Calcolo Numerico 2 – a.a. 2016/17

foglio n. 1 per il 08.03.2017

1.1. **Riscalando il tempo.** Siano u una soluzione dell'equazione differenziale ordinaria $u' = u$ e $\alpha > 0$ un numero reale positivo. Determinare quale equazione differenziale ordinaria soddisfa la funzione

$$\tilde{u}(t) := u(\alpha t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1.2. **Invertendo il tempo.** Data $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ una soluzione di una delle due equazioni differenziali ordinarie:

$$u' = f(u) \quad \text{oppure} \quad u'' = f(u).$$

Determinare in entrambi i casi l'equazione che soddisfa la funzione

$$\tilde{u}(t) := u(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Inoltre interpretare l'ottenuto, in particolare discutendo eventuali differenze fra i due casi.

1.3. **Problemi autonomi e soluzioni traslate.** Considerare il problema autonomo

$$u' = f(u) \text{ in } \mathbb{R}, \qquad u(t_0) = v$$

con $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $v \in \mathbb{R}^d$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Verificare che, senza perdita in generalità, si può assumere $t_0 = 0$.

Suggerimento: Verificare che con u anche $u(\cdot + \tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, è soluzione.

1.4. **Formulazione integrale.** Siano $t_0, v \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni continue. Verificare l'equivalenza dei seguenti due enunciati:

(a) u è derivabile con continuità tale che

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad u'(t) = f\big(t, u(t)\big), \qquad u(t_0) = v.$$

(b) u è continua tale che

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad u(t) = v + \int_{t_0}^{t} f\big(s, u(s)\big) ds.$$

1.5. **Soluzione di $u' = \lambda u$ con λ complesso.** Verificare che

$$\frac{d}{dt} \exp(\lambda t) = \lambda \exp(\lambda t)$$

vale per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Suggerimento: Si ha $\exp(a + ib) = e^a[\cos(b) + i \sin(b)]$ per $a, b \in \mathbb{R}$.

1.6. **Convergenza del metodo di Eulero esplicito per $u' = \lambda u$.** Data $\lambda \in \mathbb{R}$, considerare il metodo di Eulero esplicito per il problema a valore iniziale

$$u' = \lambda u, \qquad u(0) = v$$

e dimostrarne la convergenza in $T > 0$, cioè

$$\lim_{N\to\infty} |U^N(T) - u(T)| = 0$$

dove $U^N(T)$ indica l'approssimazione di $u(T)$ con N passi uniformi di lunghezza T/N.

Suggerimento: Risolvere la ricorsione ottenuta dall'applicazione del metodo di Eulero esplicito al suddetto problema.

INFORMAZIONI:

Homepage del corso:
http://www.mat.unimi.it/users/veeser/calcnum2.html

Prof. A. Veeser
Studio: 2051 (nel "sottotetto")
Telefono: 02.503.16186
E-mail: andreas.veeser@unimi.it
Orario di ricevimento: Martedì 9:30 – 11:30

Dott.ssa N. Bressan
Studio: 1025
Telefono: 02.503.16133
E-mail: nicoletta.bressan@unimi.it
Orario di ricevimento: su appuntamento