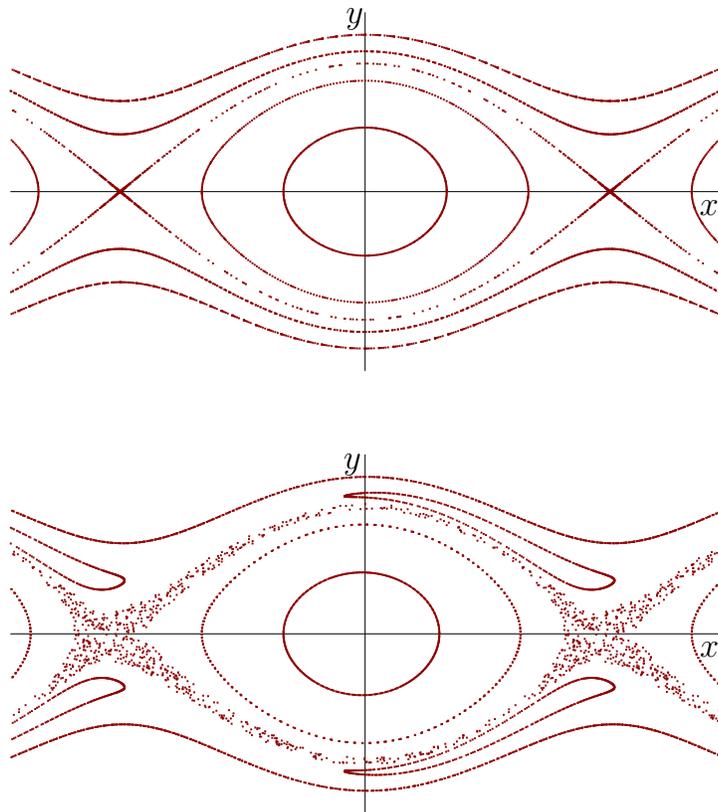
#### 4.2.2 Mappe lineari

- Il flusso del sistema lineare

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

- al tempo fissato  $\tau > 0$  genera la mappa  $\phi^\tau = e^{\tau A}$ .
- Classificazione degli equilibri: simile a quella del flusso (figura), ma...
  - Se  $A$  ha autovalori reali  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  allora  $e^{\tau A}$  ha autovalori reali  $e^{\tau \lambda_1}, \dots, e^{\tau \lambda_n}$ .
  - A ogni coppia di autovalori complessi coniugati  $\lambda = \mu \pm i\omega$  della matrice  $A$  corrisponde una coppia di autovalori  $\rho e^{\pm i\alpha}$  per  $\phi^\tau$ , con  $\rho = e^{\mu\tau}$  e  $\alpha = \omega\tau$ .
- *Cave canem*: la dipendenza da  $\tau$  comporta una maggiore flessibilità, con alcune conseguenze non banali:
  - Esempio: se  $\lambda = \pm i\omega$ , scegliendo  $\tau = \pi/\omega$  si trovano gli autovalori  $e^{i\omega\tau} = e^{-i\omega\tau} = -1$ , reali negativi.
  - Quantità rilevante: l'*angolo di rotazione*  $\alpha = \omega\tau$ , che dipende da  $\tau$ .
- Comportamento asintotico: l'origine è stabile nel passato (risp. futuro) se gli autovalori  $\rho e^{\pm i\alpha}$  hanno modulo  $\rho > 1$  (risp.  $\rho < 1$ ).
  - In breve: il comportamento della mappa è del tutto simile a quello del flusso solo nel caso iperbolico, ossia se  $\text{Re } \lambda \neq 0$ .

### 4.3 Modelli non lineari: mappe che conservano l'area



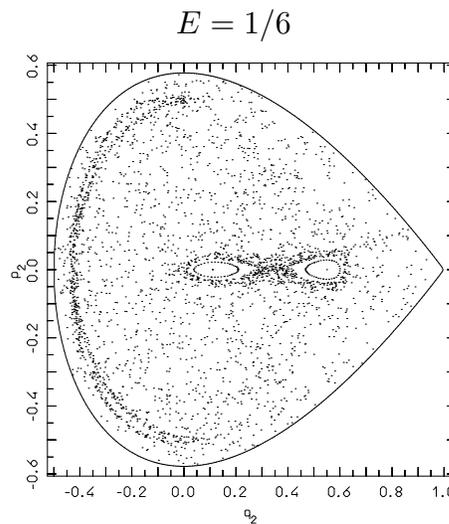
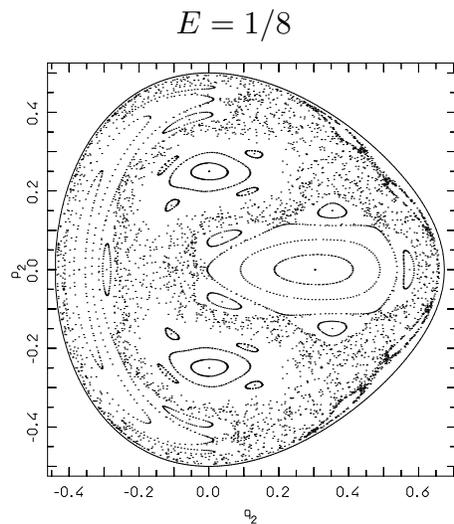
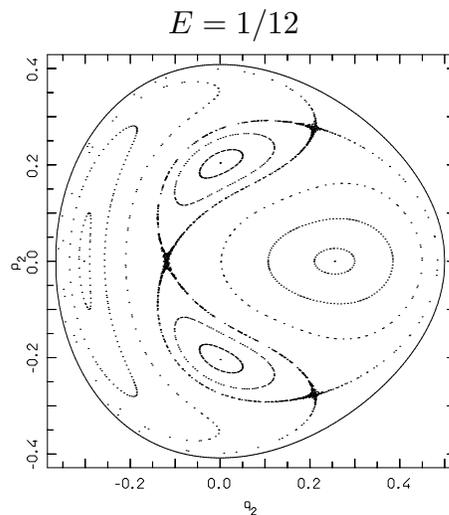
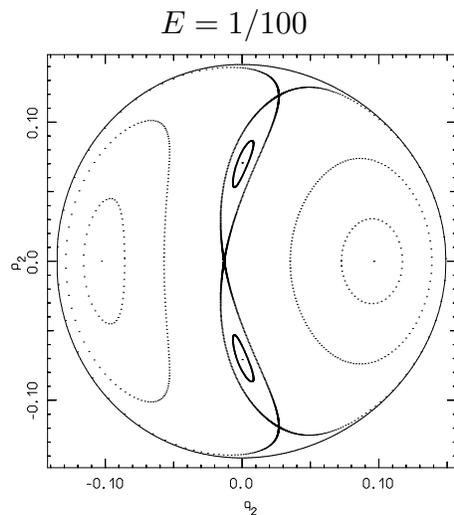
#### 4.3.1 Il pendolo con forzante periodica.

- Equazioni:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x + \varepsilon \sin(x - t),$$

con  $(x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ .

- Mappa su un periodo  $\phi^{2\pi}$  (il periodo della forzante).
- Orbite sulla sezione: successioni di punti (effetto stroboscopico).
  - Orbite periodiche banali:  $x(0) = 0, y(0) = 0$  (equilibrio inferiore) e  $x(0) = \pm\pi, y(0) = 0$  (equilibrio superiore); sono punti fissi per la sezione.
- Per  $\varepsilon = 0$  (pendolo imperturbato):
  - la superficie di energia costante è una varietà invariante a due dimensioni; sulla superficie di sezione vi sono delle curve invarianti (figura sopra).
- Per  $\varepsilon > 0$  (pendolo perturbato, figura sotto):
  - Orbite periodiche che sopravvivono.
  - Moti ordinati: curve invarianti che sopravvivono, con orbite non periodiche.
  - Moti caotici; orbite che riempiono una regione in modo casuale.



#### 4.3.2 Il modello di Hénon e Heiles (1964).

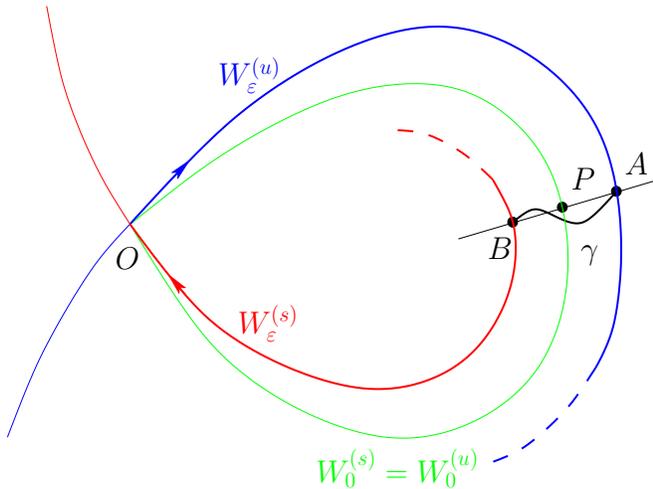
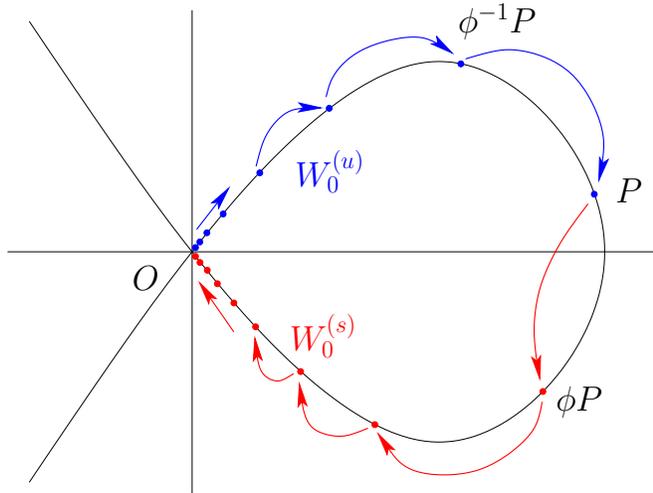
- Sistema Hamiltoniano

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3$$

- Equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= p_1, & \dot{p}_1 &= -q_1 - 2q_1 q_2, \\ \dot{q}_2 &= p_2, & \dot{p}_2 &= -q_2 - q_1^2 + q_2^2. \end{aligned}$$

- Mappa di Poincaré per il piano di sezione  $q_1 = 0$ .
  - A bassa energia il moto appare ordinato.
  - Il caos diventa visibile in prossimità della separatrice delle orbite periodiche instabili.
  - Per energia abbastanza alta la maggior parte delle orbite è caotica.



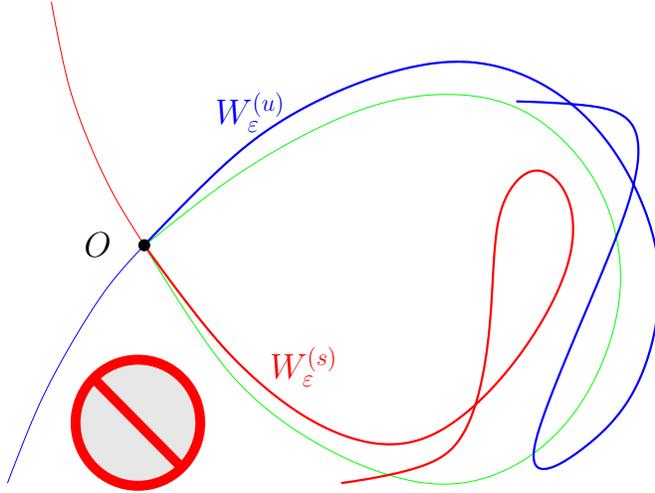
#### 4.4 Separatrici e punti omoclini

- Mappa imperturbata  $\phi_0$ , per  $\varepsilon = 0$ .
  - Il ramo  $W_0^{(u)}$  della varietà instabile di un punto fisso coincide con un ramo della varietà stabile  $W_0^{(s)}$  dello stesso punto. (il coppia a destra in figura).
  - Le orbite sulla varietà sono successioni infinite di punti (effetto stroboscopico).
  - Per ogni punto  $P \in W^{(u)}$  abbiamo

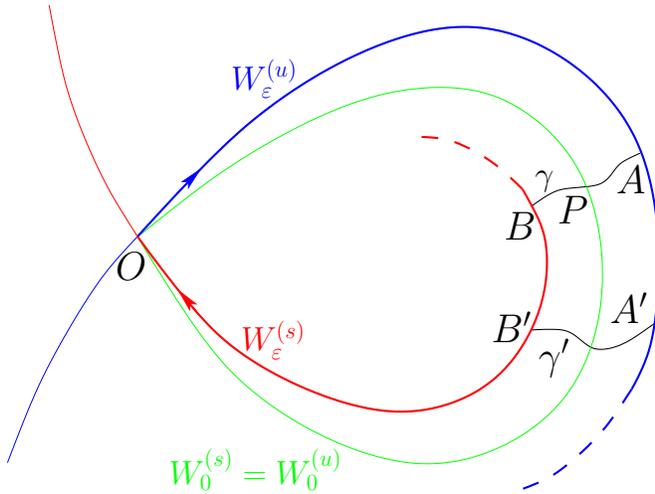
$$\phi^k P \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} O, \quad \phi^k P \xrightarrow[k \rightarrow -\infty]{} O.$$

- La mappa possiede infinite orbite asintotiche, parametrizzate dal punto iniziale.

- Mappa perturbata  $\phi_\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ).
  - La varietà stabile  $W_\varepsilon^{(s)}$  e quella instabile  $W_\varepsilon^{(u)}$  esistono (Poincaré), e sono tangenti in  $O$  rispettivamente alle varietà imperturbate  $W_0^{(s)}$  e  $W_0^{(u)}$ .
  - In un intorno di  $O$  la varietà perturbata  $W_\varepsilon^{(s)}$  ( $W_\varepsilon^{(u)}$ ) è il grafico di una funzione su  $W_0^{(s)}$  ( $W_0^{(u)}$ ).
  - Preso  $P_0 \in W_0^{(s)}$  ( $W_0^{(u)}$ ), per  $|k| < \mathcal{O}(1/\sqrt{\varepsilon})$ , grazie alla continuità, si ha  $\text{dist}(\phi_\varepsilon^k P, \phi_0^k P_0) = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ .
- Esistono degli archi di  $W_\varepsilon^{(u)}$  che  $W_\varepsilon^{(s)}$  che stanno rispettivamente a distanza  $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$  da  $W_0^{(u)}$  e  $W_0^{(s)}$ .



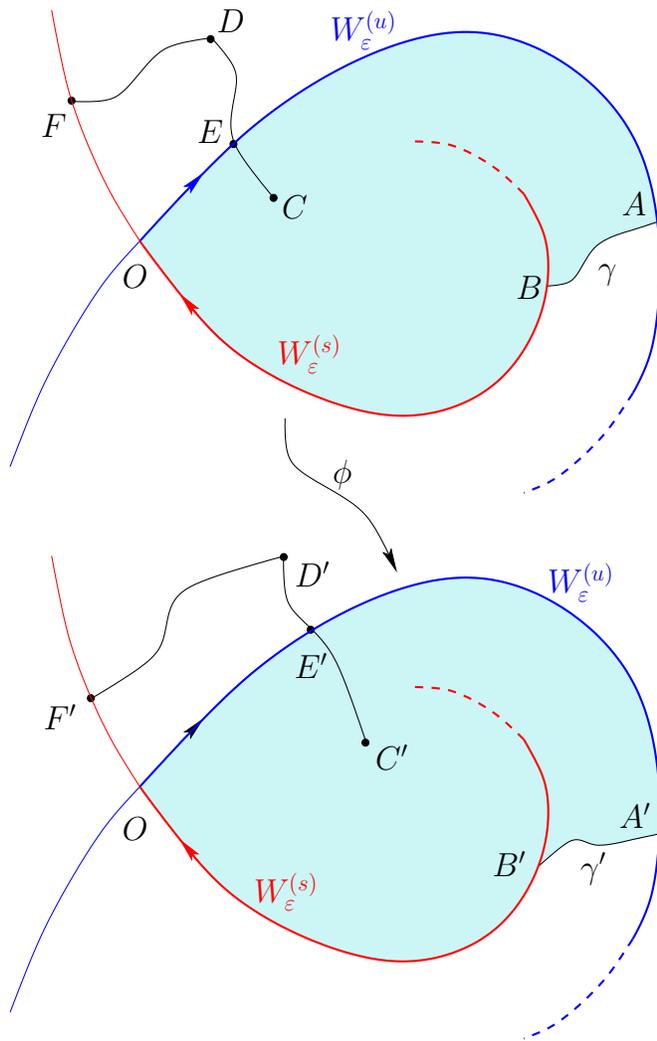
- Le varietà stabile e instabile non possono autointersecarsi (ossia  $W_\varepsilon^{(u)}$  e  $W_\varepsilon^{(s)}$  non hanno punti doppi).
  - Per contraddizione: sia  $P \in W_\varepsilon^{(u)}$  un punto doppio; allora  $\phi_\varepsilon^k P$  è punto doppio per ogni  $k$ .
  - Per  $k$  abbastanza grande  $\phi_\varepsilon^{-k} P \in W_\varepsilon^{(u)}$  è in un intorno di  $O$ , ed è un punto doppio;
  - contraddice il fatto che localmente  $W_\varepsilon^{(u)}$  è il grafico di una funzione.



#### 4.4.1 Esistenza di un punto omoclino

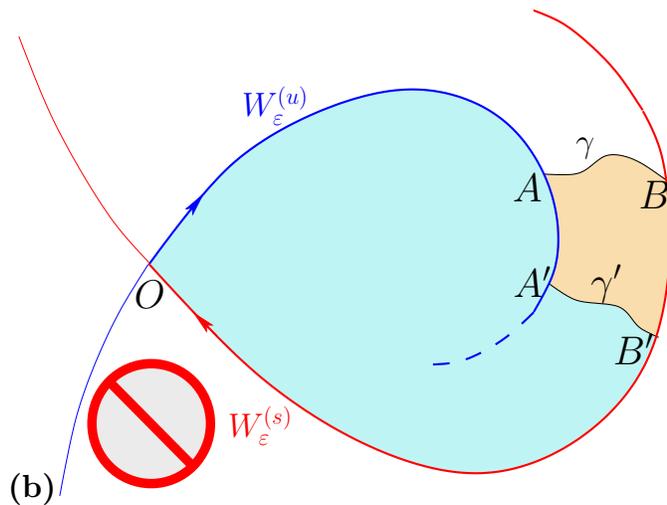
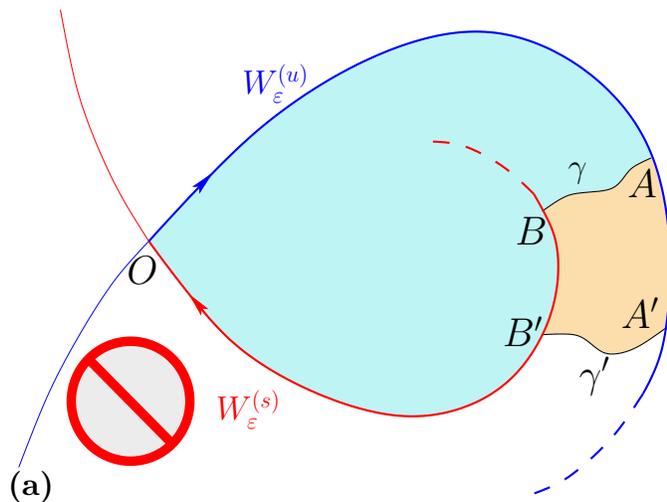
Le varietà stabile e instabile devono intersecarsi almeno in un punto; ossia  $W_\varepsilon^{(u)} \cap W_\varepsilon^{(s)} \neq \{O\}$ .

- Sia  $P \in W_0^{(u)} = W_0^{(s)}$ . Siano
  - $A \in W_\varepsilon^{(u)}$ ,  $B \in W_\varepsilon^{(s)}$ ,  $\text{dist}(P, B) = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ .
  - Sia  $\gamma$  una curva semplice tra  $A$  e  $B$ ; si può chiedere che la lunghezza di  $\gamma$  sia  $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ .
- Sia  $A' = \phi A$ ,  $B' = \phi B$ ,  $\gamma' = \phi(\gamma)$ .
  - Denotiamo:  $AA'$  l'arco di  $W_\varepsilon^{(u)}$  tra  $A$  e  $A'$ ;  $BB'$  l'arco di  $W_\varepsilon^{(s)}$  tra  $B$  e  $B'$ .
- Vogliamo dimostrare che  $AA'' \cap BB'' \neq \emptyset$ .



- *Affermazione preliminare: L'immagine del poligono curvilineo chiuso  $OABO$  è il poligono curvilineo chiuso  $\phi(OABO) = OA'B'O$ .*
  - *Ossia: un punto esterno (interno) a  $OABO$  viene mappato su un punto esterno (interno) a  $OA'B'O$ .*
- *Dimostrazione. Per contraddizione.*
  - *$OABO$  è una regione semplicemente connessa, per costruzione. Per continuità, tale è  $OA'B'O$ .*
  - *L'immagine di  $\partial(OABO)$  è  $\partial(OA'B'O)$ ; ovvio.*
  - *Sia  $\psi$  una curva semplice continua che connette due punti arbitrari, e sia  $\psi' = \phi(\psi)$ . Allora  $\psi'$  è semplice e continua (il flusso  $\phi$  è continuo e biunivoco), e*

$$\#\{\psi \cap \partial(OABO)\} = \#\{\psi' \cap \partial(OA'B'O)\} :$$
*se  $G \in \psi \cap \partial(OABO)$  segue  $\phi G \in \psi' \cap \partial(OA'B'O)$  e viceversa.*
  - *Sia  $F \in W_\epsilon^{(s)} \setminus OA$ . Allora  $F' = \phi F \in W_\epsilon^{(s)} \setminus OA'$ , dunque  $F' \notin OA'B'O$ .*
  - *Sia  $C \in OABO$  (interno) e  $D \notin OABA$  (esterno). Allora  $C' \in OA'B'O$  e  $D' \notin OA'B'O$ , altrimenti il numero di intersezioni di  $\partial(OABO)$  con un arco semplice e continuo  $\psi$  che congiunge  $C$  con  $D$  o  $F$  con  $D$  cambierebbe sotto la mappa.*



• Le varietà stabile e instabile si intersecano in almeno un punto:  $AA' \cap BB' \neq \emptyset$ . Dobbiamo considerare tre casi.

• Caso (i):

$$AA' \cap BB' = \emptyset, \quad \gamma \cap \gamma' = \emptyset$$

• Questo non è possibile (figura).

◦ Consideriamo il poligono curvilineo  $OABO$ ;

◦ la sua immagine sotto  $\phi$  è il poligono curvilineo

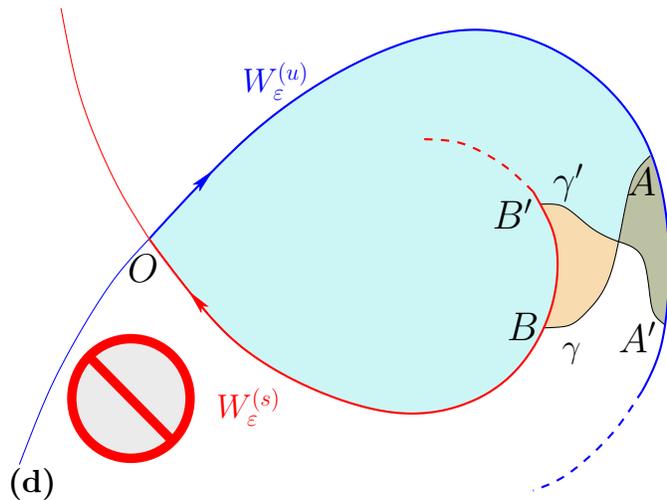
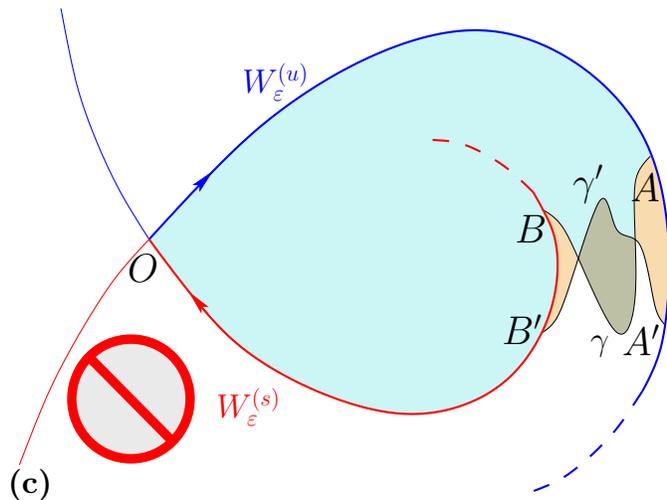
$$\phi(OABO) = OA'B'O.$$

◦ La mappa conserva l'area; quindi deve essere

$$\text{area}(OABO) = \text{area}(OA'B'O).$$

◦ Le due aree differiscono perché la mappa aggiunge (a) o sottrae (b) il poligono curvilineo  $AA'BB'$  con lati  $AA' \subset W_\epsilon^{(u)}$ ,  $\gamma'$ ,  $BB' \subset W_\epsilon^{(s)}$  e  $\gamma$ .

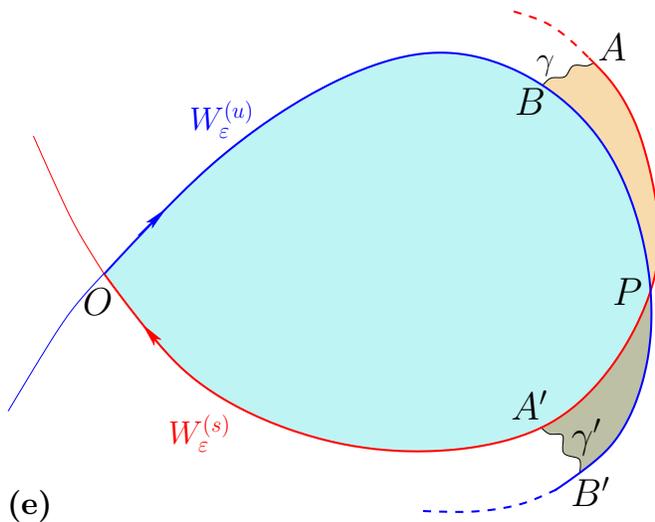
◦ Questo contraddice la proprietà della conservazione dell'area; quindi il caso (i) è da scartare.



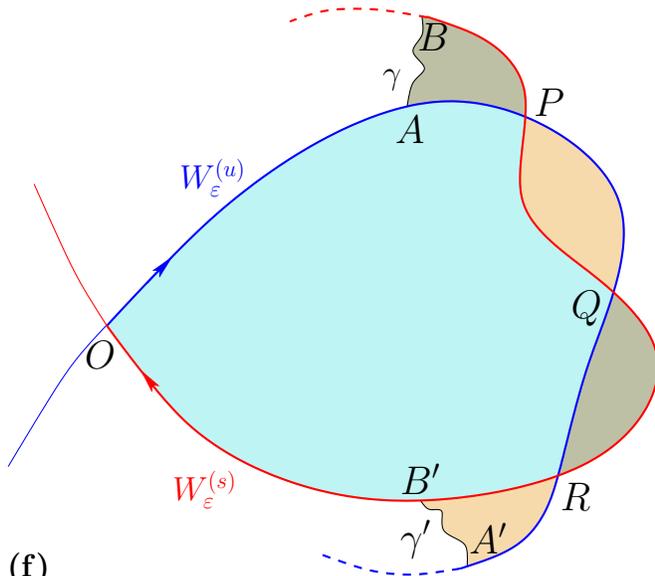
- Caso (ii):

$$AA' \cap BB' = \emptyset, \quad \gamma \cap \gamma' \neq \emptyset.$$

- Questo non può accadere.
  - Si può rispettare la conservazione dell'area, ma...
  - Per continuità: se  $\gamma$  ha lunghezza  $\ell(\gamma) = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ , allora è anche  $\ell(\gamma') = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ ; dunque la lunghezza deve tendere a zero con  $\varepsilon$ .
  - Ma: per  $\varepsilon \rightarrow 0$  le lunghezze  $\ell(AA')$  e  $\ell(BB')$  tendono a una quantità positiva  $\mathcal{O}(1)$ .
  - Nel caso (c) in figura si trova  $\ell(\gamma) \simeq \ell(\gamma') \simeq \mathcal{O}(1)$ , che non può essere.
  - Nel caso (d) in figura si trova  $\ell(\gamma) \simeq \ell(\gamma') \simeq \mathcal{O}(1)$ , che non può essere.
  - Dunque il caso (ii) è da scartare.



(e)



(f)

- Caso (iii):

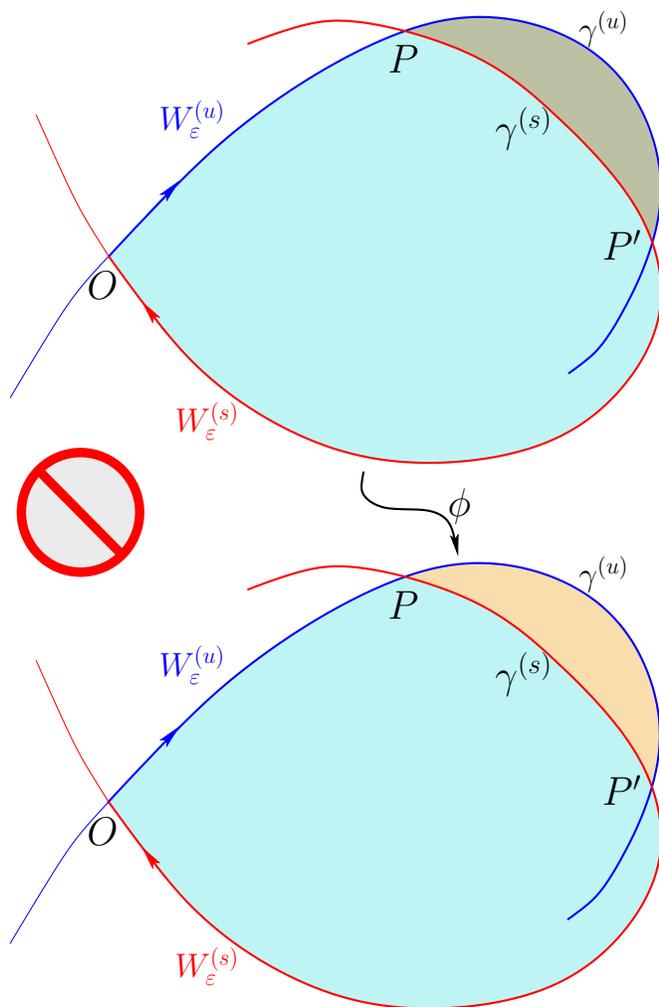
$$AA' \cap BB' \neq \emptyset, \quad \gamma \cap \gamma' = \emptyset.$$

- Questo è ammesso.
  - Si può rispettare la conservazione delle aree: ad esempio, in (e) i triangoli curvilinei  $ABP$  e  $A'B'P$  hanno la stessa area.
- Diversi casi:
  - $W_\varepsilon^{(u)} \cap W_\varepsilon^{(s)}$  è un insieme discreto di punti (e), (f);
  - $W_\varepsilon^{(u)} \cap W_\varepsilon^{(s)}$  è un insieme di archi;
  - $W_\varepsilon^{(u)}$  e  $W_\varepsilon^{(s)}$  coincidono, come nel caso imperturbato.

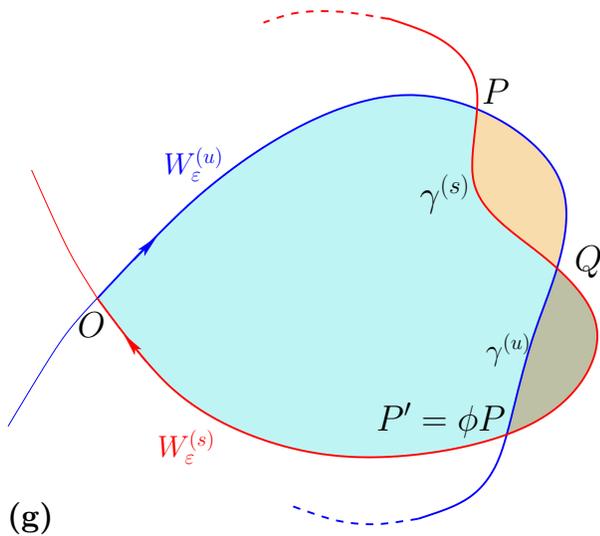
- Sia  $P \in W_\varepsilon^{(u)} \cap W_\varepsilon^{(s)}$  e sia  $\Omega(P) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \phi^k P$  l'orbita con punto iniziale  $P$ . Allora
  - $\Omega(P) \subset W_\varepsilon^{(u)} \cap W_\varepsilon^{(s)}$ .
  - $\Omega(P)$  è un'orbita doppiamente asintotica, ossia

$$\phi^k P \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} O, \quad \phi^k P \xrightarrow[k \rightarrow -\infty]{} O.$$

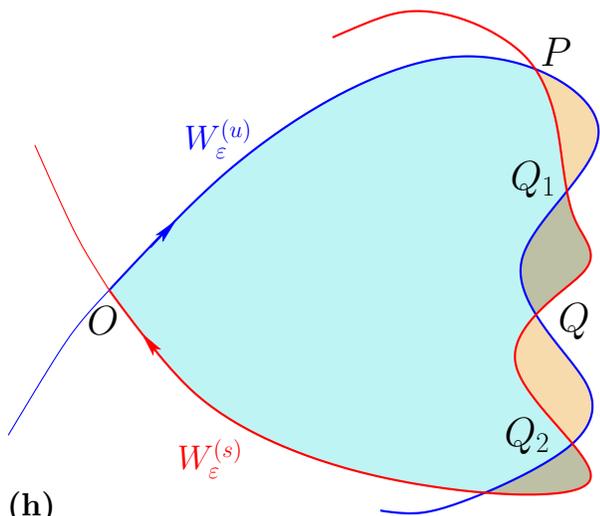
- Poincaré ha dato a  $P$  il nome *punto omoclino*, e  $\Omega(P)$  è un'orbita *omoclina*.



- *Esistono almeno due orbite omocline distinte.*
  - Sia  $P$  un punto omoclino, e  $P' = \phi P$ . Siano  $\gamma^{(u)}$  l'arco di  $W_\varepsilon^{(u)}$  tra  $P$  e  $P'$ , e  $\gamma^{(s)}$  l'arco di  $W_\varepsilon^{(s)}$  tra  $P'$  e  $P$ .
- Per contraddizione: supponiamo che vi sia una sola orbita omoclina  $\Omega(P)$ . Allora:
  - L'arco  $OP \subset W_\varepsilon^{(u)}$  è mappato su  $OP' \subset W_\varepsilon^{(u)}$ , quindi viene esteso dall'arco  $\gamma^{(u)}$ .
  - L'arco  $OP \subset W_\varepsilon^{(s)}$  è mappato su  $OP' \subset W_\varepsilon^{(s)}$ , quindi viene accorciato dall'arco  $\gamma^{(s)}$ .
  - Gli archi  $\gamma^{(u)}$  e  $\gamma^{(s)}$  non hanno in comune punti diversi da  $P$  e  $P'$ . Infatti, se fosse  $Q \in (\gamma^{(u)} \cap \gamma^{(s)} \setminus \{P, P'\})$  allora  $Q \notin \Omega(P)$  sarebbe un punto omoclino, e  $\Omega(Q) \neq \Omega(P)$  sarebbe una seconda orbita omoclina, contrariamente all'ipotesi.
  - Il poligono curvilineo  $OP\gamma^{(s)}P'O$  viene mappato da  $\phi$  su  $OP\gamma^{(u)}P'O$ .
  - L'area del poligono curvilineo  $P\gamma^{(s)}P'\gamma^{(u)}P$  viene aggiunta dalla mappa (come in figura).
  - Questo contraddice la conservazione dell'area; quindi dobbiamo rigettare l'ipotesi che esista una sola orbita omoclina.

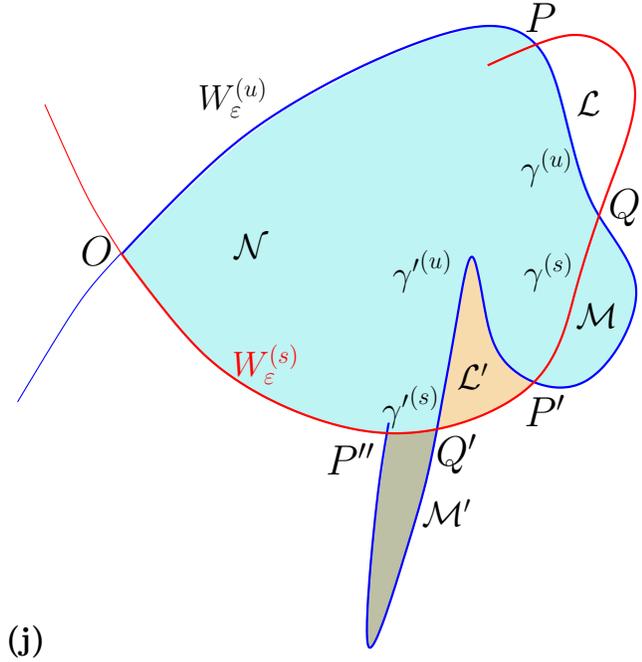
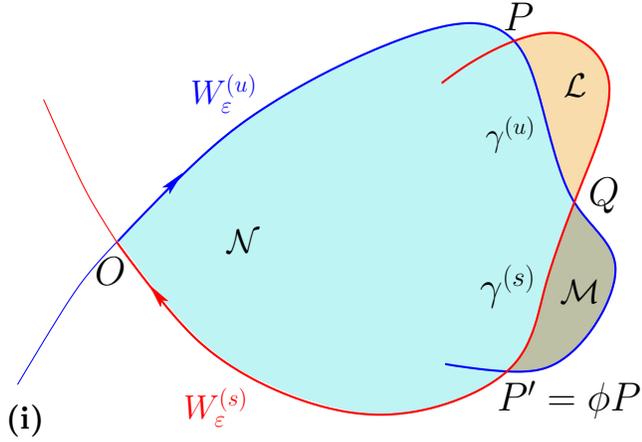


(g)



(h)

- Conclusione:  $\gamma^{(u)} \cap \gamma^{(s)}$  contiene almeno un punto  $Q$  distinto dagli estremi  $P$  e  $P'$ .
  - $Q$  è un punto omoclino.
  - $\Omega(Q)$  è un'orbita omoclina distinta da  $\Omega(P)$ , come affermato.
- In generale  $\gamma^{(u)} \cap \gamma^{(s)}$  può contenere un numero dispari di punti diversi da  $P, P'$ . Tutti quei punti sono a loro volta omoclini e determinano a loro volta delle orbite omocline; ad esempio, in (h) i punti  $Q, Q_1, Q_2$  sono omoclini.
- Non è escluso che  $\gamma^{(u)} \cap \gamma^{(s)}$  possa contenere un arco, costituito da un insieme continuo di punti omoclini.
- Non è neppure escluso che sia  $\gamma^{(u)} = \gamma^{(s)}$ . In tal caso anche  $W_\varepsilon^{(u)}$  e  $W_\varepsilon^{(s)}$  (gli archi di varietà stabile e instabile a destra di  $O$ ) coincidono: sono l'unione di tutte le immagini dirette e inverse di  $\gamma^{(s)}$ .



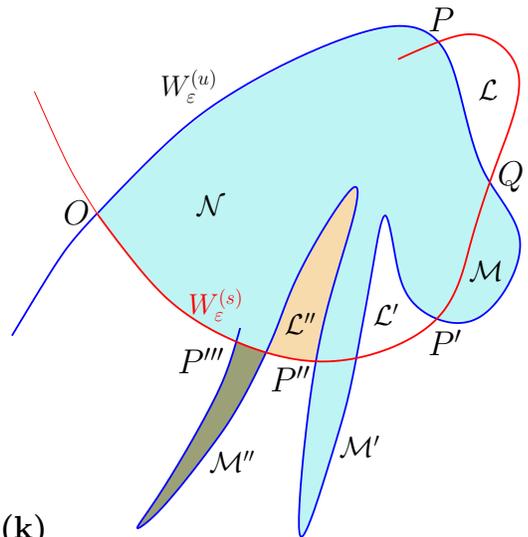
- Concentriamo l'attenzione sul poligono curvilineo (in azzurro, i lobi  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}$  sono esclusi)

$$\mathcal{N} = OW_\varepsilon^{(u)}P\gamma^{(u)}Q\gamma^{(s)}P'W_\varepsilon^{(s)}O .$$

- Il punto  $P$  viene mappato su  $P'$ ; il punto  $Q$  viene mappato su  $Q'$
- L'arco superiore  $OP \subset W_\varepsilon^{(u)}$  (blu) viene mappato su  $OP' \subset W_\varepsilon^{(u)}$ ; gli si aggiunge l'arco  $P\gamma^{(u)}P' \subset W_\varepsilon^{(u)}$ .
- L'arco inferiore  $OP \subset W_\varepsilon^{(s)}$  (rosso) viene mappato su  $OP' \subset W_\varepsilon^{(s)}$ ; perde l'arco  $P\gamma^{(s)}P' \subset W_\varepsilon^{(s)}$ .
- Il punto  $P'$  viene mappato su  $P''$ .
- L'arco  $P\gamma^{(u)}QP' \subset W_\varepsilon^{(u)}$  (blu) viene mappato sull'arco  $P'\gamma'^{(u)}Q'P''$ .
- L'arco  $PQ\gamma^{(s)}P' \subset W_\varepsilon^{(s)}$  (rosso) viene mappato sull'arco  $P'Q'\gamma'^{(s)}P''$ .
- Il lobo  $\mathcal{L}$  viene mappato su  $\mathcal{L}'$ ; il lobo  $\mathcal{M}$  viene mappato su  $\mathcal{M}'$ .
- La prima iterazione (j): consideriamo il poligono curvilineo iniziale, unione di  $\mathcal{N}$  e del lobo  $\mathcal{L}$  in figura (i),

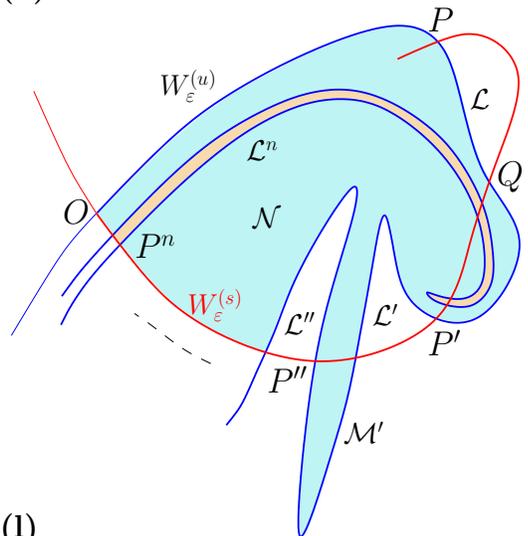
$$\mathcal{V} = OW_\varepsilon^{(u)}PW_\varepsilon^{(s)}O .$$

- La regione  $\mathcal{V} = \mathcal{N} \cup \mathcal{L}$  viene mappata su  $\mathcal{V}' = \mathcal{N} \cup \mathcal{M}$ .
- $\text{area}(\mathcal{V}') = \text{area}(\mathcal{V})$ ; l'area viene conservata perché si perde il lobo  $\mathcal{L}$ , mappato su  $\mathcal{L}' \subset \mathcal{V}$ , ma si guadagna il lobo  $\mathcal{M}$ , che ha la stessa area di  $\mathcal{L}$ .



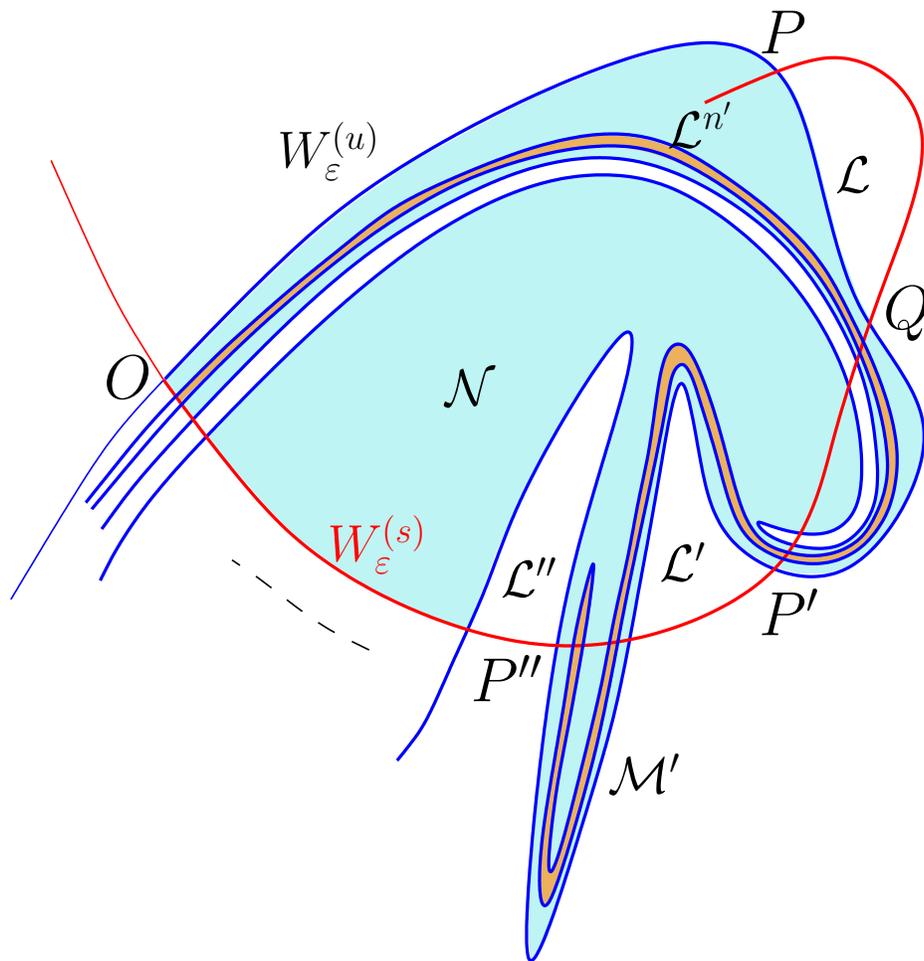
(k)

- Domanda: *che succede con le iterazioni successive della mappa?*
  - Seconda iterazione: il lobo  $\mathcal{L}'$  viene mappato su  $\mathcal{L}''$  conservando l'area, e viene perso. La sua area è rimpiazzata dal lobo  $\mathcal{M}'$ .
  - La regione  $\mathcal{N}$  viene mappata su una nuova regione (denotata ancora con  $\mathcal{N}$ , ma diversa) che ha ancora la stessa area.
- Da non dimenticare: i lobi  $\mathcal{L}, \mathcal{L}', \mathcal{L}''$  &c non possono sovrapporsi, perché la varietà instabile non può autointersecarsi.



(l)

- Le iterazioni successive generano i lobi  $\mathcal{L}, \phi(\mathcal{L}), \dots, \phi^k(\mathcal{L})$ , tutti con la stessa area, ma disgiunti.
  - Ciascun lobo è delimitato da un arco di varietà instabile  $W_\varepsilon^{(u)}$  e un arco di varietà stabile  $W_\varepsilon^{(s)}$ .
    - L'area di  $\mathcal{N}$  è finita; quindi deve esserci un  $n$  tale che il lobo  $\phi^n(\mathcal{L})$  esce dalla regione  $\mathcal{N}$  invadendo il primo lobo  $\mathcal{M}$ .
    - Questo è consentito perché la varietà instabile  $W_\varepsilon^{(u)}$  può intersecare la varietà stabile  $W_\varepsilon^{(s)}$ .
    - L'intersezione tra le due varietà genera nuovi punti omoclini e le orbite doppiamente asintotiche corrispondenti, distinte da tutte le precedenti.



- *Esistono infinite orbite omocline.*
  - All'iterazione successiva il lobo  $\phi^{n+1}(\mathcal{L})$  invade  $\mathcal{M}' = \phi(\mathcal{M})$ , reintersecando nuovamente la varietà stabile nei punti che sono immagine dei precedenti.
  - I lobi diventano lingue sempre più sottili, che si allungano per mantenere l'area e seguono sempre più da vicino i tratti di varietà instabile dei lobi precedenti, *senza mai intersecarle*.
  - Perché ciò sia possibile rispettando la conservazione dell'area i lobi devono creare nuove intersezioni omocline, e quindi nuove orbite omocline.
  - Il processo si ripete *ad infinitum*.
- *Esistono infinite orbite omocline distinte.*
- La varietà stabile è soggetta allo stesso meccanismo: basta considerare la mappa  $\phi^{-1}$ .

- Conclusione: *Le varietà stabile  $W_\varepsilon^{(s)}$  e instabile  $W_\varepsilon^{(u)}$  perturbate non devono necessariamente coincidere, ma possono intersecarsi trasversalmente: il fenomeno è chiamato *splitting delle separatrici*. Se questo accade, allora:
 
  - Le due varietà invadono una regione prossima alle varietà imperturbate, generando una struttura estremamente complessa di intersezioni.*
- Lasciamo la parola a Poincaré, rileggendo il brano riportato all’inizio del capitolo.

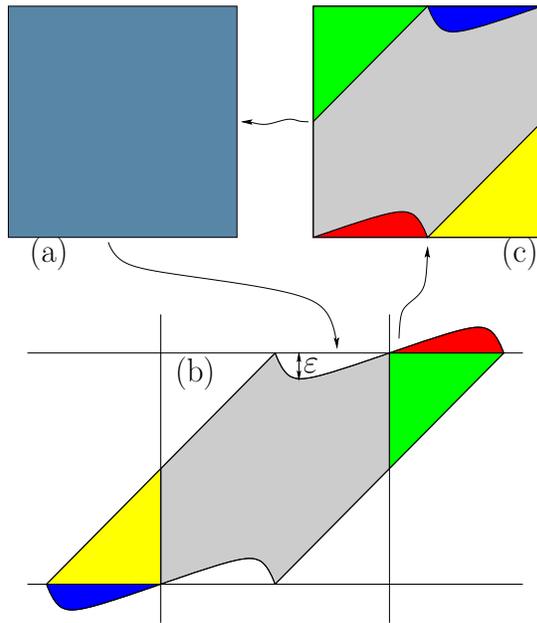
*Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune de ces deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau.*

*On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les séries de Bohlin sont divergentes.*

Si provi a immaginare la figura formata da quelle due curve e dalle loro infinite intersezioni, ciascuna delle quali corrisponde a una soluzione doppiamente asintotica. Quelle intersezioni formano una sorta di intreccio, di tessuto, di rete a maglie infinitamente serrate; ciascuna di quelle due curve non deve mai tornare ad autointersecarsi, ma si deve ripiegare su se stessa in modo estremamente complicato per tornare a intersecare un'infinità di volte tutte le maglie della rete.

Si resterà sbalorditi dalla complessità di quella figura, che io non provo neppure a tracciare. Non c'è nulla di più efficace per darci un'idea della complessità del problema dei tre corpi e in generale di tutti i problemi della Dinamica per cui non esistono integrali uniformi, e le serie di Bohlin sono divergenti.

(Henry Poincaré: *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, Tome III, 1899.)



## 4.5 La standard map di Chirikov (1969)

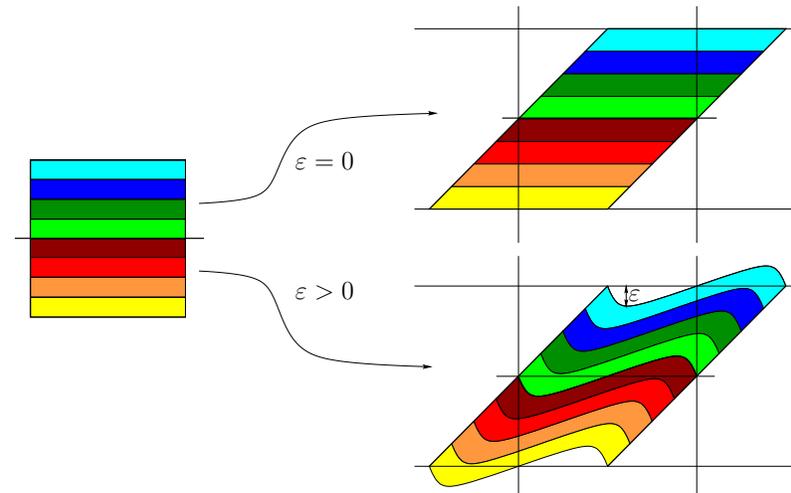
### 4.5.1 Il modello

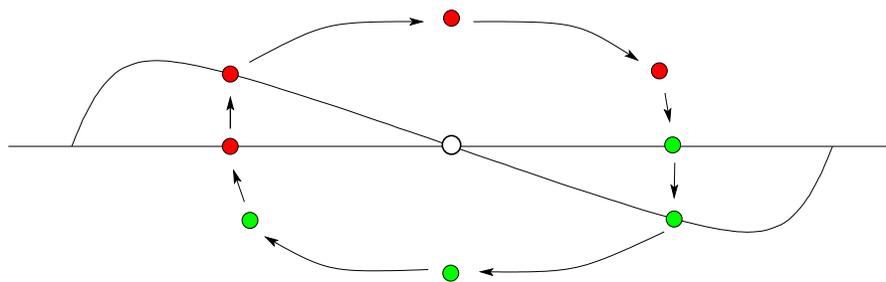
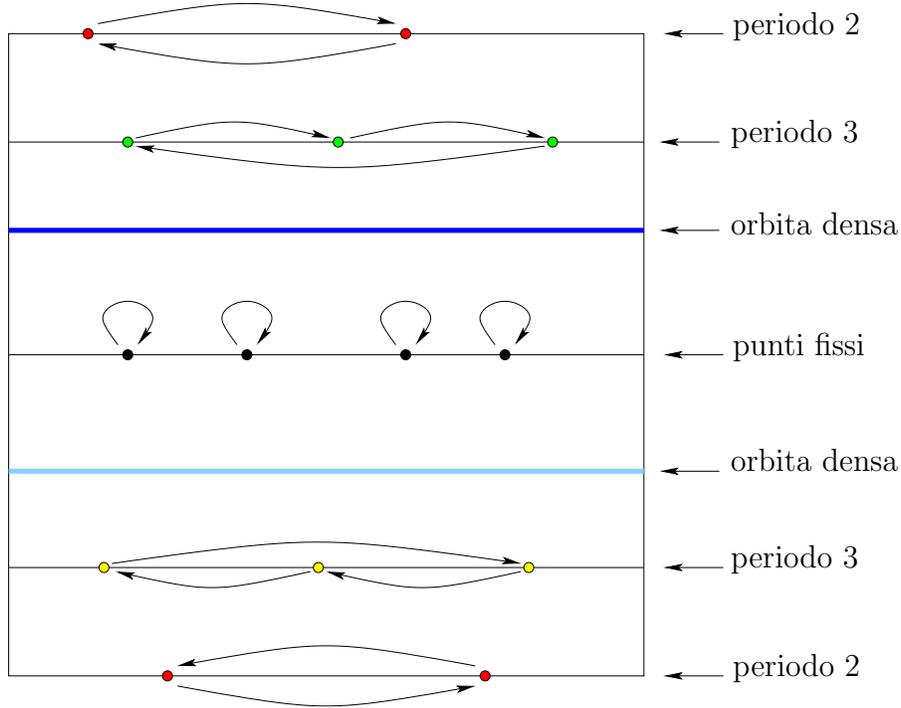
- Mappa del toro  $\mathbb{T}^2$  su se stesso

$$x' = x + y(\text{mod } 2\pi) , \quad y' = x - \epsilon \sin(x + y) .$$

- Rappresentazione geometrica
  - Il quadrato (a) viene trasformato nel parallelogramma distorto (b) e ricomposto in (c).
  - L'altezza  $\epsilon$  misura la distorsione.

- L'effetto del parametro di distorsione  $\epsilon$ .
  - Pensando al quadrato come formato da strati, qui rappresentati con strisce:
  - per  $\epsilon = 0$  si ha solo uno scivolamento;
  - per  $\epsilon \neq 0$  gli strati vengono deformati.
  - Proprietà rilevante: *in ogni caso viene conservata l'area.*



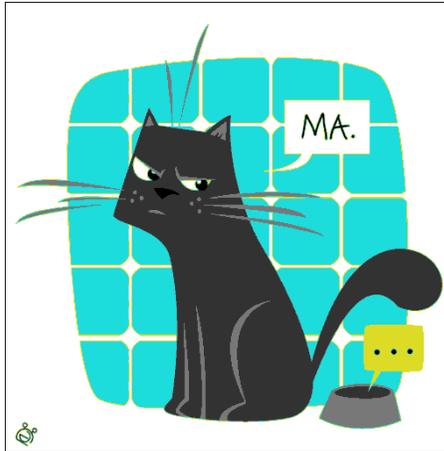


#### 4.5.2 Un po' di fenomenologia

- Ricordiamo: la rotazione del cerchio.
  - Per  $\varepsilon = 0$  la coordinata  $y =$  costante è invariante per la mappa; L'orbita giace interamente sul cerchio corrispondente.
  - Su ciascuna retta la mappa è una rotazione di un angolo  $x$ .
  - la retta  $y = 0$  è composta da punti fissi.
  - Se  $y = r/s$  è razionale la mappa è periodica di periodo  $s$ : tutti i punti del cerchio danno origine a un'orbita periodica.
  - Se  $y$  è irrazionale l'orbita è densa sul cerchio.
  
- Il sistema perturbato,  $\varepsilon \neq 0$ .
  - Sopravvivono solo alcune orbite periodiche, stabili o instabili.
  - Le orbite stabili diventano a loro volta centro di rotazione.
  - Esempio: i punti fissi del cerchio  $y = 0$ .

- Un'immagine globale dell'evoluzione per  $\varepsilon = 0.001$ .

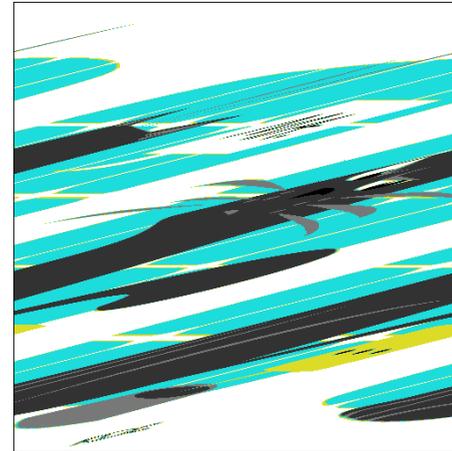
Passo 0



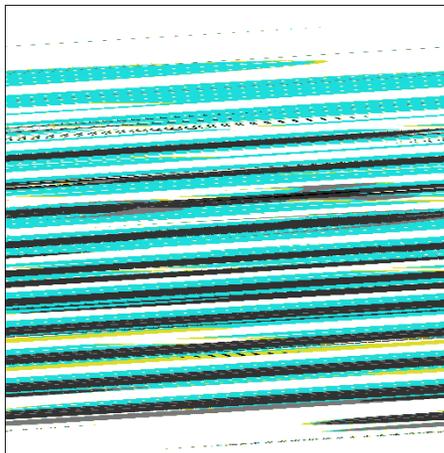
Passo 1



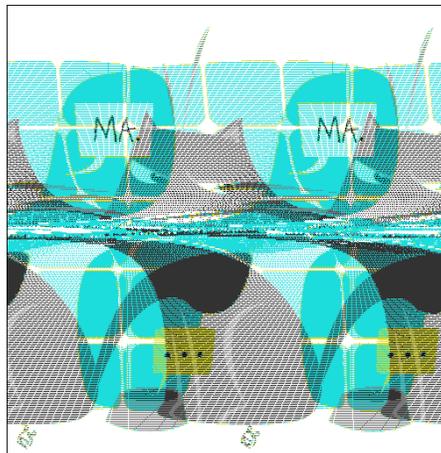
Passo 4



Passo 16



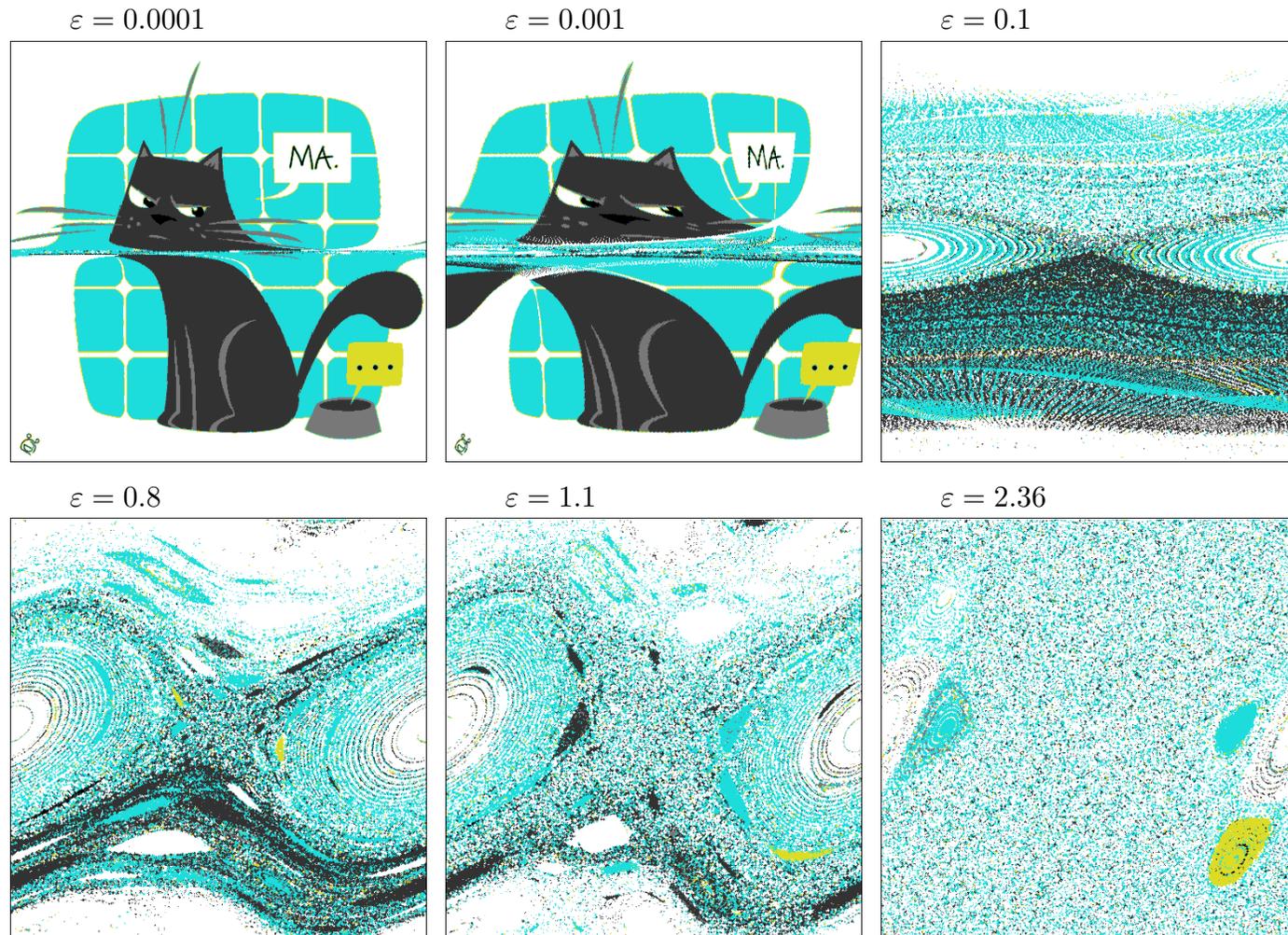
Passo 256



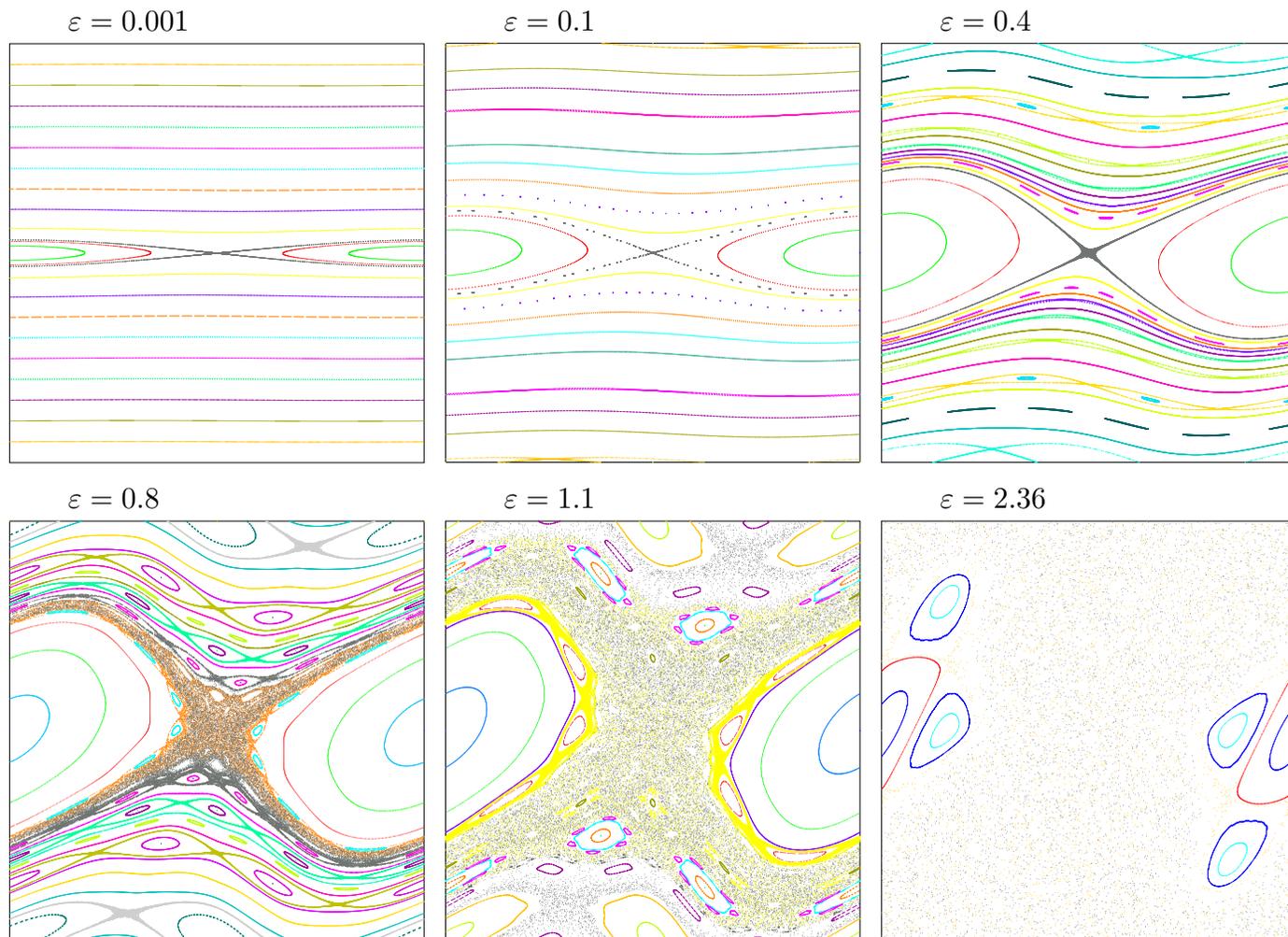
Passo 512

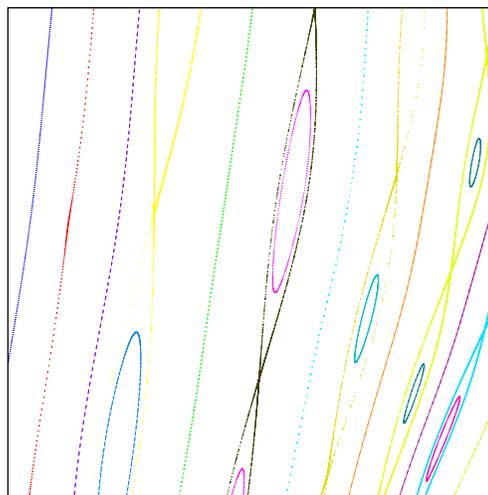
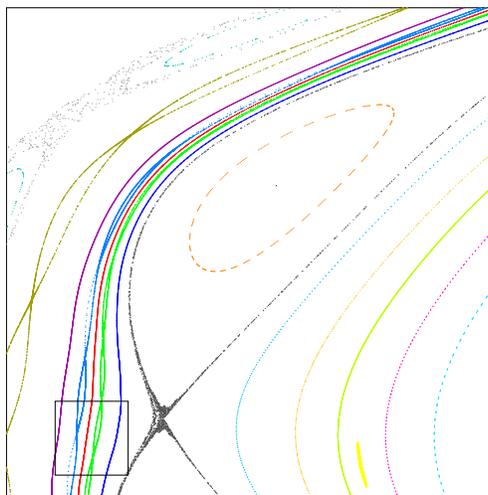
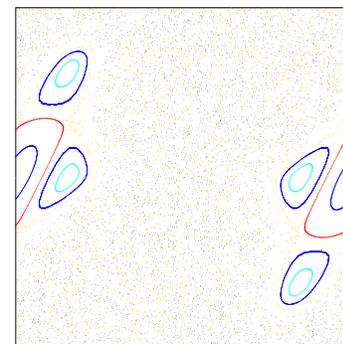
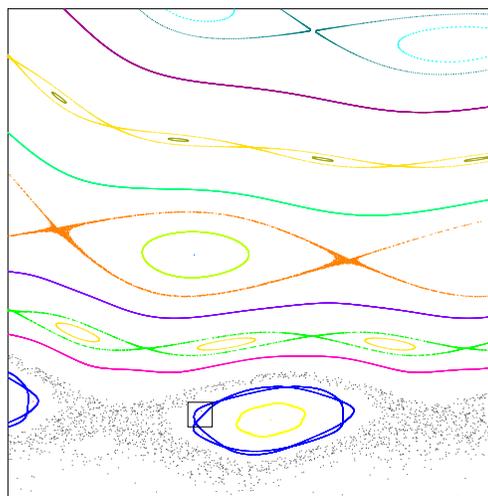
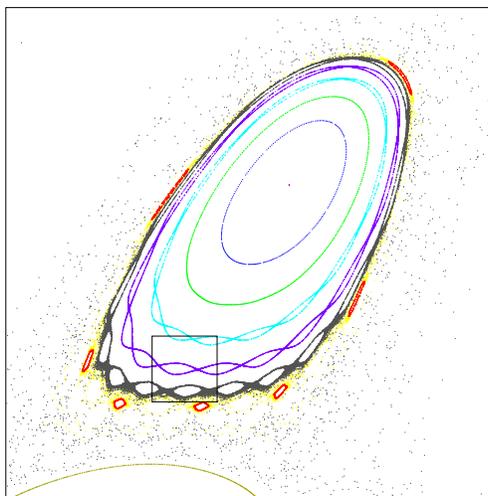


- Un'immagine globale dell'evoluzione dopo 512 iterazioni per diversi valori di  $\varepsilon$ .

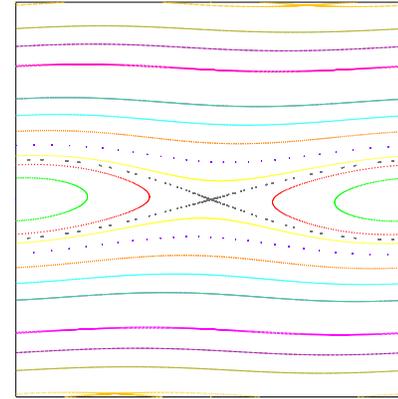
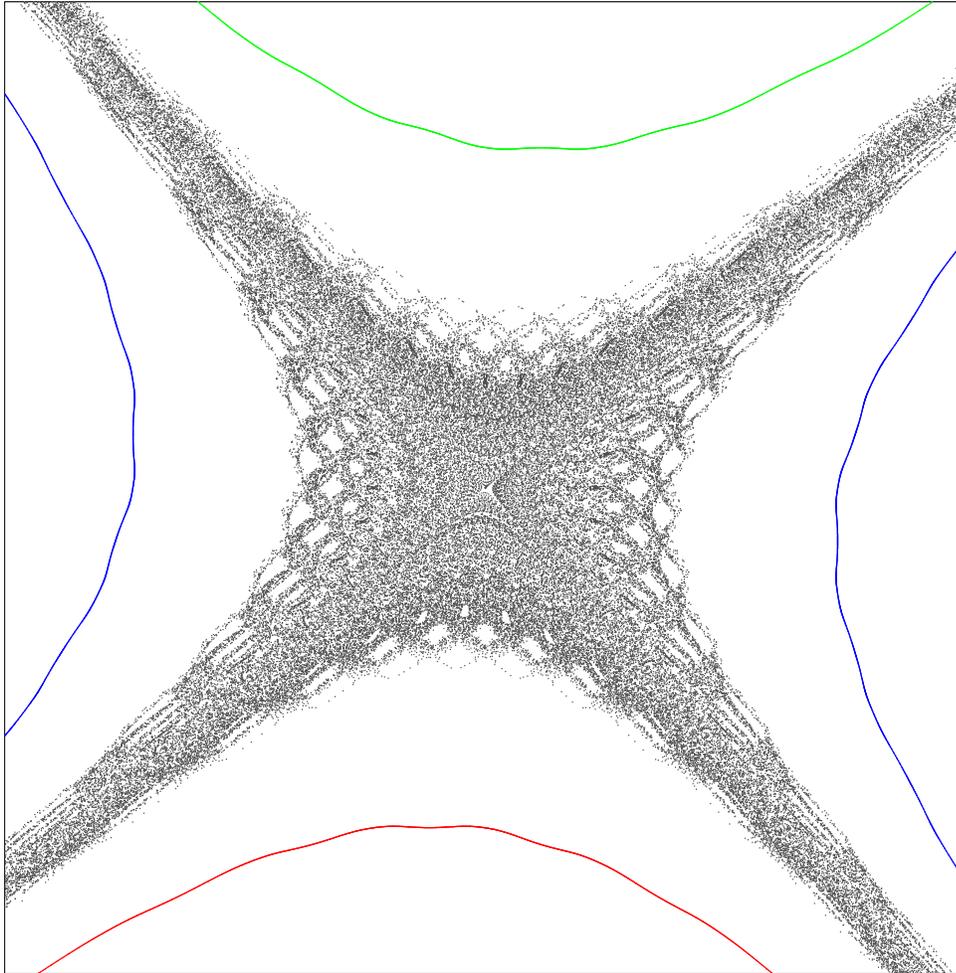


4.5.3 *Le risonanze e l'insorgere del caos.*



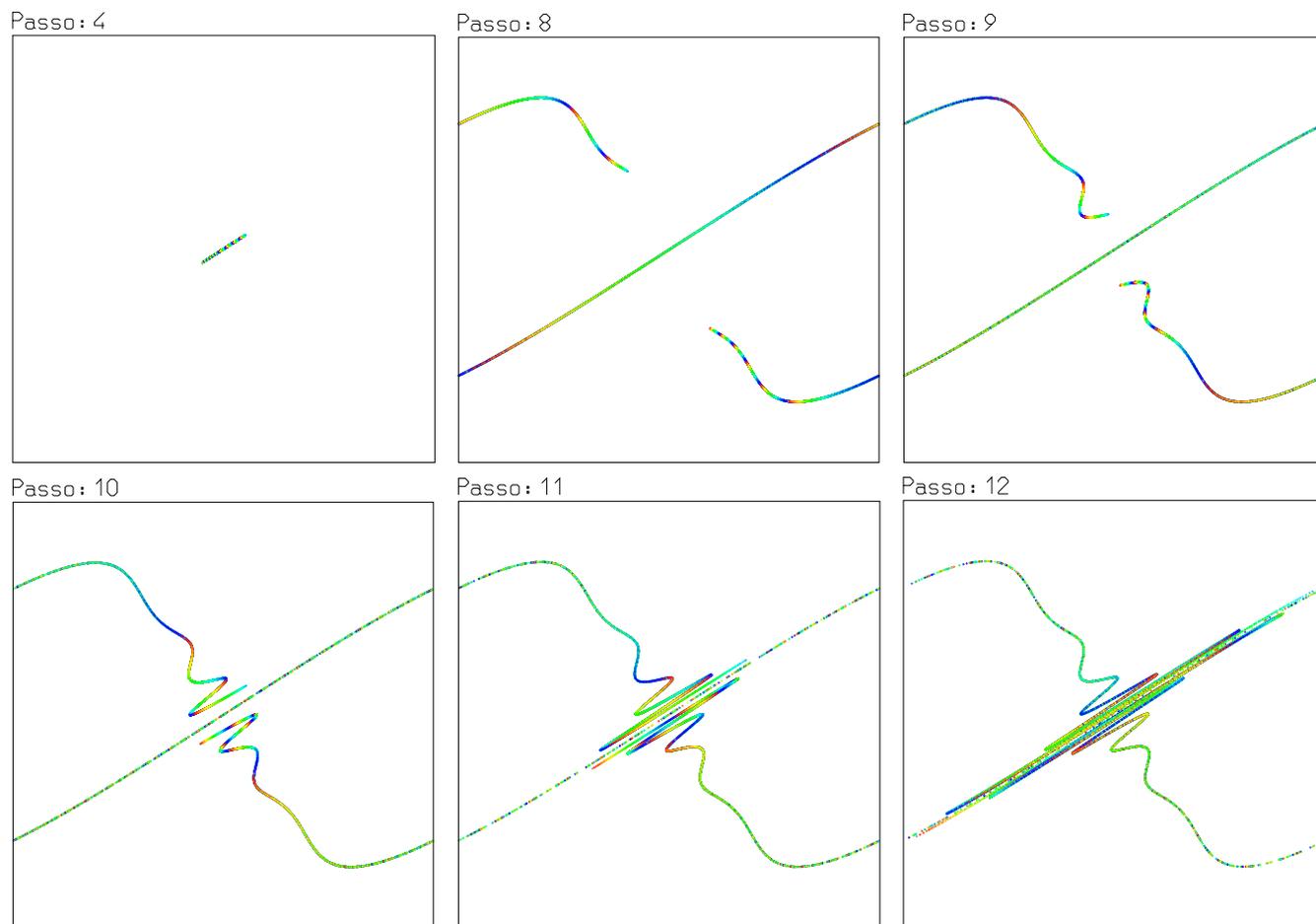


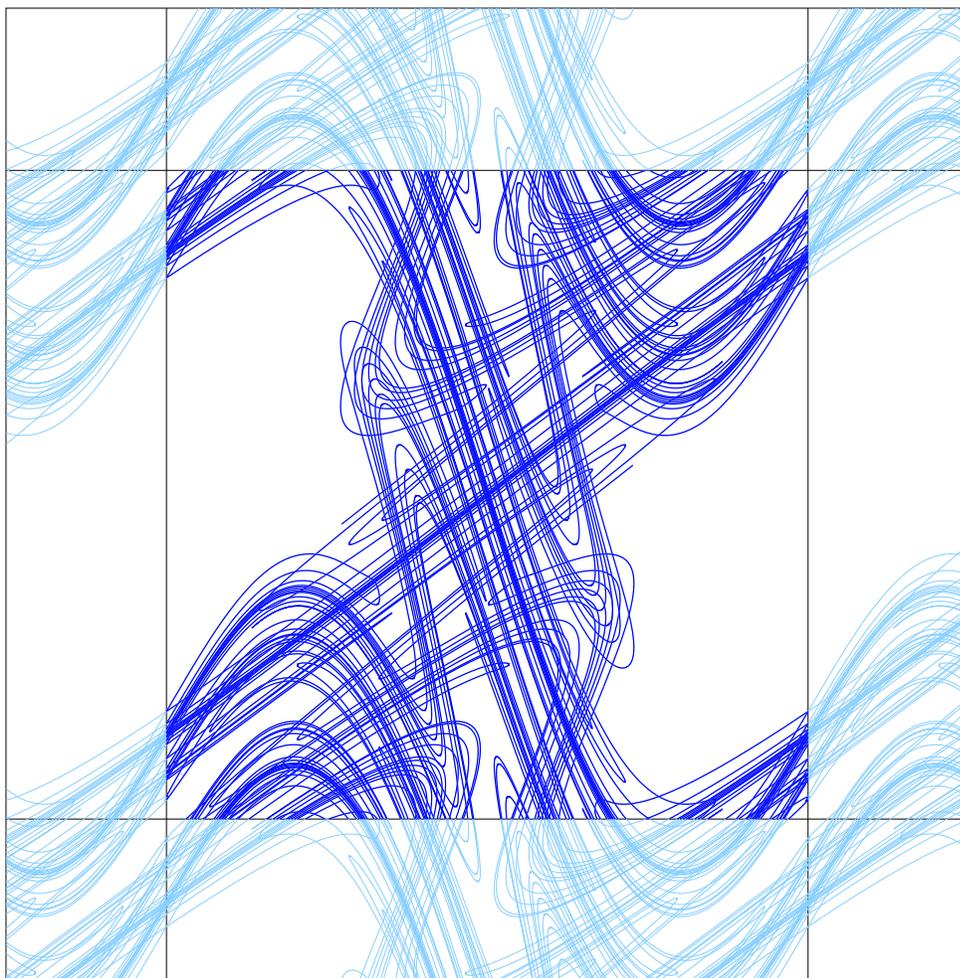
- Le “scatole nelle scatole”
  - Ingrandimenti successivi delle orbite della standard map per  $\varepsilon = 2.36$ .
  - La formazione di *isole* intorno alle orbite periodiche stabili si ripete su scale sempre più piccole.
  - Intorno alle orbite instabili si formano delle separatrici, simili a quelle del pendolo forzato.
  - Apparentemente, su piccola scala le separatrici sembrano curve ben definite, ma...



- Il caos intorno ai punti instabili.
  - Ingrandimento di un rettangolo di lati  $3 \times 10^{-4}$  e  $10^{-4}$  intorno al centro del quadrato, per  $\varepsilon = 0.1$ .
  - Il rapporto  $3/1$  tra i lati orizzontale e verticale compensa lo schiacciamento della fascia risonante.
  - La separatrice che sembrava una curva rivela una struttura molto complessa.
  - Le curve lontane dalla separatrice restano ancora ben visibili.

- L'evoluzione di 32 385 punti inizialmente contenuti in un piccolo quadratino attorno al punto fisso instabile al centro. Il parametro di perturbazione è  $\varepsilon = 1.1$ .





- Le separatrici e le orbite omocline
  - Le intersezioni tra la varietà stabile e la varietà instabile del punto fisso della standard map.
  - $\varepsilon = 2.36$ , scelto alto in modo da separare gli archi di curva e renderli distinguibili . . . fin che si può.
  - Il toro  $\mathbb{T}^2$  è il quadrato centrale a colori più intensi
  - È solo una vaga idea della figura che Poincaré non osava neppure tentare di tracciare.

# 5

## LA DINAMICA PLANETARIA

- La Meccanica di Newton.
- L'approssimazione kepleriana per i moti planetari.
- Gli elementi orbitali.
- La teoria di Lagrange.
- I risultati principali del secolo XVIII
- Due risultati del secolo XIX.

## 5.1 La Meccanica di Newton

*Mechanicam vero duplicem Veteres constituerunt: Rationalem quæ per Demonstrationes accurate procedit, & Practicam. Ad practicam spectant Artes omnes Manuales, a quibus utique Mechanica nomen mutuata est. Cum autem Artifices parum accurate operari soleant, fit ut Mechanica omnis a Geometria ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad Geometriam referatur, quicquid minus accuratum ad Mechanicam. Attamen errores non sunt Artis se artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior est Mechanicus, & si quis accuratissime operari posset, hic foret Mechanicus omnium perfectissimus. Nam & Linearum rectarum & Circulorum descriptiones in quibus Geometria fundatur, ad Mechanicam pertinent. Has lineas describere Geometria non docet sed postulat.*

.....

*Rectas & circulos describere Problemata sunt sed non Geometrica. Ex Mechanica postulatur horum solutio, in Geometria docetur solutorum usus.*

Gli antichi svilupparono la Meccanica in due forme: *Razionale*, che procede con rigore mediante dimostrazioni, e *Pratica*. Alla pratica appartengono tutte le Arti Manuali, dalle quali lo stesso nome *Meccanica* è stato mutuato. Ma poiché gli artigiani hanno l'abitudine di operare in modo approssimativo, così accade che si faccia distinzione tra *Meccanica* e *Geometria*, attribuendo alla *Geometria* tutto ciò che è rigoroso e alla *Meccanica* ciò che lo è in misura minore. Responsabile dell'errore però non è l'Arte, ma gli Artefici. Chi opera con poca precisione è Meccanico imperfetto, e chi riuscisse a operare in modo accuratissimo sarebbe il più perfetto dei Meccanici. Infatti il tracciamento delle linee rette e dei cerchi su cui si fonda la *Geometria* è compito della *Meccanica*. La *Geometria* non insegna a tracciare queste linee: ne postula l'esistenza.

.....

Il tracciamento di rette e cerchi è un problema, ma non geometrico. La soluzione di questo problema è compito della *Meccanica*; in *Geometria* si insegna a far uso delle soluzioni.

### 5.1.1 Le leggi della Meccanica

#### LEX I:

*Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directu, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

#### LEX II:

*Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

#### LEX III:

*Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem, sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi.*

#### PRIMA LEGGE:

Ogni corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, fin che non è costretto a mutare tale stato da una forza che gli viene applicata.

#### SECONDA LEGGE:

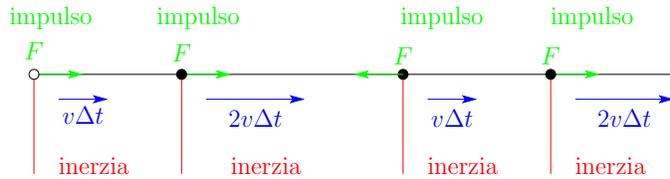
La variazione del movimento è proporzionale alla forza motrice applicata, e si verifica nella stessa direzione della linea retta lungo la quale viene impressa la forza.

#### TERZA LEGGE:

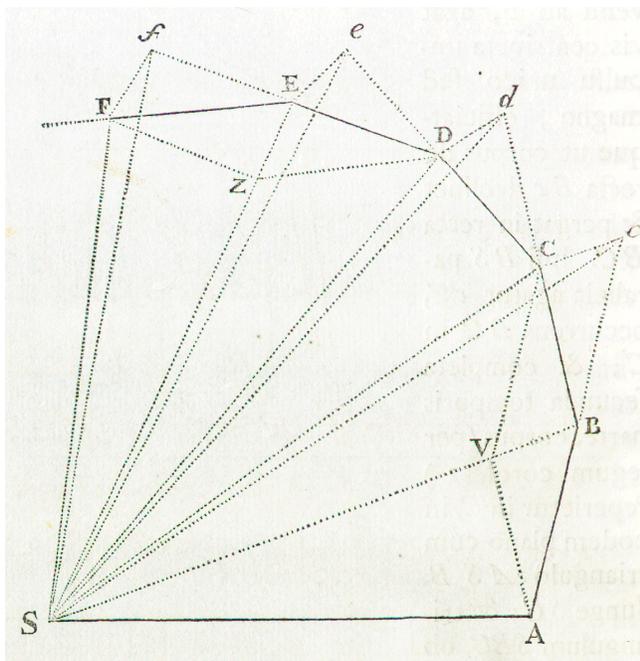
All'azione corrisponde sempre una reazione eguale e contraria, ovvero le azioni reciproche esercitate da due corpi sono sempre eguali e dirette in verso opposto.

(Newton: *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, Capitolo II, *Axiomata*.)

- *Legge d'inerzia*: sostanzialmente ripresa da Galileo.
- *Legge fondamentale della dinamica*: Eulero (*Mechanica*, Propositio 20) la riscrive come  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  (la notazione vettoriale tiene conto della direzione). Ma...
  - la prima legge sembra essere contenuta nella seconda: se non c'è forza non c'è accelerazione.
  - È proprio questo che Newton intendeva?
- *Principio di azione e reazione*: è un principio ricavato dall'esperienza.



- La nostra rilettura.
  - Con Eulero, e facendo uso del calcolo differenziale noi scriviamo l'equazione della dinamica:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ .
  - Applichiamo la teoria delle equazioni differenziali (teorema di esistenza e unicità delle soluzioni).
  - Diciamo che: i movimenti possibili sono *tutti e soli* quelli descritti dalle soluzioni dell'equazione della dinamica.
- La lettura di Newton.
  - Supponiamo che il corpo parta da fermo.
  - A intervalli di tempo regolari  $\Delta t$  applichiamo degli impulsi  $F$  di eguale intensità che imprimono un'accelerazione, e modificano la velocità proporzionalmente a  $F$  (seconda legge).
  - Il primo impulso al corpo comunica una velocità  $v$ ; il moto avviene per inerzia per un intervallo  $\Delta t$ ;
  - Il secondo impulso incrementa la velocità di  $v$ ;
  - Il terzo impulso agisce in direzione opposta alla velocità, e la decrementa di  $v$ ; &c
- La seconda legge dice *come cambia la velocità al momento dell'impulso*: contiene il "tutti".
- La prima legge dice che *tra due impulsi la velocità resta costante*: contiene il "soli".



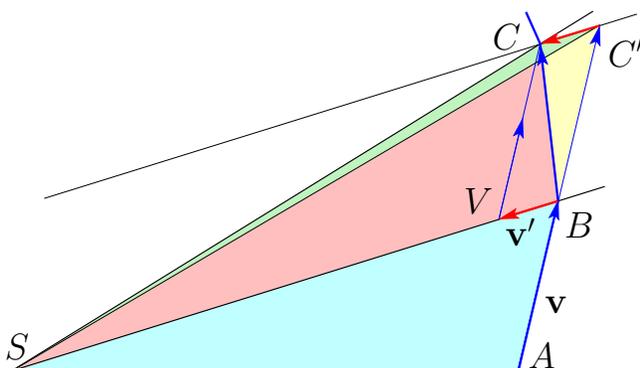
### 5.1.2 Il moto planetario: da Keplero a Newton

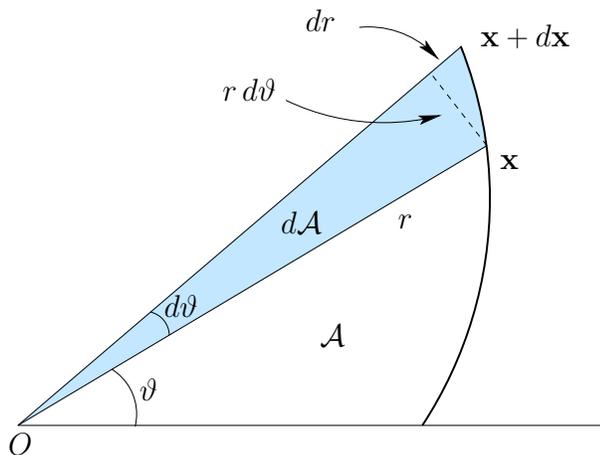
- La legge delle aree.

*Sectio II, Propositio I : De inventione virium centripetorum. "Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales."*

Lo studio delle forze centripete. "Le aree descritte dai raggi condotti a un centro immobile da corpi in moto curvilineo, giacciono su piani invarianti, e sono proporzionali ai tempi."

- Basta supporre che *la forza sia sempre diretta verso il Sole S*; nel nostro linguaggio: forza di tipo centrale.
- Dimostrazione di Newton (figura semplificata in basso).
  - In un intervallo  $\Delta t$  il corpo percorre il segmento  $AB$  con velocità  $\mathbf{v}$ .
  - Se non ci fossero forze nell'intervallo  $\Delta t$  successivo si portebbe in  $C'$ .
  - La forza aggiunge alla velocità un vettore  $\mathbf{v}'$ , diretto verso il centro.
  - Per composizione, il moto vero porta il corpo in  $C$ .
  - Dico che  $\text{area}(SAB) = \text{area}(SBC') = \text{area}(SBC)$ .  
I primi due triangoli hanno basi  $AB$  e  $BC'$  sulla stessa retta ed eguali, ed eguale altezza;  
i secondi due hanno base  $SB$  comune ed eguale altezza, perchè  $SB$  e  $CC'$  sono paralleli per costruzione.





- La formalizzazione (più o meno) contemporanea.

- Calcolo l'incremento dell'area

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} \wedge d\mathbf{x}\| = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}\| dt .$$

- Se l'accelerazione  $\mathbf{a}$  è puramente radiale,  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{x}$ , ottengo

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{a} = 0 ;$$

- Segue la *legge delle aree*:

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = C , \quad \text{costante} .$$

- Coordinate polari:

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_x \cos \vartheta + \mathbf{u}_y \sin \vartheta , \quad \mathbf{u}_\vartheta = -\mathbf{u}_x \sin \vartheta + \mathbf{u}_y \cos \vartheta .$$

- Componenti della velocità:  $\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\vartheta} \mathbf{u}_\vartheta$  ;

- accelerazione:  $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\vartheta}^2) \mathbf{u}_r + (r \ddot{\vartheta} + 2 \dot{r} \dot{\vartheta}) \mathbf{u}_\vartheta$  .

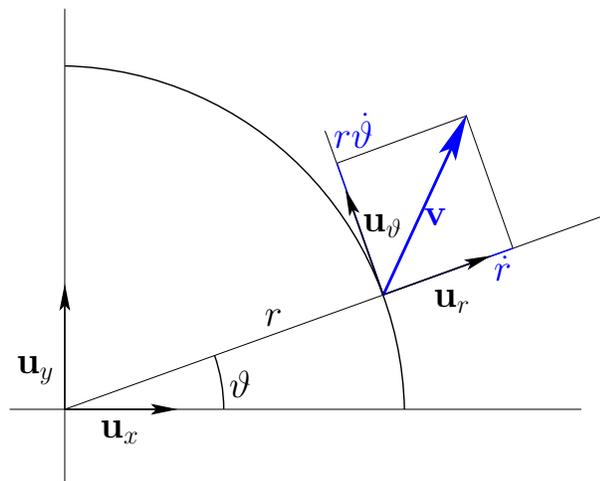
- La legge delle aree in coordinate polari.

- In un tempo  $dt$  l'area  $\mathcal{A}$  si incrementa di  $d\mathcal{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\vartheta} dt$ .

- Per la legge delle aree:

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\vartheta} = C , \quad \text{costante} .$$

- Nella nostra formalizzazione è la conservazione del *momento angolare* (o del momento della quantità di moto  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ).



### 5.1.3 L'accelerazione nel caso kepleriano

- La formula di Binet.

Se un punto  $P$  si muove in un piano obbedendo alla seconda legge di Keplero rispetto ad un centro  $S$ , allora l'accelerazione è puramente radiale, e se l'orbita  $r(\vartheta)$  è nota, l'accelerazione è

$$a_r = -\frac{4C^2}{r^2} \left( \frac{d^2}{d\vartheta^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right)$$

dove  $C = \dot{A}$  è la velocità areolare.

- Conseguenze delle prime due leggi di Keplero.
  - Equazione dell'orbita ellittica:

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \vartheta}, \quad p = \frac{b^2}{a}.$$

- Velocità areolare:  $C = \frac{\pi ab}{T}$ .
- Dalla formula di Binet:

$$a_r = -\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \frac{1}{r^2}$$

- Conseguenze della terza legge di Keplero:
  - $\frac{a^3}{T^2}$  non dipende dal pianeta;
  - quindi

$$a_r = \frac{K}{r^2},$$

con una costante che dipende solo dal centro delle forze (il Sole).

#### 5.1.4 La gravitazione di Newton (*Principia*, Liber III)

##### REGULA I.

*Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ & vere sint & earum phenomenon explicandis sufficient.*

##### REGULA II.

*Ideoque effectuum naturalium ejusdem generis eadem assignandæ sunt causæ, quatenus fieri potest.*

##### REGULA III.

*Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta institui licet, pro qualitatibus corporum universorum habendæ sunt.*

##### REGULA IV.

*In philosophia experimentalis, propositiones ex phaenomenis per inductionem collectæ, non obstantibus contrariis hypothesis, pro veris aut accurate aut quam proxime haberi debent, donec alia occurrerint phaenomena, per quæ aut accuratiores reddantur aut exceptionibus obnoxia.*

##### Regola 1.

Non dobbiamo ammettere altre cause se non quelle che sono allo stesso tempo vere e sufficienti per spiegare i fenomeni naturali.

##### Regola 2.

Pertanto, nei limiti del possibile, dobbiamo attribuire le stesse cause a effetti naturali dello stesso genere.

##### Regola 3.

Le qualità dei corpi che non sono suscettibili di crescita o diminuzione, e che competono a tutti corpi che possiamo sottoporre a prove sperimentali, devono essere considerate come qualità universali che competono a tutti corpi, di qualunque genere.

##### Regola 4.

Nell'ambito della filosofia sperimentale, le proposizioni indotte dall'osservazione dei fenomeni devono considerarsi come vere o accurate o ben approssimate, senza tener conto di ipotesi contrarie, fin che non vengano osservati altri fenomeni che confermano le proposizioni o che, al contrario, sollevino delle eccezioni.

- Dal secondo principio della dinamica di Newton:
  - L'accelerazione è da attribuirsi a un campo di forze creato dal Sole.
  - La forza esercitata dal Sole  $S$  su un Pianeta  $P$  deve avere intensità  $F = \frac{\Gamma_S m_P}{r^2}$ , con  $m_P$  massa del Pianeta e  $\Gamma_S$  una costante che dipende sola dal Sole.
  
- Dal principio di azione e reazione:
  - Il Pianeta deve esercitare sul Sole una forza eguale e contraria.
  - L'intensità deve essere  $F = \frac{\Gamma_P m_S}{r^2}$ , con  $m_S$  massa del Sole e  $\Gamma_P$  una costante che dipende dal Pianeta.
  - $F$  e  $r$  sono gli stessi in ambedue i casi, quindi deve essere  $\Gamma_S m_P = \Gamma_P m_S$ .
  - Ne segue

$$F = \frac{\mathcal{G} m_S m_P}{r^2} ,$$

con  $\mathcal{G}$  costante universale che caratterizza la gravità.

- Se un Pianeta agisce sul Sole, diventa naturale accettare che anche i Pianeti agiscano in modo simile uno sull'altro.
  
- La *Legge di gravitazione universale*  
*Tra due masse qualsiasi  $m_1, m_2$  si esercita una forza gravitazionale attrattiva, nella direzione congiungente le due masse, di intensità  $\mathcal{G}m_1m_2/r^2$ , dove  $r$  è la distanza tra le due masse e  $\mathcal{G}$  è una costante universale.*

### 5.1.5 La mela e la Luna

- La prima verifica portata a termine da Newton.

*Mostrare che l'accelerazione di gravità alla superficie della terra e l'accelerazione centripeta della luna sono effettivamente proporzionali agli inversi dei quadrati delle distanze dal centro della terra.*

- Denotiamo:  $a$  l'accelerazione centripeta della Luna,  $\varrho$  il raggio dell'orbita lunare,  $g$  l'accelerazione di gravità alla superficie della Terra e  $R$  il raggio della terra.
- Dovremmo avere

$$a = \frac{\Gamma}{\varrho^2}, \quad g = \frac{\Gamma}{R^2},$$

dove  $\Gamma$  è una costante che dipende dalla Terra, valore sconosciuto a Newton.

- In realtà basta verificare che

$$\frac{g}{a} \sim \frac{\varrho^2}{R^2}.$$

- I dati, assumendo la Terra fissa e la Luna in orbita circolare:

$$\begin{aligned} \varrho &= 3.844 \times 10^8 \text{ m} && \text{raggio dell'orbita lunare;} \\ T &= 2.361 \times 10^6 \text{ s} && \text{periodo sidereo della Luna;} \\ g &= 9.803 \text{ m/s}^2 && \text{accelerazione di gravità;} \\ R &= 6.378 \times 10^6 \text{ m} && \text{raggio della Terra.} \end{aligned}$$

- Calcoliamo

$$a = \omega^2 \varrho = \frac{4\pi^2 \varrho}{T^2} = 2.722 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2,$$

da cui

$$\frac{g}{a} = 3.601 \times 10^3, \quad \frac{\varrho^2}{R^2} = 3.632 \times 10^3.$$

- I dati di Newton erano meno precisi, ma non enormemente diversi dai nostri; Valutava la distanza della Luna in 60 volte il raggio terrestre, un valore non molto dissimile da  $\varrho/R \simeq 60.27$  dei nostri dati.

### 5.1.6 Il problema inverso

- Studiare le equazioni del moto centrale al fine di determinare tutti i movimenti possibili.
  - La forza  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(r)\frac{\mathbf{x}}{r}$ , con  $r = \|\mathbf{x}\|$ , è sempre diretta verso un centro fisso.
  - Equazione di Newton:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) .$$

- Leggi di conservazione: le quantità

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{x} \wedge m\mathbf{v} , \quad \text{momento angolare}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + V(r) , \quad \text{energia}$$

con  $\mathbf{F} = -\text{grad } V$  restano costanti durante l'evoluzione del sistema.

- In coordinate polari, detto  $\ell = \|\mathbf{\Gamma}\|$ ,

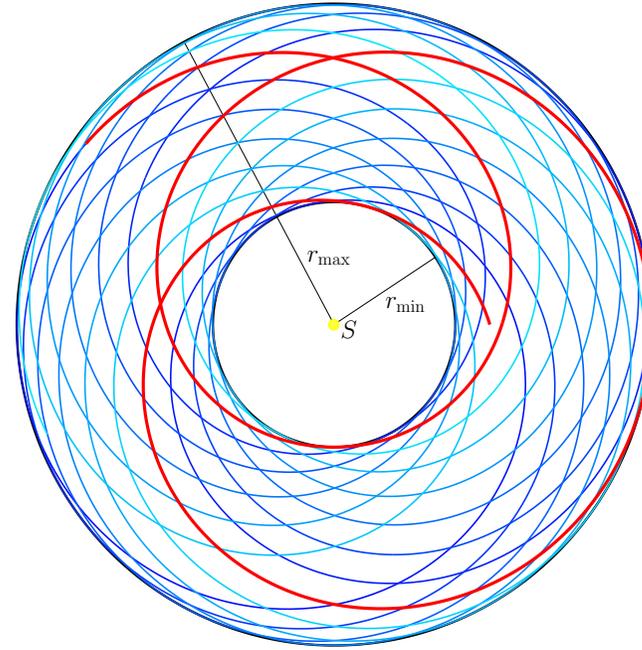
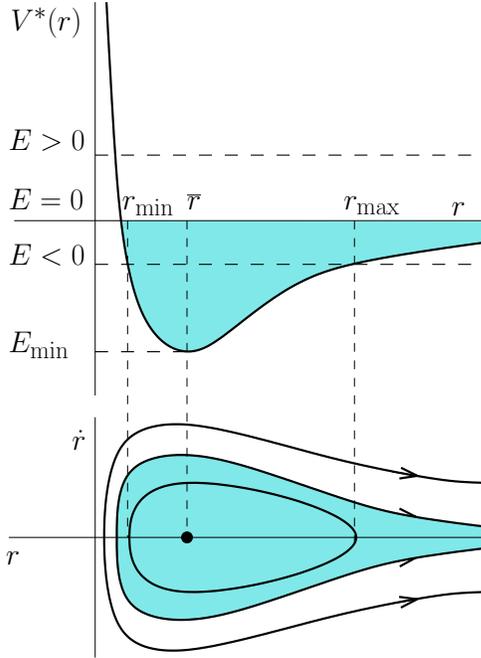
$$\ell = mr^2\dot{\vartheta} , \quad E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) + V(r) .$$

- Basta risolvere queste ultime equazioni.
- In forma più esplicita, sostituendo  $\dot{\vartheta}$  nell'equazione dell'energia,

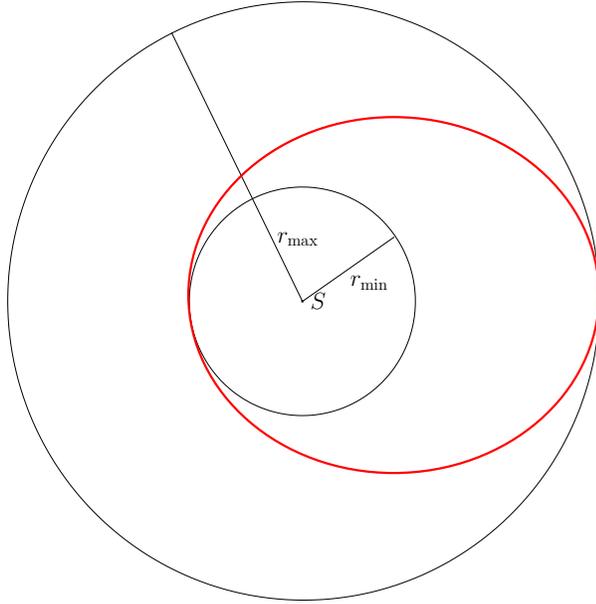
$$\dot{\vartheta} = \frac{\ell}{mr^2} , \quad \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V^*(r))} \quad \text{con} \quad V^*(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2} ;$$

$V^*(r)$  è detto *potenziale efficace*: include la forza centrifuga dovuta al moto curvo.

- Possiamo risolverle per quadrature una volta noto il potenziale  $V(r)$ , ma premettiamo uno studio qualitativo.



- Potenziale simile a quello kepleriano.
  - Il minimo del potenziale efficace  $V^*(r)$ , energia  $E = E_{\min}$  corrisponde a un'orbita circolare.
  - Per  $E < 0$  le orbite sono confinate in una corona circolare (stato legato).
  - Per  $E \geq 0$  le orbite possono andare all'infinito (stato di scattering).
  - Si può dire di più solo se si conosce la forma del potenziale  $V(r)$ .
- La forma “a rosetta” dell'orbita confinata.
  - L'angolo  $\vartheta$  gira con una sua frequenza  $\omega_\vartheta$  (calcolabile).
  - Il raggio  $r$  oscilla tra gli estremi  $[r_{\min}, r_{\max}]$ , con un suo periodo  $\omega_r$ .
  - Il movimento è combinazione di due frequenze, come nel caso di due oscillatori.
  - In forma geometrica astratta, l'orbita nello spazio delle fasi giace su un toro  $\mathbb{T}^2$ .
  - L'orbita sul piano  $r, \vartheta$  è la proiezione dell'orbita nello spazio delle fasi a 4 dimensioni.



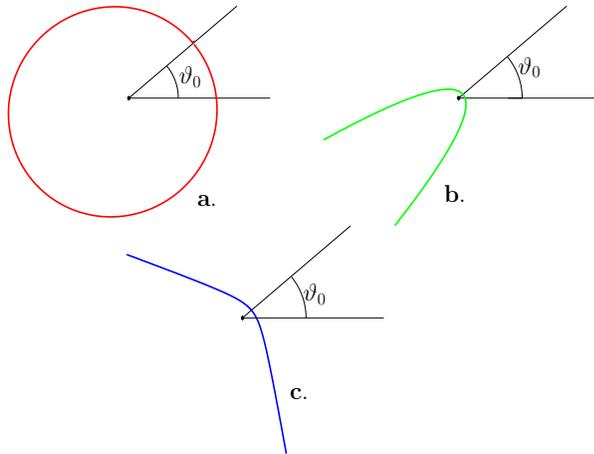
- Il calcolo dell'orbita.
  - Si elimina il tempo tra le equazioni per  $r, \vartheta$ :

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \pm \frac{mr^2}{\ell} \sqrt{\frac{2}{m} (E - V^*(r))} .$$

- Con una quadratura si calcola

$$\vartheta - \vartheta_0 = \pm \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{E - V^*(\rho)}} .$$

- Per inversione rispetto a  $r$  si calcola  $r(\vartheta)$ :
- Sostituendo  $r(\vartheta)$  nell'equazione per  $\vartheta$  e con una seconda quadratura si calcola  $\vartheta(t)$ .



- Nel caso del potenziale kepleriano,  $V(r) = -\frac{k}{r}$  con forza  $F(r) = -\frac{k}{r^2}$  l'orbita è una sezione conica con eccentricità  $e \geq 0$ :

$$r = \frac{p}{1 - e \cos(\vartheta - \vartheta_0)} , \quad p = \frac{b^2}{2a} .$$

- Ellisse **(a)** per  $0 < e < 1$ : pianeti, asteroidi, comete periodiche e simili.
- Parabola **(b)** per  $e = 1$  oppure iperbole **(c)** per  $e > 1$ : comete non periodiche.

## 5.2 L'approssimazione kepleriana per i moti planetari

- Accettata la teoria newtoniana della gravitazione, ogni corpo celeste subisce l'attrazione di tutti gli altri.
  - un po' di calcoli.

### 5.2.1 Le coordinate eliocentriche

- Si considerano  $N + 1$  punti  $P_0, \dots, P_N$  con le loro masse  $m_0, \dots, m_N$ . Supponiamo che  $m_0$  sia molto più grande delle altre (circa 1000 volte nel caso Sole–Giove).
  - Equazioni (separando quella per  $P_0$ )

$$m_0 \ddot{\mathbf{x}}_0 = \sum_{1 \leq k \leq N} \mathbf{F}_{0k}$$

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{F}_{j0} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \neq j}} \mathbf{F}_{jk}, \quad 1 \leq j \leq N,$$

- Eliminazione del baricentro. Traslazione dell'origine in  $P_0$ .

$$\mathbf{X} = \frac{\sum_{j=0}^N m_j \mathbf{x}_j}{\sum_{j=0}^N m_j}$$

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0, \quad 1 \leq j \leq N;$$

Le coordinate  $\mathbf{r}_j$  sono le posizioni relative a  $P_0$  (il Sole);  $\mathbf{X}$  è il baricentro.

- Le equazioni trasformate:

$$\ddot{\mathbf{X}} = 0$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_j = \left( \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_j} \right) \mathbf{F}_{j0} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \neq j}} \left( \frac{\mathbf{F}_{jk}}{m_j} - \frac{\mathbf{F}_{0k}}{m_0} \right), \quad 1 \leq j \leq n.$$

- Il baricentro  $\mathbf{X}$  si muove di moto uniforme, e lo possiamo ignorare.

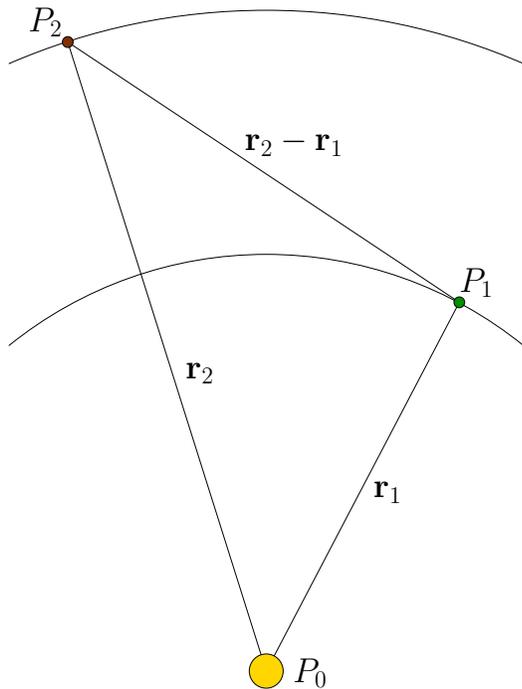
### 5.2.2 L'approssimazione kepleriana

- La forza gravitazionale

$$\mathbf{F}_{jk} = -\mathcal{G}m_jm_k \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^3} ;$$

- Sostituendo si ricavano le equazioni

$$\ddot{\mathbf{r}}_j = -\mathcal{G}(m_0 + m_j) \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} - \mathcal{G} \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \neq j}} m_k \left( \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^3} + \frac{\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_k|^3} \right) , \quad 1 \leq j \leq N .$$



- Se le distanze reciproche  $\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\|$  tra i pianeti sono più piccole delle distanze  $\mathbf{r}_j$  dal Sole allora la somma può essere trascurata in prima approssimazione.

- Le equazioni diventano

$$\ddot{\mathbf{r}}_j = -\mathcal{G}(m_0 + m_j) \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} , \quad 1 \leq j \leq N .$$

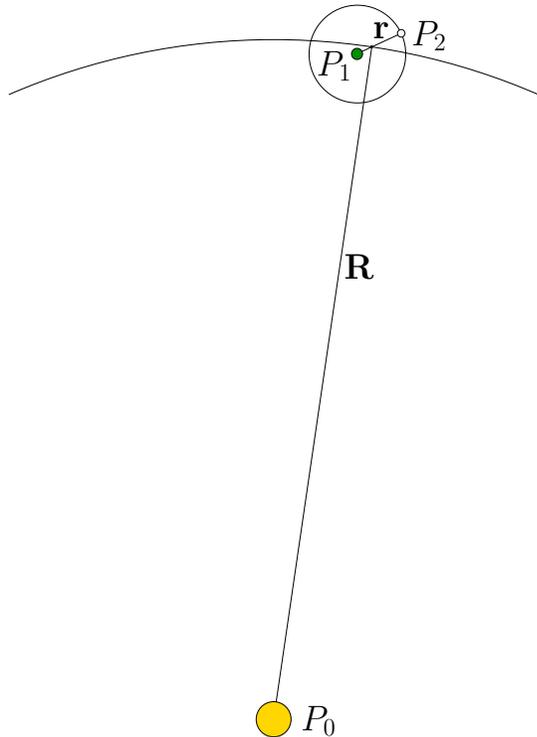
- Il moto di ciascun Pianeta è ben descritto dall'approssimazione kepleriana.

### 5.2.3 Il caso del satellite

- Sia  $N = 2$ , e supponiamo  $|P_1 - P_2|$  molto più piccolo di  $P_1 - P_0$  e  $P_2 - P_0$ , ossia  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \ll |\mathbf{r}_1| \approx |\mathbf{r}_2|$ .
  - Riscrittura delle equazioni:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\mathcal{G}(m_0 + m_1) \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} - \mathcal{G}m_2 \left( \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} + \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3} \right)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mathcal{G}(m_0 + m_2) \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3} - \mathcal{G}m_1 \left( \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} \right) ;$$



- Introduciamo il baricentro  $\mathbf{R}$  dei punti  $P_1, P_2$  e la distanza reciproca  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

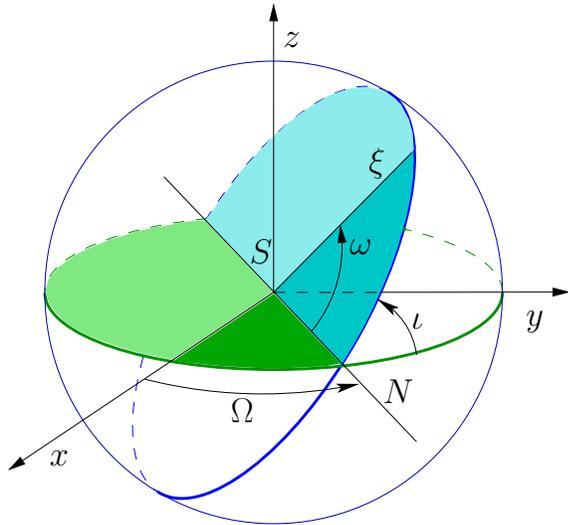
- Sostituiamo nelle equazioni, introducendo l'approssimazione  $\mathbf{r}_1 \approx \mathbf{r}_2 \approx \mathbf{R}$

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\mathcal{G}(m_0 + m_1 + m_2) \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}$$

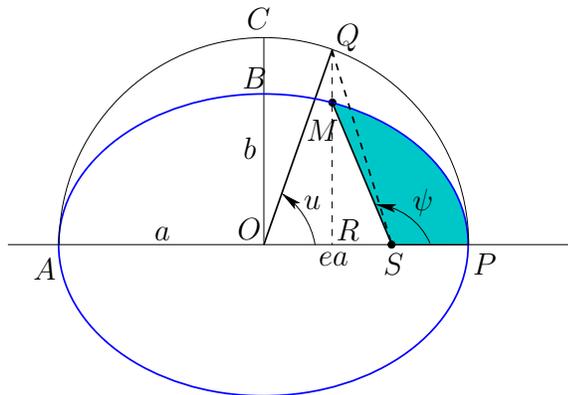
$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mathcal{G}(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

- Il baricentro di  $P_1, P_2$  percorre un'orbita Kepleriana intorno a  $P_0$ .
- $P_1$  e  $P_2$  si comportano a loro volta come un sistema a due corpi.
- L'approssimazione rende ragione del moto di un satellite.

### 5.3 Gli elementi orbitali

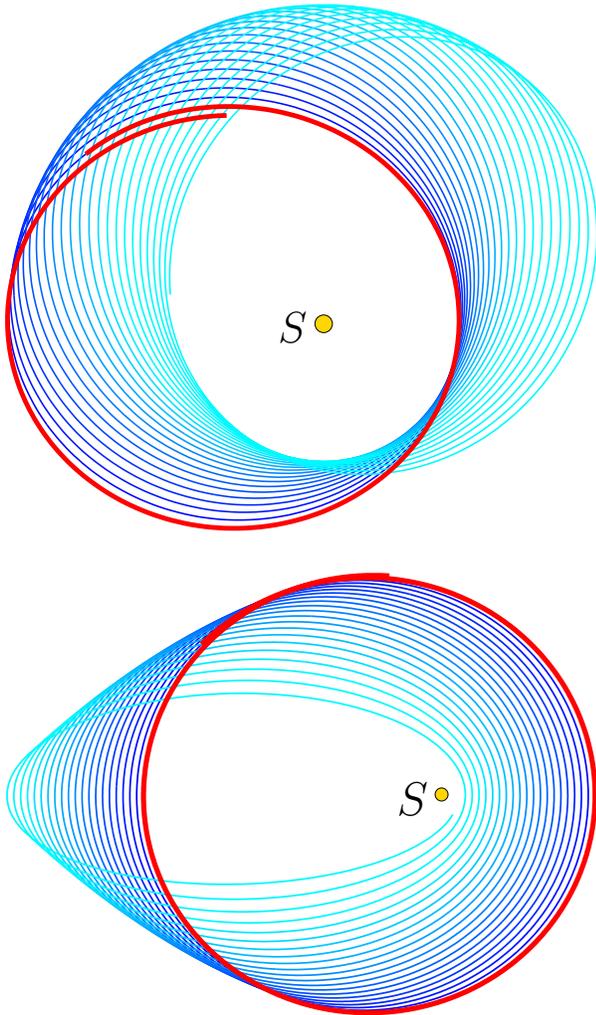


- $S, x, y, z$  : riferimento assoluto con origine nel Sole.
- $N$  : nodo ascendente.
- $\xi, N$  : piano orbitale.
- $\iota$  : inclinazione.
- $\Omega$  : argomento del nodo.
- $\omega$  : argomento del perielio.
- $\tau$  : tempo di passaggio al perielio.

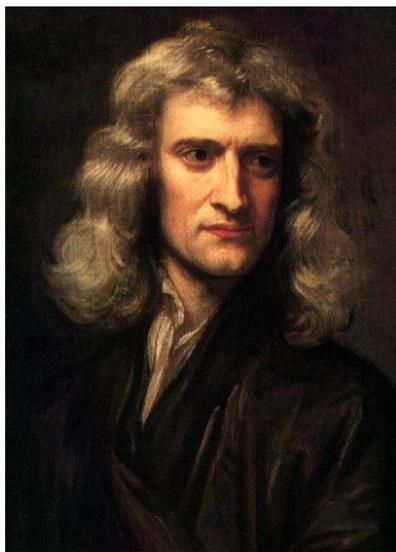


- $O$  : centro dell'ellisse.
- $S$  : Sole.
- $M$  : Pianeta.
- $a, b$  : semiasse maggiore e minore.
- $A, P$  : afelio e perielio.
- $\psi$  : anomalia vera.
- $u$  : anomalia eccentrica.
- $\ell$  : anomalia media, associata a  $\text{area}(MSP)$
- Equazione di Keplero:  $u - e \sin u = \ell = n(t - \tau)$ .
- $n$  : moto medio.

### 5.3.1 Il problema della stabilità delle orbite planetarie



- Nello schema di Keplero:
  - semiasse maggiore  $a$ , eccentricità  $e$ , inclinazione  $\iota$ , argomento del nodo  $\Omega$  e argomento del perielio  $\omega$  restano costanti;
  - l'anomalia media  $\ell$  evolve uniformemente, dunque evolvono anche l'anomalia eccentrica  $u$  e l'anomalia vera  $\psi$ .
- L'azione reciproca tra i corpi celesti potrebbe modificare le orbite, modificando tutti gli elementi orbitali.
  - L'ineguaglianza di Giove e Saturno notata da Keplero è un esempio notevole.
- Conseguenze:
  - Cambiamenti dell'argomento del perielio potrebbero essere innocui: l'orbita avrebbe una forma "a rosetta" (figura in alto).
  - Cambiamenti dell'argomento del nodo potrebbero essere altrettanto innocui.
  - Variazioni di inclinazione sembrano innocui, ma i piani delle orbite non sarebbero più vicini a un piano medio: rilevante?
  - Cambiamenti sistematici di eccentricità avrebbero conseguenze drammatiche; non potrebbe esistere la vita sulla Terra! (figura in basso)
  - Cambiamenti sistematici dei semiassi maggiori avrebbero conseguenze altrettanto drammatiche: espulsione o caduta sul Sole, collisioni tra pianeti &c.
- La domanda era già stata sollevata da Newton.



*Now by the help of these Principles, all material Things seem to have been composed of the hard and solid Particles above-mention'd, variously associated in the first Creation by the Counsel of an intelligent Agent. For it became him who created them to set them in order. And if he did so, it's unphilosophical to seek for any other Origin of the World, or to pretend that it might arise out of a Chaos by the mere Laws of Nature; though being once form'd, it may continue by those Laws for ma-*

*ny Ages. For while Comets move in very excentrick Orbs in all manner of Positions, blind Fate could never make all the Planets move one and the same way in Orbs concentrick, some inconsiderable Irregularities excepted, which may have risen from the mutual Actions of Comets and Planets upon one another, and which will be apt to increase, till this System wants a Reformation. Such a wonderful uniformity in the Planetary System must be allowed the Effect of Choice.*

(Newton: *Opticks*)

Ora alla luce di questi principi tutte le cose materiali appaiono come composte dalle particelle dure e solide che ho appena menzionato, variamente associate tra loro all'atto della Creazione secondo la volontà di un Essere intelligente. Perché Egli, che le ha create, le ha poi sistemate in modo ordinato. E se così Egli ha fatto, è contrario alla filosofia indagare su una diversa Origine del Mondo, o pretendere che esso possa essere uscito dal Caos grazie alle sole Leggi della Natura; e questo benché, una volta formato, esso possa continuare per molte epoche seguendo quelle leggi. Infatti, mentre le Comete si muovono su orbite eccentriche posizionate in tutti i modi possibili, un Fato cieco non avrebbe mai potuto far sì che tutti i pianeti si muovessero in un solo modo, per tutti eguale, su orbite concentriche, fatta eccezione per poche trascurabili irregolarità che possono trovare spiegazione nell'azione mutua di comete e pianeti uno sull'altro e che in futuro potranno aumentare fino a rendere necessaria una riorganizzazione del Sistema. Dobbiamo ammettere che una simile, meravigliosa uniformità sia il risultato di una scelta.

## 5.4 La teoria di Lagrange

- Esposizione alquanto semplificata: il metodo di *variazione delle costanti*.
  - Si ammette che *tutti* gli elementi orbitali possano variare nel tempo, cercando equazioni della forma

$$\begin{aligned} \frac{d\iota}{dt} &= \varepsilon f_a(a, e, \iota, \Omega, \omega, \ell) , & \frac{d\Omega}{dt} &= \varepsilon f_a(a, e, \iota, \Omega, \omega, \ell) , \\ \frac{de}{dt} &= \varepsilon f_a(a, e, \iota, \Omega, \omega, \ell) , & \frac{d\omega}{dt} &= \varepsilon f_a(a, e, \iota, \Omega, \omega, \ell) , \\ \frac{da}{dt} &= \varepsilon f_a(a, e, \iota, \Omega, \omega, \ell) , & \frac{d\ell}{dt} &= \nu + \varepsilon f_a(a, e, \iota, \Omega, \omega, \ell) . \end{aligned}$$

- Il parametro  $\varepsilon$  è supposto piccolo; ad esempio il rapporto tra la massa del Pianeta maggiore e quella del Sole (circa  $10^{-3}$ ) per il Sistema Solare.
  - Il parametro  $\nu = \frac{\pi ab}{T}$  è la frequenza dell'anomalia media  $\ell$ , calcolabile mediante gli elementi orbitali ricavati dalle osservazioni.
- Problema: *trovare il modo di risolvere un sistema di equazioni di questo genere*

### 5.4.1 Alcune osservazioni

- Gli elementi orbitali hanno caratteristiche diverse:
  - l'argomento del nodo  $\Omega$ , l'argomento del perielio  $\omega$  e l'anomalia media  $\ell$  *angoli*;
  - l'inclinazione  $\iota \in [0, \pi/2]$ , l'eccentricità  $e \in [0, 1)$  e il semiasse maggiore  $a > 0$  sono variabili reali.

- C'è una associazione naturale tra coppie di elementi:

$$\begin{aligned} \text{inclinazione } \iota &\longleftrightarrow \text{ argomento del nodo } \Omega , \\ \text{eccentricità } e &\longleftrightarrow \text{ argomento del perielio } \omega , \\ \text{semiasse maggiore } a &\longleftrightarrow \text{ anomalia media } \ell . \end{aligned}$$

- La forma generale delle equazioni.
  - Il calcolo è decisamente complesso. Questa è una traccia sommaria, a scopo illustrativo: per il calcolo esplicito si vedano i testi di Meccanica Celeste, o la memoria di Lagrange.
  - Si scrivono le equazioni in coordinate cartesiane (già viste, definendo opportunamente  $\varepsilon$ )

$$\ddot{\mathbf{r}}_j = -\mathcal{G}(m_0 + m_j) \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} + \varepsilon \mathbf{F}_j(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad \mathbf{F}_j(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathcal{G} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} m_k \left( \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^3} + \frac{\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_k|^3} \right), \quad 1 \leq j \leq n.$$

- Si esprimono le coordinate  $\mathbf{r}_j$  di ciascun pianeta in funzione dei suoi elementi orbitali:  $\mathbf{r}(a, e, \iota, \Omega, \omega, \ell)$ .
- Si esprime la *perturbazione*  $\mathbf{F}(a, e, \iota, \Omega, \omega, \ell)$  in funzione degli elementi orbitali.
- Si calcola l'approssimazione di grado  $\varepsilon$  dello sviluppo di Taylor della perturbazione.
- Si sviluppa in serie di Fourier degli angoli  $\Omega, \omega, \ell$ , calcolando un numero finito di componenti (quante? . . . questo è uno dei problemi).
- Si ricavano le equazioni per gli elementi orbitali come sviluppi

$$\dot{a} = \varepsilon \sum_{k_a, k_e, k_\iota} f_{k_a, k_e, k_\iota}(a, e, \iota) e^{i(k_a \ell + k_e \omega + k_\iota \Omega)},$$

$$\dot{\ell} = \varepsilon \sum_{k_a, k_e, k_\iota} g_{k_a, k_e, k_\iota}(a, e, \iota) e^{i(k_a \ell + k_e \omega + k_\iota \Omega)},$$

... ..

per tutti gli elementi di tutti i pianeti.

- Nota: l'espressione non è del tutto precisa: le equazioni sono sei per pianeta, gli indici  $k$  sono tre per pianeta, . . . ; il lettore deve metterci un po' di immaginazione.
- Nota storica: Lagrange ha scritto una decina memorie tra il 1766 e il 1809, proponendo ogni volta una versione migliorata del suo metodo. Nello stesso periodo Laplace ha scritto altre memorie sullo stesso tema, intrecciate con quelle di Lagrange. Da ricordare, tra le altre, anche le memorie di Eulero, D'Alembert, Clairaut, Boskovich.

### 5.4.2 I moti secolari di perieli e nodi

- Trattare le eccentricità e inclinazioni nulle come equilibri.
  - Coordinate di tipo cartesiano, per ciascun Pianeta:

$$x = e \cos \omega, \quad y = e \sin \omega$$

$$\xi = e \cos \Omega, \quad \eta = e \sin \Omega.$$

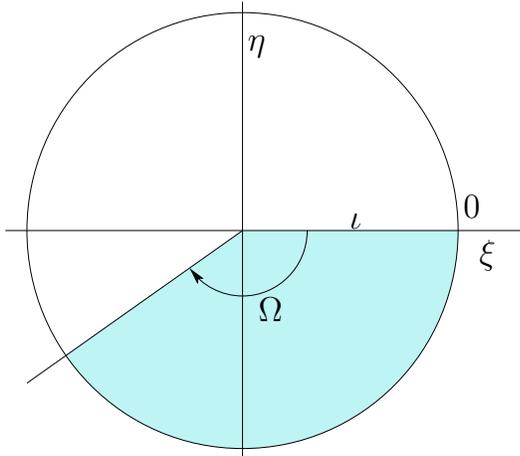
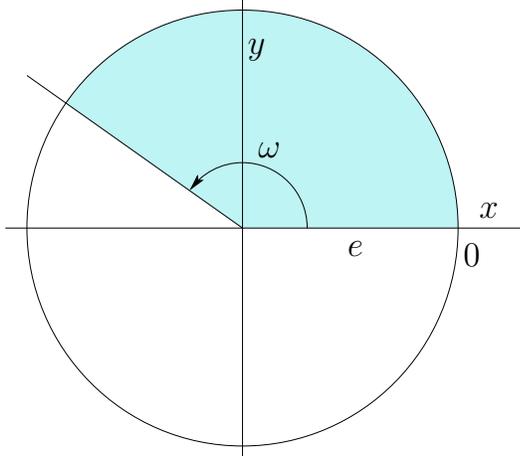
- Le equazioni si approssimano con sistemi lineari

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}; \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{B}\boldsymbol{\xi}, \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}.$$

- Le frequenze calcolate, in secondi d'arco all'anno;  $g$  per i perieli,  $s$  per i nodi.

(a) analitiche, da Brower e Clemence (1961); (b) numeriche, da Nobili, Milani e Carpino (1989) e da Laskar (1990).

	(a)	(b)		(a)	(b)
$g_1$	5.4633	5.5964	$s_1$	-5.2015	-5.6174
$g_2$	7.3447	7.4559	$s_2$	-6.5708	-7.0795
$g_3$	17.3283	17.3646	$s_3$	-18.7436	-18.8512
$g_4$	18.0023	17.9156	$s_4$	-17.6333	-17.7482
$g_5$	4.2959	4.2575	$s_5$	0.0000	0.0000
$g_6$	27.7741	28.2455	$s_6$	-25.7335	-26.3450
$g_7$	2.7193	3.0868	$s_7$	-2.9027	-2.9927
$g_8$	0.6333	0.6726	$s_8$	-0.6775	-0.6925



### 5.4.3 Il modello di Duffing

- Un esempio non troppo complicato: il modello di Duffing. Equazione

$$(5.1) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(\cos \nu t + x^3) ,$$

- Eliminando il termine  $x^3$  si ritrova l'equazione delle oscillazioni forzate.
- Per  $\varepsilon = 0$  è un oscillatore non lineare, che si sa risolvere (si usa l'energia).
- Procedimento perturbativo: si cerca la soluzione mediante sviluppo in serie di  $\varepsilon$

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots ,$$

con incognite  $x_0(t), x_1(t), x_2(t), \dots$

- Sistema di equazioni

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 &= 0 \\ \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= \cos \nu t + x_0^3 \\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= 3x_0^2 x_1 \\ &\dots \\ \ddot{x}_s + \omega^2 x_s &= \psi_s(x_0, \dots, x_{s-1}) \\ &\dots \end{aligned}$$

dove

$$\psi_s(x_0, \dots, x_{s-1}) := \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3 \geq 0 \\ j_1 + j_2 + j_3 = s-1}} x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3}$$

- Soluzione all'ordine 1:

$$x_0(t) = A \cos \omega t .$$

- Ordine  $\varepsilon$ . Equazione:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= \cos \nu t + A^3 \cos^3 \omega t \\ &= \cos \nu t + \frac{A^3}{4} \cos 3\omega t + \frac{3A^3}{4} \cos \omega t .\end{aligned}$$

Soluzione:

$$x_1(t) = -\frac{1}{\nu^2 - \omega^2} \cos \nu t - \frac{A^3}{32\omega^2} \cos 3\omega t + \frac{3A^3 t}{8\omega} \sin \omega t .$$

- Notare la presenza di un *termine secolare*, lineare nel tempo.

- Ordine  $\varepsilon^2$ . Equazione:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= \frac{3A^2}{2} \left( -\frac{1}{\nu^2 - \omega^2} \cos \nu t - \frac{A^3}{32\omega^2} \cos 3\omega t + \frac{3A^3 t}{8\omega} \sin \omega t \right) (1 + \cos 2\omega t) \\ &= -\frac{3A^2}{2(\nu^2 - \omega^2)} \cos \nu t - \frac{3A^5}{128\omega^2} \cos \omega t - \frac{3A^5}{64\omega^2} \cos 3\omega t - \frac{3A^5}{128\omega^2} \cos 5\omega t \\ &\quad - \frac{3A^2}{4(\nu^2 - \omega^2)} \cos(\nu t - 2\omega t) - \frac{3A^2}{4(\nu^2 - \omega^2)} \cos(\nu t + 2\omega t) \\ &\quad + \frac{9A^5 t}{32\omega} \sin \omega t + \frac{9A^5 t}{32\omega} \sin 3\omega t\end{aligned}$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}x_2(t) &= \frac{3A^2}{2(\nu - \omega)^2(\nu + \omega)^2} \cos \nu t - \frac{21A^5}{1024\omega^4} \cos 3\omega t + \frac{A^5}{1024\omega^4} \cos 5\omega t \\ &\quad + \frac{3A^2}{4(\nu - 3\omega)(\nu - \omega)^2(\nu + \omega)} \cos(\nu - 2\omega)t + \frac{3A^2}{4(\nu - \omega)(\nu + \omega)^2(\nu + 3\omega)} \cos(\nu + 2\omega)t \\ &\quad + \frac{15A^5 t}{256\omega^3} \sin \omega t - \frac{9A^5 t}{256\omega^3} \sin 3\omega t - \frac{9A^5 t^2}{128\omega^2} \cos \omega t .\end{aligned}$$

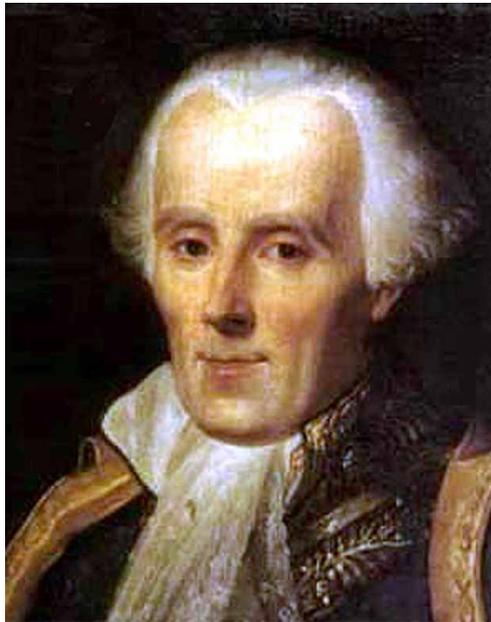
- Notare la presenza di *risonanze*, oltre a termini secolari quadratici in  $t$ .

- Agli ordini successivi:

- Proliferazione di risonanze e termini di grado crescente in  $t$ .
- *Convergenza?*

## 5.5 I risultati principali del secolo XVIII

- La precessione degli equinozi: D'Alembert.
- L'invarianza dei semiassi maggiori delle orbite al primo ordine in  $\varepsilon$ : Lagrange.
- I moti secolari dei perielii e dei nodi: Lagrange, Laplace.
- La spiegazione della *grande ineguaglianza* di Giove e Saturno: Laplace.



*Nous devons envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'Analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux.*

■ Noi dobbiamo considerare lo stato presente dell'universo come l'evoluzione del suo stato passato, e come la causa di quello che accadrà. Un'intelligenza che, a un certo istante, potesse conoscere tutte le forze che animano la natura, e la posizione relativa di tutto ciò che la compone, e che fosse anche così vasta da riuscire a sottoporre questi dati all'Analisi, potrebbe condensare in una sola formula i movimenti dei corpi più grandi dell'universo e quelli dell'atomo più leggero; nulla per lei sarebbe incerto, e ai suoi occhi sarebbero presenti sia l'avvenire che il passato.

(Laplace: *Théorie analytique des probabilités*)

## 5.6 Due risultati del secolo XIX

- La scoperta di Cerere.
  - Notte del 1 gennaio 1801: Piazzi scopre un nuovo pianeta; lo chiama “Cerere”.
  - 11 febbraio 1801: dopo averne osservato il movimento per circa  $3^\circ$ , Piazzi non riesce più a osservarlo. Perso?
  - Settembre 1801: Gauss elabora un metodo per il calcolo degli elementi orbitali sulla base di poche osservazioni: *Theoria motus corporum cœlestium*.
  - Ottobre 1801: Gauss calcola la posizione prevista di Cerere.
  - 7 Dicembre 1801: De Zach ritrova Cerere, a meno di un grado dalla posizione calcolata da Gauss.
- La scoperta di Nettuno.
  - 1781: Herschel scopre Urano. 1821: Bouvard calcola l’orbita.
  - Le osservazioni mostrano discrepanze sensibili rispetto a calcolo: nel 1845 la deviazione arriva a  $2'$ .
  - Adams ad Leverrier avanzano la congettura che ci sia un altro pianeta che perturba il moto di Urano. Provano a calcolarne la posizione.
  - Agosto 1846: Leverrier pubblica i suoi risultati.
  - 23 Settembre 1846: Galle osserva Nettuno, a  $52'$  dalla posizione prevista da Leverrier.
- Prosegue il raffinamento dei metodi perturbativi. Idea guida:  
*Scrivere le soluzioni delle equazioni di Newton come serie di Fourier negli angoli, convergenti per tutti i tempi.*
  - In altre parole: la rinascita degli epicicli dell’astronomia classica.

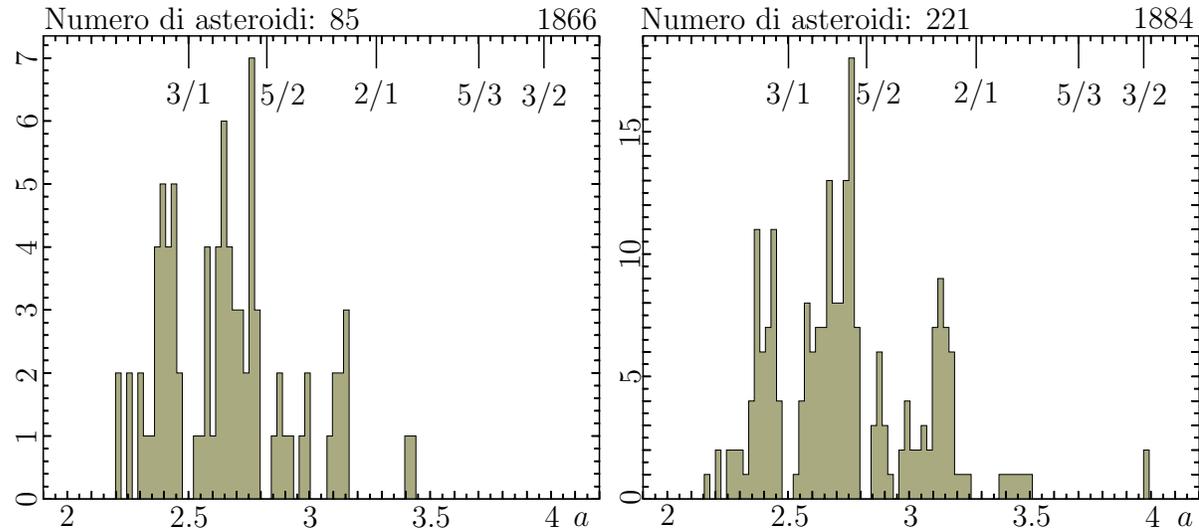
**Tutto a posto? . . . forse no.**

# 6

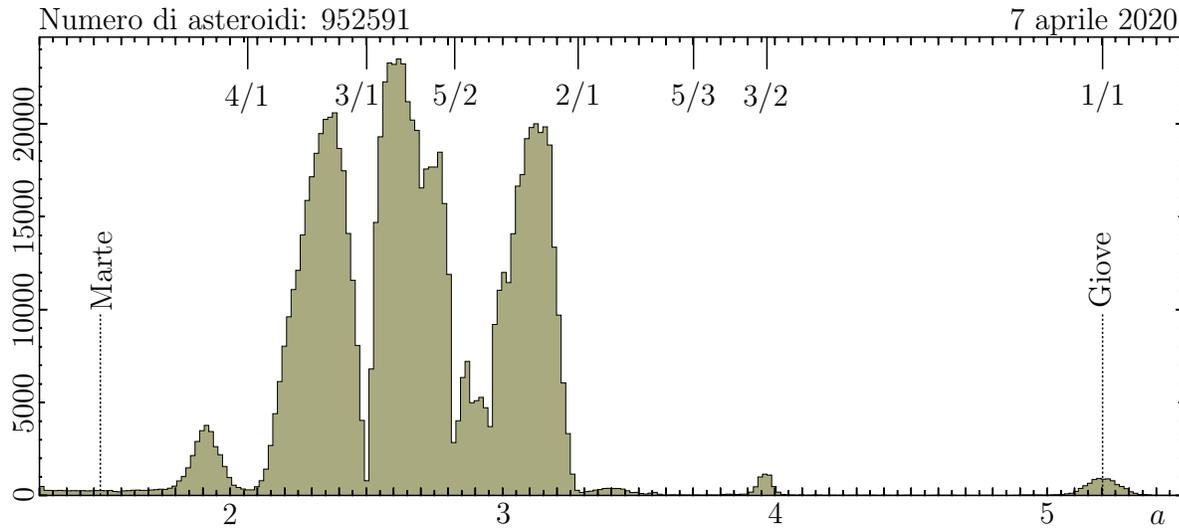
## IL PROBLEMA DELLA STABILITÀ

- Gli asteroidi e le risonanze.
- I sistemi integrabili, completamente ordinati.
- Il teorema di Kolmogorov.
- Stabilità esponenziale.
- La stabilità del Sistema Solare.

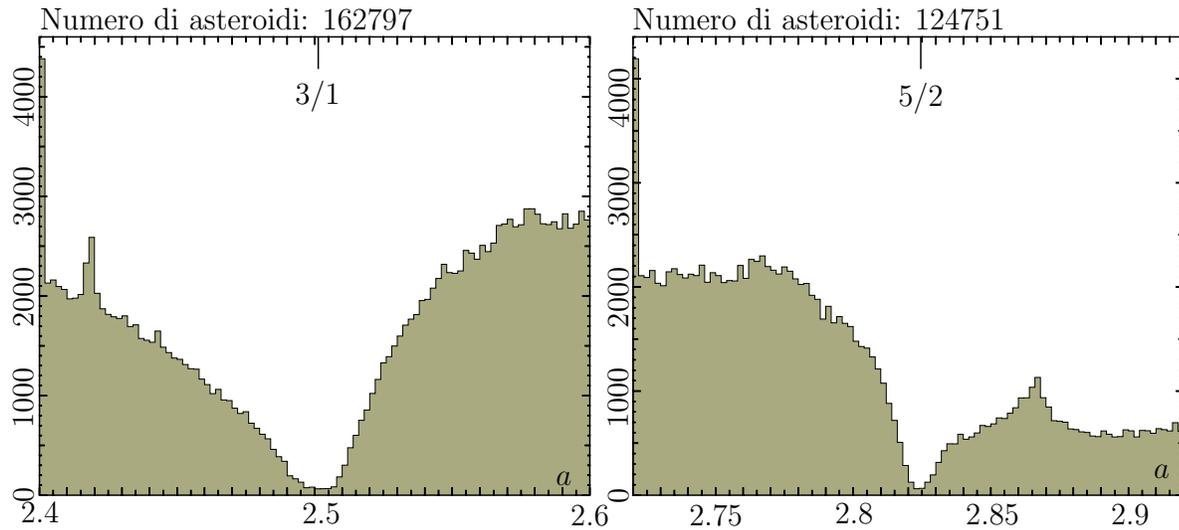
## 6.1 Gli asteroidi e le risonanze



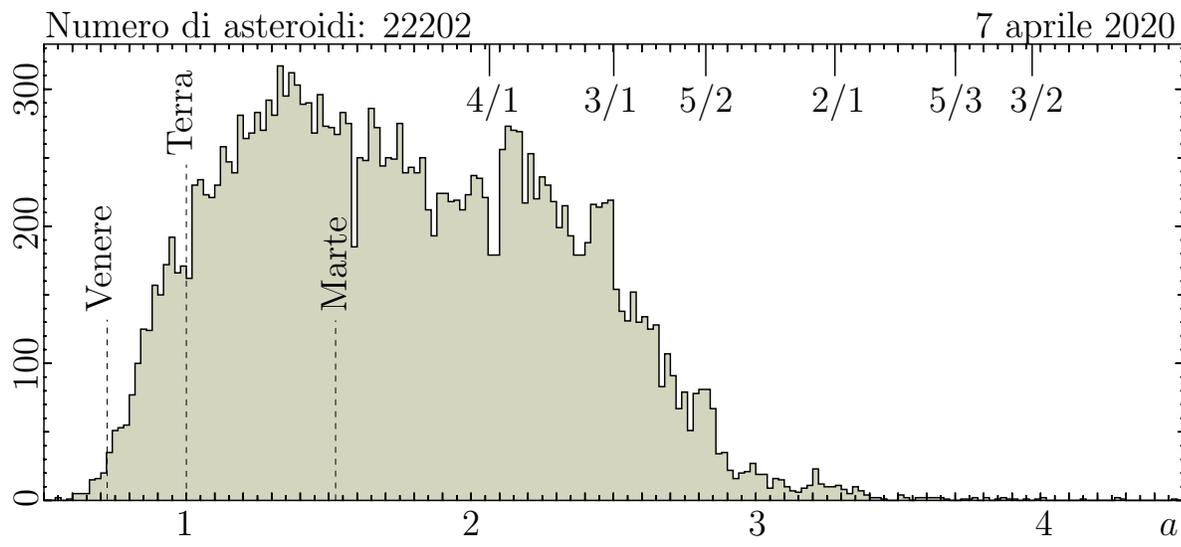
- *Le lacune di Kirkwood*
  - 1866: Daniel Kirkwood mette in evidenza la non uniformità della distribuzione degli asteroidi:
  - Ci sono delle lacune in corrispondenza alle *risonanze in moto medio* (ossia tra i periodi) con Giove.
  - A sinistra: l'istogramma per 85 asteroidi, noti nel 1866.
  - 1884: in una seconda memoria Kirkwood conferma il fenomeno tenendo conto delle nuove scoperte.
  - A destra: l'istogramma per il 1884, comprendente 221 asteroidi
- L'ipotesi di Kirkwood: la risonanza destabilizza le orbite, creando le lacune nella distribuzione.



Asteroidi della fascia tra Marte e Giove:  
l'esistenza delle lacune di Kirkwood risulta ampiamente confermata.  
(Dati da IAU Minor Planet Center, per tutte le figure).



Gli intervalli del semiasse maggiore interessati dalle risonanze 3/1 e 5/2, poco visibili nella figura sopra.



Istogramma della distribuzione dei Near Earth Asteroids (o NEA) che transitano in vicinanza dell'orbita della Terra.

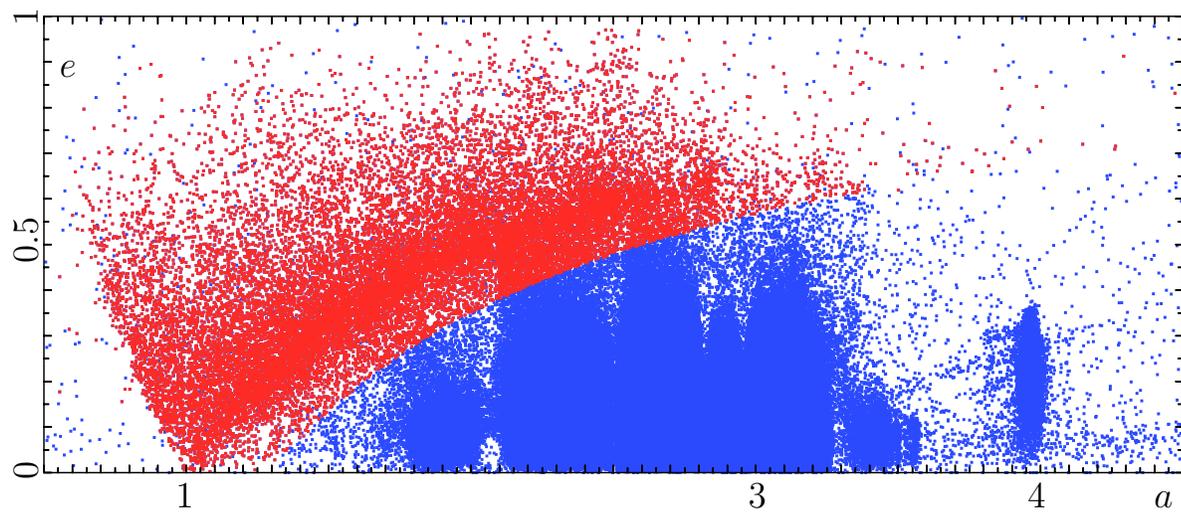


Grafico eccentricità / semiasse maggiore per gli asteroidi catalogati.  
 ○ Rosso: i NEA.  
 ○ Blu: non intersecano l'orbita della Terra.

## 6.2 I sistemi integrabili, completamente ordinati

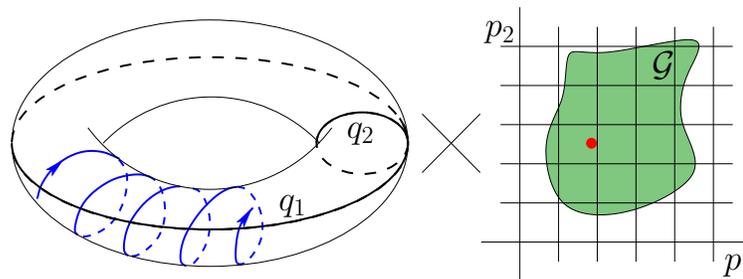
### 6.2.1 Sistemi Hamiltoniani

- Lo spazio delle fasi:
  - Descritto da  $n$  coppie di *variabili canoniche*  $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ , dette *coniugate*.
  - In variabili cartesiane le  $q$  sono le coordinate usuali nello spazio, le  $p$  sono le quantità di moto.
- Perché il formalismo Hamiltoniano?
  - È lo schema più generale ed efficace che conosciamo per descrivere i sistemi conservativi, compreso il sistema planetario.
- Le equazioni canoniche.
  - La dinamica è determinata dalla funzione *Hamiltoniana*  $H(q, p)$ , definita sullo spazio delle fasi.
  - Le equazioni differenziali assumono la forma particolarmente elegante

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

### 6.2.2 Le variabili d'angolo–azione

- Le coordinate sono *angoli*:  $q \in \mathbb{T}^n$ ;
- I momenti coniugati alle coordinate sono detti *azioni*:  $p \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ , con  $\mathcal{G}$  aperto.



- Il prototipo di sistema integrabile:
  - In variabili d'angolo–azione  $(q, p) \in \mathbb{T}^n \times \mathcal{G}$  l'Hamiltoniana è una funzione  $H(p)$  che *dipende solo dalle azioni*.
  - Le equazioni di Hamilton sono

$$\dot{q}_j = \omega_j(p) := \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = 0.$$

- Le quantità  $\omega_j(p)$  sono le *frequenze*, che dipendono dalle azioni ma restano costanti durante il movimento.
- Le soluzioni con dato iniziale  $(q_0, p_0)$  si scrivono

$$q(t) = q_0 + \omega(p_0)t, \quad p(t) = p_0.$$

- La dinamica si descrive come un *flusso di Kronecker sul toro*  $\mathbb{T}^n$  parametrizzato dall'azione:
  - Simile a un sistema di oscillatori, ma . . .
  - la frequenza degli oscillatori non dipende dall'ampiezza: *isocronismo*;
  - qui la frequenza dipende dal valore iniziale delle azioni.
- Nello spazio delle fasi i tori con frequenze risonanti sono densi, così come quelli con frequenze non risonanti.
  - Simile alle orbite imperturbate della standard map.

### 6.2.3 Le costanti del moto

- Variabile dinamica: una funzione reale  $\Phi$  sullo spazio delle fasi.
  - Le quantità meccaniche come quantità di moto, momento angolare, energia cinetica o potenziale, energia totale;
  - la temperatura o la pressione in un gas;
  - il numero di individui in una popolazione; &c
- Costante del moto, o *integrale primo*:
  - Una variabile dinamica che resta costante durante l'evoluzione del sistema.
  - Per il sistema  $\dot{x}_j = F_j(x_1, \dots, x_n)$  una costante del moto deve soddisfare

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sum_{j=1}^n F_j(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0 .$$

- Se il campo vettoriale è Hamiltoniano la condizione si scrive

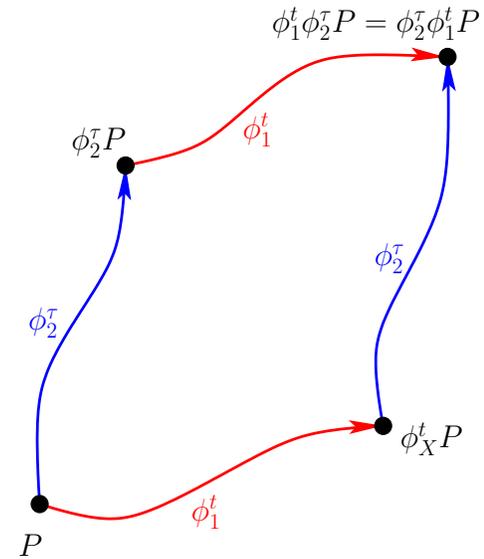
$$\frac{d\Phi}{dt} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = 0 .$$

- È comodo introdurre la *parentesi di Poisson* tra due variabili dinamiche qualsiasi  $f(q, p)$ ,  $g(q, p)$

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right)$$

- La condizione perché  $\Phi(q, p)$  sia integrale primo si scrive  $\{\Phi, H\} = 0$  .
- Vale  $\{H, H\} = 0$ ; quindi l'Hamiltoniana (se non dipende dal tempo, come stiamo ammettendo tacitamente) è un integrale primo. Corrisponde alla *conservazione dell'energia*.
- Sembra tutto un giochetto puramente formale (e un po' stucchevole), ma...

- Perché gli integrali primi sono utili?
  - Se  $\Phi(q, p)$  è un integrale primo allora la superficie  $\Phi(q, p) = \Phi(q_0, p_0)$  (a destra il valore nel punto iniziale) resta *invariante per il flusso*.
  - Questa è una superficie di dimensione  $2n - 1$  nello spazio delle fasi.
  - Se ho due integrali primi  $\Phi_1(q, p), \Phi_2(q, p)$  *indipendenti* allora l'intersezione tra le due superfici invarianti di  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  è a sua volta una superficie invariante di dimensione  $2n - 2$ .
  - Se ho  $n$  integrali primi  $\Phi_1(q, p), \dots, \Phi_n(q, p)$  *indipendenti* allora lo spazio delle fasi è costituito da superfici invarianti di dimensione  $n$  parametrizzate dai valori iniziali di  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ .
  - Potrei continuare con altri integrali primi? Uhm... .
- Gli integrali primi di un sistema Hamiltoniano integrabile in variabili d'angolo-azione  $H(p)$ . Caso di due gradi di libertà:  $\mathbb{T}^2 \times \mathcal{G}$  con  $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ .
  - Ciascuna delle azioni  $p_1, p_2$  è un integrale primo:  $\{p_j, H\} = 0$ .
  - Le azioni sono tra loro indipendenti, e la superficie a 2 dimensioni risultante è un toro  $\mathbb{T}^2$  descritto dagli angoli  $q_1, q_2$ .
  - Se le frequenze  $\omega_1(p_0), \omega_2(p_0)$  sono non risonanti l'orbita riempie densamente il toro.
  - I tori risonanti sono densi, quindi in generale *ci possono essere altri integrali primi indipendenti solo se tutti i tori  $\mathbb{T}^n$  hanno frequenze risonanti*; quindi solo se vale  $k_1\omega_1(p) + k_2\omega_2(p) = 0$  su tutto lo spazio delle fasi.
- La *commutazione dei flussi*.
  - Posso considerare le due funzioni Hamiltoniane  $\Phi_1 = p_1$  e  $\Phi_2 = p_2$  con i flussi corrispondenti.
  - Vale  $\{\Phi_1, \Phi_2\} = 0$ , quindi  $\Phi_2$  è integrale primo per il flusso di  $\Phi_1$ , e viceversa.
  - Posso scambiare l'ordine di applicazione dei flussi: si dice che i flussi *commutano*.



#### 6.2.4 Il teorema di Liouville–Arnold–Jost

- Quello che abbiamo visto sembra un caso molto particolare, ... un giochetto divertente, ma ...
  
- Supponiamo che siano dati:
  - Un sistema Hamiltoniano  $H(x, y)$  (la notazione  $x, y$  per sottolineare che non si tratta necessariamente di variabili d'angolo–azione);
  - Un insieme di  $n$  integrali primi  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  per  $H$  che siano *indipendenti* e che valga  $\{\Phi_j, \Phi_k\} = 0$  per ogni coppia  $j, k$ ; si dice che formano un *sistema completo di integrali primi in involuzione*;
  - Che la superficie di energia costante  $H$  sia compatta.
  
- *Teorema:*
  - I flussi generati dalle funzioni  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  commutano.
  - Si possono introdurre delle variabili d'angolo azione  $p(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$  con gli angoli  $q_1, \dots, q_n$  coniugati.
  - *Il sistema Hamiltoniano assume la forma di un sistema integrabile, con  $H(p)$  dipendente dalle sole azioni.*

- Esempio: il problema di Keplero

- Ricordiamo gli elementi orbitali:

$$\begin{array}{ll}
 a : & \text{semiasse maggiore} , & \ell : & \text{anomalia media} , \\
 e : & \text{eccentricità} , & \omega : & \text{argomento del perielio} , \\
 \iota : & \text{inclinazione} , & \Omega : & \text{argomento del nodo} .
 \end{array}$$

però non sono variabili adatte per il formalismo canonico.

- Le variabili canoniche di Delaunay.

$$\begin{array}{ll}
 L = \sqrt{mka} , & \ell = n(t - \tau) : & \text{anomalia media} , \\
 G = L\sqrt{1 - e^2} , & g = \omega : & \text{argomento del perielio} , \\
 \Theta = G \cos \iota , & \vartheta = \Omega : & \text{longitudine del nodo} ,
 \end{array}$$

dove  $m$  è la massa del pianeta,  $k$  la costante del potenziale Kepleriano,  $n$  il moto medio e  $\tau$  il tempo del passaggio al perielio.

- Le azioni sono:

$L$  corrispondente al semiasse maggiore, coniugata all'anomalia media  $\ell$ ;

$G$  il modulo del momento angolare, ortogonale al piano dell'orbita e coniugato all'argomento del perielio  $g$

$\Theta$  la proiezione del momento angolare sulla direzione ortogonale al piano dell'eclittica, coniugata alla longitudine del nodo  $\vartheta$

- L'Hamiltoniana in variabili di Delaunay si scrive

$$H = -\frac{mk^2}{2L^2} .$$

- Le equazioni canoniche si scrivono

$$\begin{aligned} \dot{\ell} &= \frac{mk^2}{L^3} , & \dot{L} &= 0 , \\ \dot{g} &= 0 , & \dot{G} &= 0 , \\ \dot{\vartheta} &= 0 , & \dot{\Theta} &= 0 . \end{aligned}$$

- L'orbita giace su un toro  $\mathbb{T}^3$  descritto dai tre angoli, ma...
- gli angoli  $g$  (perielio) e  $\vartheta$  (nodo) restano fissi;
- solo l'anomalia media  $\ell$  evolve linearmente, con frequenza (moto medio  $n$ ) proporzionale a  $L^{-3}$ , a sua volta proporzionale a  $a^{-3/2}$ .

- Esempio più semplice: l'oscillatore armonico

$$H = \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2)$$

- Variabili d'angolo-azione:

$$x = \sqrt{2p} \cos q , \quad y = \sqrt{2p} \sin q$$

- L'Hamiltoniana diventa

$$H = \omega p$$

- Si può considerare anche un sistema di oscillatori indipendenti: descrive il comportamento di un sistema in prossimità di un equilibrio; ad esempio, i moti secolari di nodi e perielii nella teoria di Lagrange.

## 6.3 Il teorema di Kolmogorov

### 6.3.1 Il problema generale della dinamica

- Enunciato di Poincaré:

*Studiare la dinamica di un sistema con Hamiltoniana in variabili d'angolo-azione*

$$H(q, p) = h(p) + \varepsilon f(q, p), \quad (q, p) \in \mathbb{T}^n \times \mathcal{G}$$

*dove  $\varepsilon$  è un parametro piccolo che controlla l'entità delle perturbazione.*

- Il Sistema Solare è descritto da un'Hamiltoniana che ha precisamente questa forma:
  - $h(p)$  descrive il moto del singolo pianeta sotto l'azione del Sole;
  - $f(q, p)$  descrive l'interazione tra i pianeti, che è piccola;
  - $\varepsilon$  corrisponde al rapporto tra la massa di Giove (il pianeta più grosso) e quella del Sole. Per il Sistema Solare:  $\varepsilon \sim 10^{-3}$ .
- Modelli più semplici (apparentemente):
  - Oscillatori o rotatori accoppiati:

$$H = \sum_{j=1}^n \omega_j p_j + \varepsilon f(q, p) \quad \text{oppure} \quad H = \frac{p^2}{2} + \varepsilon f(q, p)$$

con  $f(q, p)$  periodica di periodo  $2\pi$  negli angoli  $q$ .

### 6.3.2 La forma normale di Kolmogorov

- Poniamo

$$H(q, p) = \sum_{j=1}^n \omega_j p_j + \varepsilon f(q, p), \quad f(q, p) = \mathcal{O}(|p|^2),$$

ossia:  $f(q, p)$  è funzione almeno quadratica in  $p$ .

- Equazioni canoniche:

$$\dot{q}_j = \omega_j + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\varepsilon \frac{\partial f}{\partial q_j}.$$

- Nota:  $\frac{\partial f}{\partial p_j} = \mathcal{O}(|p|)$  e  $\frac{\partial f}{\partial q_j} = \mathcal{O}(|p|^2)$  si annullano per  $p = 0$ ;

- Con dati iniziali  $p(0) = 0$  e  $q(0) = q_0$  arbitrario le soluzioni sono

$$q(t) = q_0 + \omega t, \quad p(t) = 0.$$

- Il toro  $p = 0$  è invariante, e le orbite sono quelle del flusso di Kronecker;

- per dato iniziale  $p(0) \neq 0$ , piccolo quanto si vuole, non si sa dire più nulla!

- Anche questo sembra un giochetto bizzarro! ... ma ...

- Le figure del pendolo forzato, o del modello di Hénon e Heiles, o della standard map ci suggeriscono che esistono delle curve invarianti, e che le orbite caotiche vengono generate dalle risonanze.

- La rotazione del cerchio perturbata suggerisce che il fenomeno della cattura in risonanza non riguarda necessariamente tutte le orbite.

- Domanda: e se ci concentrassimo su frequenze non risonanti?

### 6.3.3 Risonanza e non risonanza

- Il caso di dimensione 2 (più semplice, ma si generalizza)
  - Se  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r}{s}$  con  $r, s$  interi non nulli allora le frequenze sono risonanti.
  - L'esempio della rotazione del cerchio perturbata mostra che le frequenze per cui  $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \sim \frac{r}{s}$ , ma la differenza è piccola, vengono catturate in risonanza.
  - Ci serve una *condizione di non risonanza forte*.

- La disegualianza diofantea: quanto si può approssimare un numero irrazionale con dei razionali?
  - Supponiamo che per ogni  $r, s$  non nulli e per  $\alpha \in [0, 1]$  valga la disegualianza

$$\left| \alpha - \frac{r}{s} \right| \geq \frac{\gamma}{|s|^3}, \quad \gamma > 0.$$

- Sia  $\Omega$  l'insieme degli  $\alpha$  per cui vale la disegualianza sopra.
- Domanda: qual è la misura di  $\Omega$ ? (si intende misura di Lebesgue).
- Ordiniamo tutti i razionali dell'intervallo  $[0, 1]$ , senza preoccuparci dei doppioni:

$$\left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}, \left\{ \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2} \right\}, \left\{ \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} \right\}, \dots$$

- Valutiamo la misura del complemento  $\Omega^c$  di  $\Omega$ :

$$\mu(\Omega^c) < \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=0}^s \frac{\gamma}{s^3} < \sum_{s=1}^{\infty} (s+1) \frac{\gamma}{s^3} < 2\gamma \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} = 2\gamma \frac{\pi^2}{6}.$$

- Per  $\gamma \rightarrow 0$  la misura di  $\Omega$  tende a 1; dunque

*Le frequenze non risonanti sono preponderanti rispetto a quelle risonanti.*

- In dimensione superiore a 2 la condizione diofantea si scrive

$$|\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau} \quad \text{per } 0 \neq k \in \mathbb{Z}^n, \quad \tau > n - 1.$$

### 6.3.4 La persistenza dei tori invarianti non risonanti

- Il metodo di Kolmogorov (nel caso semplificato dei rotatori):

$$H(q, p) = \frac{|p^2|}{2} + \varepsilon f(q), \quad \omega = p.$$

- Si sceglie  $p^*$  tale che  $\omega = p^*$  soddisfi la condizione diofantea.
- Si esegue una traslazione sulle azioni:  $p' = p - p^*$ .
- Si trasforma l'Hamiltoniana (riscrivendo  $p$  per  $p'$ ;  $\eta$  è una costante che si può eliminare)

$$H(q, p) = \eta + \langle \omega, p \rangle + \frac{|p^2|}{2} + \varepsilon f(q).$$

- Si cerca una trasformazione prossima all'identità (canonica: deve rispettare la struttura Hamiltoniana)

$$q = q' + \varepsilon \varphi(q', p'), \quad p = p' + \varepsilon \psi(q', p')$$

che pone l'Hamiltoniana nella forma normale di Kolmogorov.

- Teorema (Kolmogorov, 1954):

*Se  $\omega$  soddisfa la condizione diofantea e se  $\varepsilon$  è abbastanza piccolo la trasformazione in forma normale di Kolmogorov esiste.*

- Il toro imperturbato  $p^*$  sopravvive alla perturbazione, resta invariante, e le orbite sono un flusso di Kronecker con frequenze  $\omega$  diofantee.
- Qualche riflessione.
  - Le risonanze distruggono i tori invarianti, ma per  $\varepsilon$  piccolo ne sopravvive un sottoinsieme di misura relativa grande.
  - Al crescere di  $\varepsilon$  ci si aspetta che i tori invarianti che sopravvivono siano sempre meno, distrutti progressivamente dalle risonanze.
  - Corrisponde molto bene a quello che vediamo nelle figure.

## 6.4 Stabilità esponenziale

### 6.4.1 Il teorema di non integrabilità di Poincaré

Torniamo al problema generale della dinamica.

$$H(q, p) = h(p) + \varepsilon f(q, p), \quad (q, p) \in \mathbb{T}^n \times \mathcal{G} \dots \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n .$$

- Primo tentativo: trovare gli integrali primi aggiuntivi necessari.
  - Proviamo con lo sviluppo in serie di potenze di  $\varepsilon$

$$\Phi(q, p) = \Phi_0(p) + \varepsilon \Phi_1(q, p) + \varepsilon^2 \Phi_2(q, p) + \dots$$

- Si espande l'equazione

$$\{\Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \dots, h + \varepsilon f\} = 0$$

in un sistema ordinato per potenze di  $\varepsilon$ :

$$\{\Phi_0, h\} = 0, \quad \{\Phi_1, h\} + \{\Phi_0, f\} = 0, \quad \dots, \quad \{\Phi_s, h\} + \{\Phi_{s-1}, f\} = 0, \quad \dots$$

- Si cerca di risolvere il sistema per ricorrenza.
- Il teorema di Poincaré:
  - Se  $\det\left(\frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_k}\right) \neq 0$  non è possibile costruire un integrale primo  $\Phi$  che sia indipendente da  $H$ .
    - La *condizione di non degenerazione* sul determinante significa che la relazione tra azioni e frequenze è localmente invertibile.
  - Se  $h(p) = \langle \omega, p \rangle$  (sistema degenere) allora:
    - L'integrale primo  $\Phi$  indipendente da  $H$  si può costruire formalmente, ma...
    - la serie in generale non converge.

### 6.4.2 Il carattere asintotico delle serie perturbative

- La divergenza della serie per l'integrale primo, anche se formalmente possibile:
  - La norma della funzione  $\Phi_s$  cresce molto rapidamente.
  - Ad esempio, se  $h(p) = \langle \omega, p \rangle$  e le frequenze  $\omega$  sono diofantee si trova (semplificando l'argomento)

$$\|\Phi_s\| \sim \varepsilon^s s! .$$

- La via d'uscita (Moser, 1956; Littlewood, 1959):
  - la serie  $\sum_{s \geq 0} \varepsilon^s s!$  non è convergente, ma...
  - se si considera l'approssimazione troncata a  $r$  termini  $\Phi^{(r)} = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \dots + \varepsilon^r \Phi_r$  (che è funzione ben definita) si ha

$$\frac{d\Phi^{(r)}}{dt} = \underbrace{\{\Phi_0, h\} + \varepsilon(\{\Phi_1, h\} + \{\Phi_0, f\}) + \dots + \varepsilon^r(\{\Phi_r, h\} + \{\Phi_{r-1}, f\})}_{=0} + \varepsilon^{r+1} \{\Phi_r, f\} \sim \varepsilon^{r+1} r! .$$

- La quantità  $\varepsilon^r r!$ , al variare di  $r$  e tenendo  $\varepsilon$  fissato, decresce (all'inizio rapidamente se  $\varepsilon$  è piccolo) fino a  $r = 1/\varepsilon$ ; poi inizia a crescere.
- Per  $r = 1/\varepsilon$  si valuta (con la formula di Stirling)

$$\varepsilon^r r! \sim \varepsilon^r r^r e^{-r} = \varepsilon^r \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^r e^{-r} = e^{-1/\varepsilon} ,$$

che tende a zero più rapidamente di qualunque potenza di  $\varepsilon$ .

### 6.4.3 Il teorema di Nekhoroshev

- L'evoluzione della funzione  $\Phi_0(t)$ :

$$|\Phi_0(t) - \Phi_0(0)| \leq \underbrace{|\Phi_0(0) - \Phi^{(r)}(0)|}_{\delta_r(0)} + \underbrace{|\Phi^{(r)}(t) - \Phi^{(r)}(0)|}_{\leq |t| |\dot{\Phi}^{(r)}| \sim |t| e^{-1/\varepsilon}} + \underbrace{|\Phi^{(r)}(t) - \Phi_0(t)|}_{\delta_r(0)}$$

con  $\delta_r(0) \sim \varepsilon$  e  $\delta_r(t) \sim \varepsilon$ .

- accettando una variazione di ordine  $\varepsilon$  si conclude

$$|\Phi_0(t) - \Phi_0(0)| \leq 2\varepsilon \quad \text{per} \quad |t| \leq T_0 \exp(1/\varepsilon)$$

con una costante  $T_0$ .

- Il commento di Littlewood:

*If not eternity, this is a considerable slice of it*

- La formulazione più generale di Nekhoroshev.

- Si assume che  $h(p)$  sia funzione convessa;

- Teorema:

Se  $\varepsilon$  è abbastanza piccolo allora le azioni  $p_1, \dots, p_n$  del sistema soddisfano

$$|p(t) - p(0)| < \varepsilon^b \quad \text{per} \quad |t| \leq T_* \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^a}\right)$$

con una costante  $T_*$  e con  $b \sim 1/4$  e  $a \sim 1/n$ .

## 6.5 La stabilità del Sistema Solare

La domanda preliminare:

*I teoremi di Kolmogorov e di Nekhoroshev si applicano al Sistema Solare?*

- Ambedue i teoremi valgono se  $\varepsilon$  è abbastanza piccolo. Ma . . . *quanto piccolo?*

### 6.5.1 Confronto tra i teoremi di Kolmogorov e di Nekhoroshev

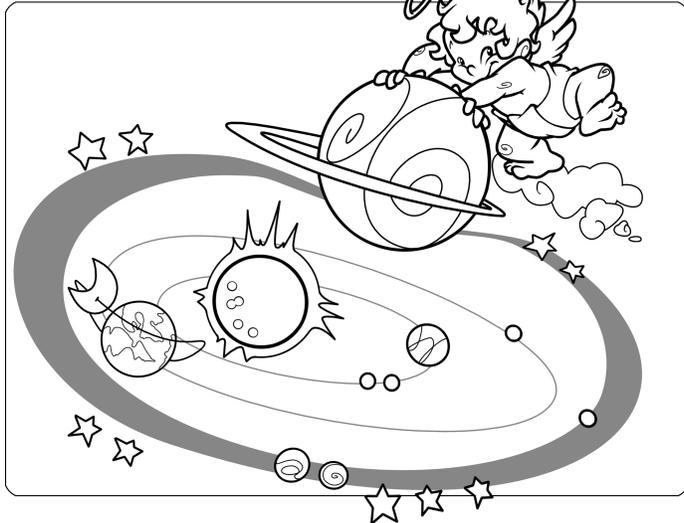
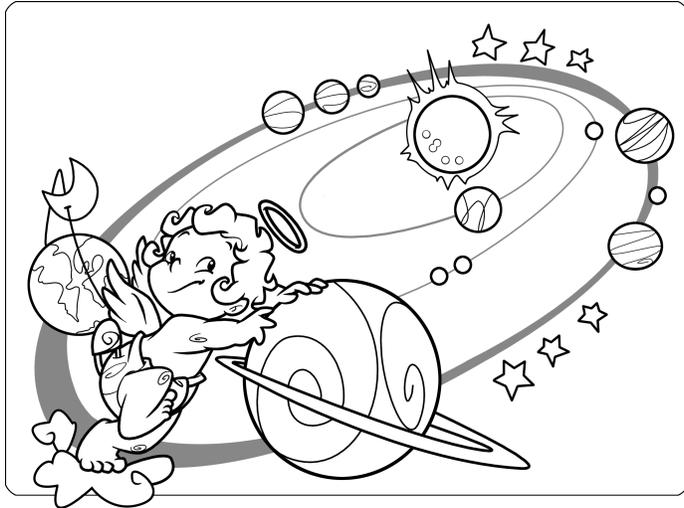
- L'obiettivo:  
*Mostrare che le azioni del Sistema Solare – di fatto i semiassi maggiori, le eccentricità e le inclinazioni – si modificano di poco durante l'evoluzione.*
- Conseguenze del teorema di Kolmogorov, nell'ipotesi in cui si applichi.
  - Assicura la stabilità *perpetua* del sistema, purché le condizioni iniziali si trovino su un toro invariante: impossibile da verificare.
  - È accettabile a un punto di vista probabilistico: la misura dei tori invarianti è grande;
  - ma il complemento dell'insieme dei tori invarianti è aperto e denso, e per  $n > 2$  è connesso: non si può escludere che un'orbita si muova tra i tori in modo caotico, seguendo delle separatrici e allontanandosi sensibilmente dall'orbita iniziale imperturbata: la *diffusione di Arnold*.
- Conseguenze del teorema di Nekhoroshev, nell'ipotesi in cui si applichi.
  - Si applica a tutti i dati iniziali in un aperto: compatibile con l'errore inevitale sui dati iniziali.
  - Si sacrifica la stabilità *perpetua*, ma la si assicura per un tempo molto lungo: si può garantire, ad esempio, che il tempo sia dell'ordine dell'età stimata del Sistema Solare?
  - Non esclude il fenomeno della diffusione delle orbite nello spazio tra i tori, e quindi neppure il caos, ma ne limita gli effetti sia nello spazio – le variazioni delle azioni sono piccole – che nel tempo – che può essere molto lungo.

### 6.5.2 I risultati ottenuti con l'ausilio del calcolatore

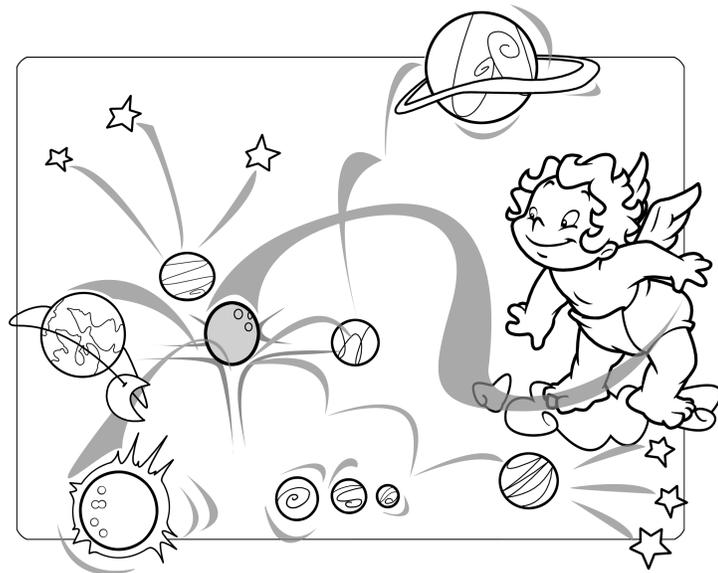
- Il metodo:
  - Si calcolano esplicitamente gli sviluppi in serie a ordine abbastanza elevato (diciamo tra 10 e 40, a seconda dei casi).
  - Si deve necessariamente far ricorso alla *manipolazione algebrica al calcolatore*: si arriva a calcolare qualche milione di termini!
  - Si applicano stime analitiche al fine di valutare quanto è grande la perturbazione restante in funzione dell'ordine  $r$  degli sviluppi.
  - Per il teorema di Kolmogorov si verifica che siano verificate le condizioni di convergenza.
  - Per il teorema di Nekhoroshev si cerca la stima migliore del tempo di stabilità in funzione dell'ordine  $r$  di troncamento.
  
- Alcuni risultati:
  - Qualche asteroide della fascia principale si trova su un'orbita vicina a un toro invariante, nell'approssimazione del problema ristretto dei tre corpi (Celletti e Chierchia, 2006)
  - I due pianeti maggiori, Giove e Saturno, si trovano sensibilmente vicini a un toro invariante, nell'approssimazione del problema dei tre corpi (G. e Locatelli, 2007).
  - Alcuni asteroidi troiani (vicini a un'orbita che forma un triangolo equilatero con Giove e il Sole) risultano stabili nel senso di Nekhoroshev per un tempo paragonabile con l'età stimata dell'Universo, nell'approssimazione del problema ristretto dei tre corpi (G. e Skokos, 1997).
  - I quattro pianeti maggiori si trovano su orbite stabili nel senso di Nekhoroshev per tempi dell'ordine di  $10^7$  anni (stima ampiamente pessimistica; G., Locatelli e Sansottera).

### 6.5.3 Le simulazioni numeriche della dinamica

- Alcuni tra i risultati principali.
  - Le orbite dei pianeti interni (Mercurio, Venere, Terra e Marte) presentano un comportamento di tipo imprevedibile su tempi di centinaia di milioni di anni (Milani, Nobili e Carpino, 1987).
  - Le orbite dei pianeti maggiori (Giove, Saturno, Urano e Nettuno) hanno un comportamento compatibile con la dinamica su un toro invariante, sull'arco di qualche miliardo di anni; i pianeti interni presentano moti caotici confinati, ma visibili nelle simulazioni (Laskar, 1989).
  - Le lacune di Kirkwood sono dovute all'azione contemporanea delle risonanze in moto medio e di quelle dette *secolari*: risonanze tra i periodi dei perielii e dei nodi (Morbidelli).
  
- Il caos su larga scala nel passato e nel futuro.
  - Alcune simulazioni numeriche riportano variazioni consistenti dell'orbita di Mercurio, che arriva a intersecare l'orbita di Venere. Può accadere anche agli altri pianeti interni, compresa la Terra; tranquilli: . . . ci vogliono circa 3.5 miliardi di anni . . . (Laskar).
  - Lo stato attuale del Sistema Solare potrebbe essere la conseguenza di eventi catastrofici accaduti intorno a 3.8 miliardi di anni fa: espulsione di un gran numero di piccoli corpi dal Sistema Solare, migrazione dei pianeti maggiori fino a posizionarsi sulle orbite attuali, formazione della fascia asteroidale (Morbidelli e collaboratori).
  
- I sistemi planetari extrasolari.
  - È un problema sostanzialmente aperto, ma, . . .  
*c'è molta gente che ci sta lavorando . . .*



Grazie per l'attenzione!



I disegni sono gentilmente offerti da Cristina Giorgilli