

# Laboratorio 4

## Obiettivi

1) Approssimare il problema di Cauchy per un SISTEMA di E.D.O. LINEARE:

$$f: \mathfrak{R}^{d+1} \longrightarrow \mathfrak{R}^d$$

$$u'(t) = Au(t) \quad t_0 \leq t \leq T, \quad u(t) \in \mathfrak{R}^d$$

$$u(t_0) = v, \quad v \in \mathfrak{R}^d$$

con A matrice quadrata  $d \times d$

a) con il metodo di **Eulero Implicito**

$$U_{n+1} = U_n + \tau A U_{n+1} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$U_0 = v$$

dopo aver riscritto il problema come  $[I - \tau A] U_{n+1} = U_n$

b) con il **Metodo dei Trapezi**.

$$U_{n+1} = U_n + (\tau/2)(AU_n + AU_{n+1}) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$U_0 = v$$

qui il problema riscritto diventa  $[I - (\tau/2)A] U_{n+1} = [I + (\tau/2)A] U_n$

2) Stimare l'ordine  $p$  di un metodo usando la proprietà:

$$|U_\tau(T) - U_{\tau/2}(T)| = O(\tau^p)$$

dove  $U_\tau(T)$  e  $U_{\tau/2}(T)$  sono le soluzioni approssimate al tempo  $T$  ottenute rispettivamente con un passo  $\tau$  e un passo  $\tau/2$ .

**Esercizio 4.1** Dato il problema

$$u'(t) = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} u(t), \quad u(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad t \in [0, 2], \quad \text{Sol: } u(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -3e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Approssimarlo con Eulero Implicito e Trapezi. Compilare per ognuno dei due metodi una tabella del tipo:

N	$\ u(\mathbf{T}) - U_N(\mathbf{T})\ $	$\ U_N(\mathbf{T}) - U_{2N}(\mathbf{T})\ $
50		
100		
200		
400		

e stimarne l'ordine.

N.B. In questo caso è necessario solo il valore finale. La stampa/grafica dei valori intermedi e il confronto tra il grafico della soluzione esatta e di quella approssimata possono essere utili per la verifica del buon funzionamento del programma.