Metodi Runge – Kutta immersi con ad attività del passo

Ordine p	**Ordine p-1**
$U_{n+1} = U_n + \tau\, F(t_n, U_n, \tau)$	$\hat{U}_{n+1} = U_n + \tau\, \hat{F}(t_n, U_n, \tau)$
$F(t,u,\tau) = \sum_{i=1}^{s} b_i K_i(t,u)$	$\hat{F}(t,u,\tau) = \sum_{i=1}^{s} \hat{b}_i\, K_i(t,u)$
$K_i = f\left(t + c_i\tau,\ u + \tau\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j \right)$	$K_i = f\left(t + c_i\tau,\ u + \tau\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j \right)$

Ricordiamo le caratteristiche dei metodi Runge-Kutta "immersi":

c	A
	b
	b^

- hanno ordine p e p^ con p^ = p-1,
- stessa matrice A,
- stesso vettore c,
- si stima l'errore di consistenza del metodo di ordine (p-1), quindi un $O(\tau^p)$, al passo n , con

  $$Err_n \approx \tau \,\|\sum_{i=1}^{s} (b_i - \hat{b}_i) K_i\,\|$$

- si corregge il passo moltiplicandolo per una costante $q = \sqrt[p]{\dfrac{toll}{Err_n}}$ (vedi esercizio 6.3 delle esercitazioni teoriche)
- sebbene si sia stimato l'errore di consistenza del metodo di ordine (p-1), si calcola la soluzione approssimata utilizzando il metodo di ordine p

In fondo a questo documento trovate le matrici di Butcher del metodo di Dormand-Princesche 5(4) e Fehlberg 5(4) e nella pagina web del corso trovate la funzione che ne definisce i coefficienti. Attenzione: nel primo caso il metodo a più stadi è quello meno preciso, nel secondo è il contrario; solo il primo permette di risparmiare calcoli secondo la strategia *First same as last* .

schema dell'algoritmo

L'algoritmo per la scelta adattiva del passo, nel caso dei metodi Runge-Kutta immersi, si può riscrivere nel modo seguente:

fissata una tolleranza **toll**, posto **r = 0.5 (** 0 < r < 1 è un parametro di sicurezza),
assegnato $\boldsymbol{\tau}$ (valore di tentativo per il primo passo),
inizializzati , $\mathbf{t = t_0}$, **U = v**, **n = 0** (conta il n° dei passi)

while (t < T)

calcolo della matrice K con passo τ

stima dell'errore $Err = \tau \| \sum_{i=1}^{s} (b_i - \hat{b}_i) K_i \|$

$\tau_{nuovo} = \sqrt[p]{\frac{r * toll}{Err}} \cdot \tau$ // nuovo τ per prossima prova

if(Err <= toll) // il passo ha avuto successo: assegno

$U_{n+1} = U_n + \tau \sum_{i=1}^{s} b_i K_i$ utilizzando i valori di K già calcolati

$t = t + \tau$,

$\tau = \min(\tau_{nuovo}, T-t)$

n = n+1

eventuale gestione stampe su video o file

else // il passo non ha avuto successo, devo ripeterlo

$\tau = \tau_{nuovo}$

end if

end while

N.B. nello schema non si tiene conto della strategia *First same as last*: introdurre le opportune modifiche nel caso la si possa e voglia applicare.

Dormand-Princesche 5(4)

0							
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$						
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$					
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$				
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$			
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$		
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	
	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0
	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$

Fehlberg 5(4)

0						
1/4	1/4					
3/8	3/32	9/32				
12/13	1932/2197	−7200/2197	7296/2197			
1	439/216	−8	3680/513	−845/4104		
1/2	-8/27	2	−3544/2565	1859/4104	−11/40	
	16/135	0	6656/12825	28561/56430	−9/50	2/55
	25/216	0	1408/2565	2197/4104	−1/5	0