Laboratorio 11

Obiettivi

- Confrontare i risultati ottenuti da un metodo RK implicito e da un RK esplicito a parità di ordine e di costo computazionale.
- Scelta della tolleranza (toll) nel metodo Newton.
- Scelta del metodo di approssimazione opportuno per un sistema di EDO.

Esercizio 11.1

Inserire nel programma che implementa RK implicito un contatore delle valutazioni di f (Nota: la valutazione dello Jacobiano costa d – dimensione del problema – valutazioni di f).

Approssimare il problema:

$$\begin{cases} u_1' = -3u_1u_2 \\ u_2' = 2\sqrt{u_2} \\ u_1(0) = 1/e \\ u_2(0) = 1 \end{cases} \quad t \in [0, 50], \text{ la cui soluzione è } \begin{cases} u_1 = \exp\left[-(t+1)^3\right] \\ u_2 = (t+1)^2 \end{cases}$$

con un metodo RK implicito opportuno (toll adeguata all'ordine) e con un RK esplicito di ugual ordine che abbia lo stesso costo computazionale. Calcolare l'errore massimo tra i passi.

Fare le seguenti prove:

Gauss 2	**RK implicito**	**RK implicito**	**RK esplicito**	**RK esplicito**
N	nvf = n° valutazioni di f	Errore max su u_1	N = nvf / n° stadi	Errore max su u_1
100				
1000				
10000				

Compilare la tabella e trarre le debite conclusioni.

Esercizio 11.2 Dell'importanza della scelta della tolleranza

Si consideri il problema:

$$\begin{cases} y' = -y^2, \quad t \in [0,10] \\ y(0) = 5 \end{cases} \text{ di soluzione } \quad y(t) = \frac{5}{1+5t}$$

Approssimarlo con Eulero Implicito. Compilare la seguente tabella per N = 10

toll	Errore al primo passo	Errore finale	Errore massimo tra i passi
1e-6			
1			

Nel caso toll = 1 fare un grafico sovrapposto in Matlab della soluzione esatta, della soluzione ottenuta con Newton e di quella che si otterrebbe risolvendo ad ogni passo l'equazione di secondo grado tramite la formula risolvente. Dedurre l'importanza della scelta del valore di toll.

Esercizio 11.3

Dal foglio dei progetti d' esame dell'a.a. 2015/16:

1. **Reazione di Belusov-Zhabotinsky.** Il sistema

$$
\begin{aligned}
u_1' &= 77.27\Big(u_2 + (1 - 8.375 \cdot 10^{-6} u_1 - u_2)u_1\Big)\\
u_2' &= \frac{1}{77.27}\Big(u_3 - (1 + u_1)u_2\Big)\\
u_3' &= 0.161(u_1 - u_3),
\end{aligned}
$$

detto oregonatore, è un modello per la reazione chimica di Belusov-Zhabotinsky. Scegliere in modo motivato un opportuno metodo numerico per ottenere delle approssimazioni per $u(t)$ con $t = 30, 60, 90, \ldots,$ 360, partendo da

$$u_1(0) = 1, \quad u_2(0) = 2, \quad u_3(0) = 3.$$

Svolgere l'esercizio solo per t = 90.

Esercizio 11.4

Si consideri il problema di Cauchy:

$$Y' = \begin{bmatrix} 9 & 24 \\ -24 & -51 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 5\cos(t) - \frac{1}{3}sen(t) \\ -9\cos(t) + \frac{1}{3}sen(t) \end{bmatrix}, \ Y(0) = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \qquad t \in [0, 100],$$

approssimarlo con un metodo numerico opportuno