Calcolo Numerico 2 – a.a. 2016/17

foglio n. 2 per il 15.03.2017

2.1. **Cambiando coordinate spaziali.** Sia $u : I \to \mathbb{R}^d$ una soluzione dell'equazione differenziale ordinaria autonoma

$$u' = f(u)$$

con campo vettoriale $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ e sia $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ una matrice invertibile. Determinare l'equazione differenziale ordinaria per

$$\tilde{u}(t) := Au(t), \qquad t \in I.$$

2.2. **Rendere autonomo.** Dato il problema ai valori iniziali

$$(*) \qquad u' = f(\cdot, u) \text{ in } (t_0, T), \qquad u(t_0) = v,$$

con $f : (t_0, T) \times D \to \mathbb{R}^d$, individuare un problema associato autonomo dalla cui soluzione si può ricavare la soluzione di $(*)$.
Suggerimento: $t' = 1$.

2.3. **Ordine di convergenza sperimentale.** Supporre che la funzione costo-qualità sia della forma

$$e(N) = CN^{-p}, \qquad (N \in \mathbb{N})$$

con $C \geq 0$ e $p > 0$. Determinare p da due punti (N_i, e_i), $i = 1, 2$, sul grafico di e. Inoltre derivare la formula nel caso particolare in cui $N_2 = 2N_1$.

2.4. **Convessità e condizione Lipschitz unilaterale.** Siano $D \subset \mathbb{R}^d$ un convesso e $\Phi \in C^1(D; \mathbb{R})$ un potenziale convesso. Verificare che

$$f(t, z) = -\nabla\Phi(z) \qquad (t, z) \in \mathbb{R} \times D,$$

in

$$u' = f(\cdot, u) \text{ in } [0, \infty[, \qquad u(0) = v \in D$$

soddisfa la condizione Lipschitz unilaterale.
Suggerimento: Mostrare dapprima

$$\forall z_0, z_1 \in D \qquad \Phi(z_1) - \Phi(z_0) - \nabla\Phi(z_0) \cdot (z_1 - z_0) \geq 0.$$

2.5. **Derivata di un potenziale quadratico.** Determinare il gradiente di

$$\Phi(z) := \frac{1}{2} z \cdot Az, \qquad z \in \mathbb{R}^d$$

dove A è una matrice quadrata, considerando anche il caso particolare in cui A sia simmetrica.

2.6. **Derivata di un integrale dipendente da un parametro.** Siano I un intervallo aperto e $f : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile con continuità rispetto alla seconda variabile. Verificare che la funzione

$$\varphi(t) := \int_0^t f(s,t)\,ds \qquad t \in I,$$

è derivabile con

$$\varphi'(t) = f(t,t) + \int_0^t \partial_t f(s,t)\,ds.$$

Suggerimento: Introdurre una funzione ψ tale che $\psi(t,t) = \phi(t)$ e considerare le sue derivate parziali.

Informazioni:

Homepage del corso:
http://www.mat.unimi.it/users/veeser/calcnum2.html

Prof. A. Veeser
Studio: 2051 (nel "sottotetto")
Telefono: 02.503.16186
E-mail: andreas.veeser@unimi.it
Orario di ricevimento: Martedì 9:30 – 11:30

Dott.ssa N. Bressan
Studio: 1025
Telefono: 02.503.16133
E-mail: nicoletta.bressan@unimi.it
Orario di ricevimento: su appuntamento